Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres

Paul Dubreil

Endomorphismes

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 18, n° 2 (1964-1965), exp. n° 23, p. 1-20

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1964-1965__18_2_A4_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
18e année, 1964/65, n° 23

17 mai 1965

ENDOMORPHISMES

par Paul DUBREIL

1. Introduction.

L'étude de l'anneau des endomorphismes d'un groupe abélien est, dans une large mesure, classique ([17] § 21, [12] § 56 à 58). Pour un groupe non abélien, l'ensemble des endomorphismes possède une structure plus générale que celle d'un anneau, étudiée en 1933 par H. FITTING (moyennant des conditions de chaîne) sous le nom de domaine [11] et appelée depuis "annéloïde" par N. BOURBAKI ([3] § 8).

En 1947, R. BAER a montré que d'intéressantes propriétés des endomorphismes d'un groupe G sont en réalité indépendantes de l'associativité, [1] : elles restent valables quand G est une boucle ("loop", c'est-à-dire quasi-groupe avec élément-unité), munie éventuellement d'un domaine d'opérateurs.

Dans une thèse dirigée par D. D. MILLER, ([6] et [5] § 2.2), C. G. DOSS a étudié les applications d'un ensemble E en lui-même : l'ensemble de ces applications, muni de la composition $\circ$ (que nous noterons multiplicativement pour simplifier l'écriture), est un demi-groupe H dont la structure algébrique est remarquable (par exemple, tous les éléments sont réguliers au sens de von Neumann : $\forall\ \eta \in H$, $\exists\ \xi \in H$ tel que $\eta\xi\eta = \eta$). Ici, bien entendu, le noyau d'un endomorphisme fait place nécessairement à la partition définie dans E par l'application considérée η , ou à ce qu'il sera commode pour nous d'appeler l'équivalence nucléaire π_η définie par :

$$x \equiv y(\pi_\eta) \qquad \text{si} \quad \eta x = \eta y \ .$$

Ces équivalences, appelées alors équivalences d'application ou d'homomorphisme, m'avaient permis en 1942 d'étendre aux groupoïdes avec opérateurs les théorèmes d'isomorphisme [10] ; aussi constituent-elles un excellent outil pour étudier les endomorphismes d'un tel groupoïde G : un premier ensemble de résultats inspirés par R. BAER [1] et W. SPECHT [20] concerne les idempotents et les sous-groupes maximaux du demi-groupe H . Ces résultats sont étroitement liés à une classification, tout à fait naturelle mais aussi fine que possible, de ces endomorphismes (pour les groupes, [19] et [20] ; pour les groupoïdes, [8]).

En fait, ces résultats sont valables aussi pour les endomorphismes d'une algèbre universelle [9] (donc, en particulier, d'un groupe avec multiopérateurs, [15], [18]) et c'est cette question que nous étudierons d'abord (§ 2 et 3).

☆
☆ ☆

Mais d'autre part, comme le remarquent A. H. CLIFFORD et G. B. PRESTON ([5], § 2.2), le demi-groupe des applications d'un ensemble en lui-même a exactement les mêmes propriétés, précises et élégantes, que le demi-groupe des endomorphismes d'un espace vectoriel ([13], [16]). Les rôles identiques joués ici par la dimension d'un sous-espace, et là par le cardinal d'un sous-ensemble expliquent déjà bien cette analogie.

Cependant, un ensemble et un espace vectoriel paraissent être deux types d'algèbre universelle fort éloignés l'un de l'autre, le premier étant absolument amorphe du point de vue algébrique, alors que le deuxième vérifie un système d'axiomes particulièrement fort. Aussi chercherons-nous, dans la deuxième partie de cet exposé, à mettre en évidence, dans le demi-groupe H des endomorphismes d'une algèbre universelle quelconque G, des <u>sous-ensembles</u> sur lesquels on retrouve telle ou telle des "bonnes propriétés" connues pour un ensemble ou un espace vectoriel.

Les résultats ainsi obtenus permettront de définir certains types d'algèbres pour lesquels le demi-groupe H tout entier possède l'une ou l'autre de ces propriétés. Finalement, pour les algèbres que nous appellerons <u>vectorielles</u>, <u>toutes</u> ces bonnes propriétés seront valables dans H tout-entier. Et comme une algèbre est vectorielle dès que ses sous-algèbres et ses congruences vérifient des conditions simples, nous verrons ainsi apparaître un lien précis entre les propriétés d'une algèbre G et celles du demi-groupe H de ses endomorphismes.

Nous nous limiterons dans cet exposé aux points de vue qui viennent d'être indiqués, mais il est clair que cette théorie des endomorphismes pourra s'exprimer en termes de catégories. C'est là très probablement que se trouvera l'explication profonde des remarquables propriétés de dualité qui se manifestent d'un bout à l'autre. J'espère y revenir à une autre occasion.

2. Notions sommaires sur les algèbres universelles.

Une algèbre universelle G est un ensemble non vide muni d'une famille $\mathfrak{F}$ d'opérations f_i d'<u>ordre</u> n_i, ou à n_i "variables",

$$f_i : G^{n_i} \longrightarrow G$$

ou

$$(a_1 , \ldots , a_{n_i}) \rightsquigarrow f_i(a_1 , \ldots , a_{n_i}) \in G .$$

Nous supposons ici $n_i \geqslant 1$ (pour $n_i = 1$, f_i prend souvent le nom d'opérateur), mais on peut considérer aussi une ou plusieurs opérations d'ordre nul consistant chacune à distinguer dans G un élément (application d'un ensemble G^0 formé d'un seul élément, dans G).

Une sous-algèbre T est une partie de G stable pour chacune des opérations $f_i \in \mathfrak{F}$.

Une congruence $\mathcal{C}$ est une relation d'équivalence régulière pour chacune des opérations $f_i \in \mathfrak{F}$:

$$a_\lambda \equiv b_\lambda \quad (\mathcal{C}) \quad (\lambda = 1 , \ldots , n_i) \implies f_i(a_1 , \ldots , a_{n_i}) \equiv f_i(b_1 , \ldots , b_{n_i}) \quad (\mathcal{C})$$

Un endomorphisme η de G est une application de G dans G telle que, pour chacune des opérations $f_i \in \mathfrak{F}$, on ait :

$$\eta[f_i(x_1 , \ldots , x_{n_i})] = f_i[\eta(x_1) , \ldots , \eta(x_{n_i})] \quad (\forall\ x_1 , \ldots , x_{n_i} \in G) .$$

De la théorie des algèbres universelles ([2], [21], [9]), nous n'utiliserons que les extensions faciles de théorèmes élémentaires :

L'image $\eta(G)$ de G par un endomorphisme η est une sous-algèbre de G que nous désignerons par S_η .

L'équivalence nucléaire π_η d'un endomorphisme η est une congruence et on a :

$$S_\eta \simeq G/\pi_\eta \tag{1}$$

où $G/\mathcal{C}$ désigne l'algèbre-quotient de G par la congruence $\mathcal{C}$ (théorème d'homomorphisme).

PREMIER THÉORÈME d'isomorphisme. - Pour tout homomorphisme φ appliquant une algèbre universelle G sur une algèbre universelle $\overline{G}$, il existe une correspondance bijective ρ entre les congruences $\overline{\mathcal{C}}$ de $\overline{G}$ et les congruences $\mathcal{C} = \rho(\overline{\mathcal{C}})$ de G qui contiennent π_φ ; de plus, les algèbres-quotients correspondantes sont isomorphes :

$$\overline{G}/\overline{\mathcal{C}} \simeq G/\mathcal{C} \qquad (\mathcal{C} = \rho(\overline{\mathcal{C}}) \supseteq \pi_\varphi) .$$

Enfin,

LEMME. - Si une congruence $\mathcal{C}$ et une sous-algèbre T de l'algèbre universelle G vérifient la condition

$$\varphi : G/\mathcal{C} \simeq T ,$$

il existe un endomorphisme η de G dont la congruence nucléaire est $\mathcal{C}$ et dont l'image est T :

$$\pi_\eta = \mathcal{C} , \qquad S_\eta = T .$$

Le composé $\eta = \varphi\gamma$ de l'homomorphisme canonique

$$\gamma : G \sim G/\mathcal{C}$$

et de l'isomorphisme φ répond en effet à la question.

Remarque. - En tant qu'algèbre universelle, un groupe doit être regardé comme muni d'une famille d'opérations telles que les sous-algèbres soient les sous-groupes : on doit donc adjoindre à la loi de groupe $(x , y) \rightsquigarrow xy$, opération d'ordre 2 , l'opération, d'ordre 1 , $x \rightsquigarrow x^{-1}$. On peut d'ailleurs aussi bien adjoindre l'opération d'ordre 2 , $(x , y) \rightsquigarrow x^{-1} y$, division à droite.

3. Idempotents et sous-groupes maximaux du demi-groupe H des endomorphismes de G ([1]).

On sait [5] que, dans tout demi-groupe D , à chaque idempotent e est associé un plus grand sous-groupe Γ_e admettant e comme élément neutre ; ces sous-groupes $\Gamma_e , \Gamma_f , \ldots$ sont les sous-groupes maximaux de D et ils sont disjoints deux à deux. Il en est de même de leurs radicaux respectifs $\rho_e , \rho_f , \ldots$ et l'ensemble complémentaire de la réunion de ces radicaux est vide ou infini.

L'étude de la situation correspondante dans le demi-groupe H des endomorphismes d'une algèbre universelle G fait intervenir une classification des endomorphismes obtenue à partir des notions classiques d'endomorphismes surjectifs et d'endomorphismes injectifs.

Désignons par Σ l'ensemble des endomorphismes surjectifs :

$$\Sigma = \{\eta \; ; \; \eta \in H , \; S_\eta = G\} ,$$

par Θ l'ensemble des endomorphismes injectifs :

$$\Theta = \{\eta \; ; \; \eta \in H , \; \pi_\eta = \mathcal{E}\}$$

où $\mathcal{E}$ est l'égalité. $A = \Sigma \cap \Theta$ est le groupe des automorphismes.

([1]) Ce paragraphe contient seulement les résultats ; pour les démonstrations, voir [8] ou [9].

Nous avons

(2) $$S_{\eta_2\eta_1} \subseteq S_{\eta_2}$$

mais, si η_1 est un endomorphisme surjectif σ :

(2') $$S_{\eta\sigma} = S_\eta \ , \qquad (\sigma \in \Sigma) \ .$$

De même,

(3) $$\pi_{\eta_2\eta_1} \supseteq \pi_{\eta_1}$$

et, si η_2 est un endomorphisme injectif θ :

(3') $$\pi_{\theta\eta} = \pi_\eta \ , \qquad (\theta \in \Theta) \ .$$

D'après les formules (2) et (3), si nous considérons un endomorphisme η quelconque et ses puissances $\eta^2 , \dots , \eta^k , \dots$ les images S_{η^k} forment une suite <u>décroissante</u> :

(4) $$S_\eta \supseteq S_{\eta^2} \supseteq \dots \supseteq S_{\eta^k} \supseteq S_{\eta^{k+1}} \supseteq \dots$$

les équivalences nucléaires π_{η^k} forment une suite <u>croissante</u> :

(5) $$\pi_\eta \subseteq \pi_{\eta^2} \subseteq \dots \subseteq \pi_{\eta^k} \subseteq \pi_{\eta^{k+1}} \subseteq \dots$$

et ces suites sont, ou bien stationnaires à partir d'un certain rang, ou bien strictement décroissante, respectivement strictement croissante.

Nous appellerons <u>extensif</u> tout endomorphisme η vérifiant l'égalité

$$S_\eta = S_{\eta^2} \quad (= S_{\eta^3} = \dots)$$

et poserons

$$\Sigma' = \{\eta \ ; \ \eta \in H \ , \ S_\eta = S_{\eta^2}\} \ .$$

Le radical de Σ' , $P(\Sigma')$, est l'ensemble des endomorphismes pour lesquels la suite (4) est stationnaire à partir d'un certain rang. On a évidemment, Ω désignant l'ensemble des <u>idempotents</u> :

$$\Omega \subseteq \Sigma' \qquad \text{et} \qquad \Sigma \subseteq \Sigma' \subseteq P(\Sigma') \ .$$

Pour qu'un endomorphisme η soit extensif, il faut et il suffit que l'<u>extension saturée</u> $\pi_\eta(S_\eta)$ de l'image S_η par l'équivalence nucléaire π_η (c'est-à-dire la réunion des classes mod π_η qui rencontrent S_η) coïncide avec G :

(6) $$S_\eta = S_{\eta^2} \iff \pi_\eta(S_\eta) = G$$

(cf. pour les espaces vectoriels : [16] ; pour les groupes : [19] ; pour les groupoïdes avec opérateurs : [8]).

De même, nous appellerons <u>rétractif</u> tout endomorphisme η vérifiant l'égalité :

$$\pi_\eta = \pi_{\eta^2} \quad (= \pi_{\eta^3} = \dots)$$

et nous poserons

$$\Theta' = \{\eta \ ; \ \eta \in H \ , \ \pi_\eta = \pi_{\eta^2}\} \ .$$

Le radical de Θ' , $\rho(\Theta')$, est l'ensemble des endomorphismes pour lesquels la suite (5) est stationnaire à partir d'un certain rang. On a :

$$\Omega \subseteq \Theta' \quad \text{et} \quad \Theta \subseteq \Theta' \subseteq \rho(\Theta') \ .$$

Pour qu'un endomorphisme η soit rétractif, il faut et il suffit que la <u>restriction</u> $\pi_\eta|S_\eta$ de son équivalence nucléaire π_η à l'image S_η soit l'égalité (dans S_η) :

(7) $$\pi_\eta = \pi_{\eta^2} \iff \pi_\eta|S_\eta = \varepsilon|S_\eta \ ,$$

(mêmes références que pour (6)).

Désignons par Π le complémentaire de A dans Σ :

$$\Pi = \Sigma - A \quad (\text{ou } \Sigma \backslash A) \ ;$$

de même, posons

$$M = \Theta - A \quad (\text{ou } \Theta\backslash A) \ .$$

En utilisant les propositions précédentes, on obtient :

(8) $$\Theta' \cap \Sigma = A = \Sigma' \cap \Theta$$

(8') $$\Theta' \cap \Pi = \phi = \Sigma' \cap M \ .$$

Si deux endomorphismes μ_1 , μ_2 , <u>injectifs mais non surjectifs</u>, donnent la même image, l'un est le produit de l'autre par un automorphisme α :

$$S_{\mu_1} = S_{\mu_2} \quad (\mu_i \in M) \iff \mu_2 = \mu_1 \alpha \quad (\alpha \in A) \ .$$

Il en résulte que, $\forall \mu \in M$, la suite (4) des images des puissances de μ est <u>strictement décroissante</u>, c'est-à-dire :

(9) $$\mathcal{M} \cap \mathcal{P}(\Sigma') = \emptyset \ .$$

Par suite, $\mathcal{M}$ est un ensemble vide ou infini, certainement vide quand le treillis des sous-algèbres de G vérifie la condition de chaîne descendante.

Si maintenant deux endomorphismes π_1, π_2, surjectifs mais non injectifs, ont même équivalence nucléaire, l'un est le produit de l'autre par un automorphisme α :

$$\mathcal{N}_{\pi_1} = \mathcal{N}_{\pi_2} \quad (\pi_i \in \Pi) \iff \pi_2 = \alpha\pi_1 \quad (\alpha \in A) \ .$$

Il en résulte que, $\forall\ \pi \in \Pi$, la suite (5) des équivalences nucléaires des puissances de π est strictement croissante, c'est-à-dire :

(10) $$\Pi \cap \mathcal{P}(\Theta') = \emptyset \ .$$

Par suite, Π est un ensemble vide ou infini, certainement vide quand le treillis des congruences de G vérifie la condition de chaîne ascendante. (Pour les groupes, cf. [20] § 1.3.3, et [19] ; pour les groupoïdes avec opérateurs, [8].)

Si $\eta \in \mathcal{P}(\Sigma') \cap \mathcal{P}(\Theta') = \mathcal{P}(\Sigma' \cap \Theta')$, soit k le plus petit entier tel que $\eta^k \in \Sigma'$, ℓ le plus petit entier tel que $\eta^\ell \in \Theta'$. On a :

(11) $$k = \ell$$

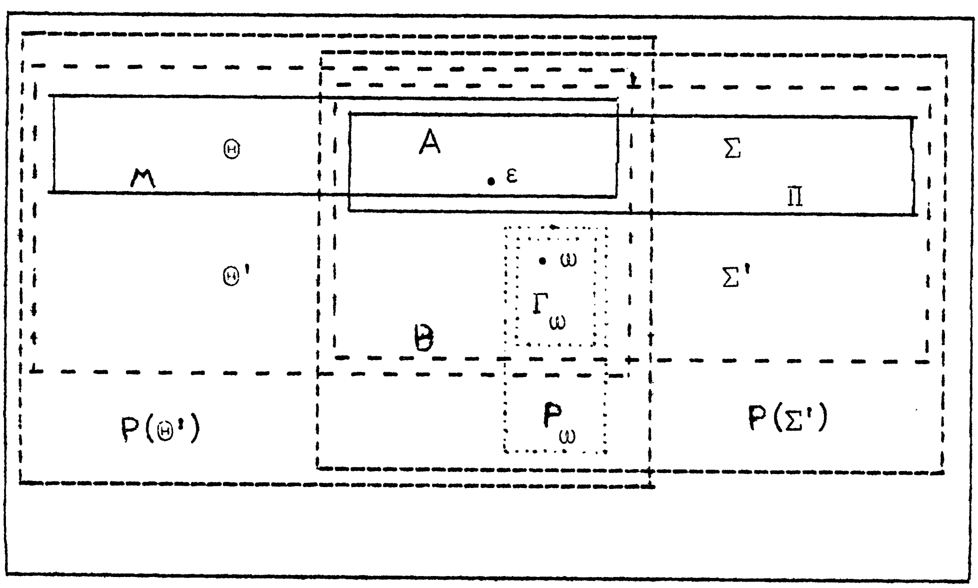
ce qui entraîne :

(12) $$\Sigma' \cap \mathcal{P}(\Theta') = \Sigma' \cap \Theta' = \mathcal{P}(\Sigma') \cap \Theta' \ ,$$

(cf. pour les espaces vectoriels [16], a ; pour les groupes, [19] ; pour une autre démonstration de (12), dans le cas des groupoïdes avec opérateurs, [8]).

Ceux des résultats précédents qui concernent l'intersection des ensembles Θ, Σ, Θ', Σ', $\mathcal{P}(\Theta')$, $\mathcal{P}(\Sigma')$ peuvent se représenter par le schéma "rectangulaire" suivant :

$\mathcal{M} = \Theta - A$



$\Pi = \Sigma - A$

Tout endomorphisme idempotent ω distinct de l'automorphisme identique ε appartient à l'ensemble

$$\mathcal{B} = (\Theta' \cap \Sigma') - A \,;$$

ω est entièrement déterminé par l'image S_ω et l'équivalence nucléaire π_ω qui vérifient les conditions

(6') $$\pi_\omega(S_\omega) = G \,,$$

(7') $$\pi_\omega | S_\omega = \mathcal{E} | S_\omega \,.$$

Réciproquement, si une congruence $\mathcal{C}$ et une sous-algèbre S de G vérifient les conditions :

$$\mathcal{C}(S) = G \,, \qquad \mathcal{C}|S = \mathcal{E}|S \,,$$

il existe un idempotent et un seul, ω, tel que l'on ait :

$$S_\omega = S \,, \qquad \pi_\omega = \mathcal{C} \qquad (\omega^2 = \omega) \,.$$

(Pour les boucles, [1] ; pour les groupoïdes avec opérateurs, [8]).

Pour tout idempotent ω, le plus grand sous-groupe Γ_ω de H admettant ω pour élément neutre est l'ensemble des endomorphismes η vérifiant les deux conditions

$$S_\eta = S_\omega \,, \qquad \pi_\eta = \pi_\omega \,.$$

Ce sous-groupe Γ_ω est isomorphe au groupe des automorphismes de l'algèbre image S_ω. On a :

$$\bigcup_{\omega=\omega^2} \Gamma_\omega = A \cup \mathcal{B} = \Theta' \cap \Sigma'$$

et, ρ_ω désignant le radical de Γ_ω $(\rho_\varepsilon = \Gamma_\varepsilon = A)$:

$$\bigcup_{\omega=\omega^2} \rho_\omega = \rho(\Sigma') \cap \rho(\Theta') \,.$$

(Pour les groupoïdes avec opérateurs, [8]).

Ces résultats localisent, dans le schéma rectangulaire, les sous-groupes maximaux de H et leurs radicaux.

4. Equivalences $\mathcal{R}^*$, $\mathcal{L}^*$; équivalences de Green.

Ce qui précède montre l'intérêt des deux relations d'équivalence $\mathcal{R}^*$, $\mathcal{L}^*$, définies respectivement dans H, d'une façon fort naturelle, par :

$$\eta \equiv \eta' \quad (\mathcal{R}^*) \qquad \text{si} \qquad S_\eta = S_{\eta'} \ ,$$

$$\eta \equiv \eta' \quad (\mathcal{L}^*) \qquad \text{si} \qquad \pi_\eta = \pi_{\eta'} \ .$$

$\mathcal{R}^*$ est régulière à gauche, $\mathcal{L}^*$ régulière à droite. Comme nous l'avons vu, <u>les sous-groupes maximaux</u> sont des classes modulo $\mathcal{R}^* \cap \mathcal{L}^* = \mathcal{H}^*$ (celles qui contiennent <u>un</u> idempotent).

De plus, $\mathcal{R}^*$ et $\mathcal{L}^*$ sont <u>permutables</u> ; il suffit de montrer que l'on a :

$$\mathcal{R}^*\mathcal{L}^* \subseteq \mathcal{L}^*\mathcal{R}^* \ .$$

Soit donc $\eta\, \mathcal{R}^*\, \mathcal{L}^*\, \eta'$ c'est-à-dire

$$\eta \equiv \lambda \quad (\mathcal{R}^*) \qquad \lambda \equiv \eta' \quad (\mathcal{L}^*) \qquad (\lambda \in H) \ .$$

Nous avons :

(13)
$$S_{\eta'} \simeq G/\pi_{\eta'} = G/\pi_\lambda \simeq S_\lambda = S_\eta \simeq G/\pi_\eta$$

et (d'après le lemme du § 2) l'isomorphisme $S_{\eta'} \simeq G/\pi_\eta$ entraîne qu'il existe un endomorphisme λ' tel que $S_{\lambda'} = S_{\eta'}$ et $\pi_{\lambda'} = \pi_\eta$, d'où

$$\eta \equiv \lambda' \quad (\mathcal{L}^*) \qquad \text{et} \qquad \lambda' \equiv \eta' \quad (\mathcal{R}^*)$$

c'est-à-dire $\eta\, \mathcal{L}^*\, \mathcal{R}^*\, \eta'$.

Il en résulte que, dans le treillis des congruences, on a :

$$\sup(\mathcal{R}^* , \mathcal{L}^*) = \mathcal{R}^*\mathcal{L}^* = \mathcal{L}^*\mathcal{R}^* \ .$$

Nous désignerons par $\mathcal{D}^*$ cette relation d'équivalence.

D'après (13), deux endomorphismes η , η' équivalents modulo $\mathcal{D}^*$ ont des <u>images isomorphes</u> : $S_\eta \simeq S_{\eta'}$. <u>Réciproquement</u>, $S_\xi \simeq S_\eta$ entraîne $S_\xi \simeq G/\pi_\eta$ et, (toujours d'après le lemme du paragraphe 2), il existe un endomorphisme ν de G , $\nu \in H$, tel que $S_\xi = S_\nu$ et $\pi_\nu = \pi_\eta$, donc $\xi \equiv \eta \quad (\mathcal{D}^*)$.

<u>Les classes modulo $\mathcal{D}^*$ sont donc des ensembles maximaux d'endomorphismes ayant des images isomorphes ou (ce qui revient au même) des algèbres-quotients isomorphes</u>.

Mais d'autre part, si, <u>dans un demi-groupe quelconque</u> D , un sous-groupe Γ rencontre un idéal (à droite, par exemple) I' , Γ est contenu dans I' . Il en résulte facilement qu'un sous-groupe maximal Γ_e , ayant pour élément-neutre l'idempotent e , coïncide avec l'ensemble des éléments x de D qui engendrent le même idéal à droite et aussi le même idéal à gauche que l'idempotent e :

$$|x) = |e) \qquad \underline{\text{et}} \qquad (x| = (e| \ .$$

Nous sommes amenés ainsi à utiliser les équivalences de Green $\mathcal{R}$ et $\mathcal{L}$ ([14], [5] § 2.1), définies dans D respectivement par :

$$a \equiv b \quad (\mathcal{R}) \qquad \text{si} \qquad |a) = |b) \ ,$$

$$a \equiv b \quad (\mathcal{L}) \qquad \text{si} \qquad (a| = (b| \ .$$

<u>Tout sous-groupe maximal</u> Γ_e <u>du demi-groupe</u> D <u>est une classe modulo</u> $\mathcal{H} = \mathcal{R} \cap \mathcal{L}$, à savoir la classe $\mathcal{H}(e)$ qui contient l'idempotent e .

Une classe modulo $\mathcal{H}$ contient d'ailleurs <u>au plus</u> un idempotent puisque, dès qu'elle en contient un, elle coïncide avec le plus grand sous-groupe ayant cet idempotent comme élément-neutre.

En revenant <u>au demi-groupe</u> H <u>des endomorphismes d'une algèbre</u> G , nous voyons que, pour tout idempotent $\omega \in H$, on a :

$$\mathcal{H}(\omega) = \mathcal{H}^*(\omega) = \Gamma_\omega \ .$$

Par ailleurs, d'après (2), $\eta \equiv \eta'$ $(\mathcal{R})$, c'est-à-dire $\eta = \eta'\nu$ et $\eta' = \eta\nu'$, ν , $\nu' \in H$, entraîne $S_\eta = S_{\eta'}$ c'est-à-dire $\eta \equiv \eta'$ $(\mathcal{R}^*)$. Ainsi :

(14) $$\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}^*$$

et de même, d'après (3),

(15) $$\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}^*$$

d'où :

$$\mathcal{H} \subseteq \mathcal{H}^* \ , \qquad \mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}^* \ .$$

Pour préciser la comparaison des équivalences $\mathcal{R}^*$, $\mathcal{L}^*$ avec les équivalences de Green, nous devons encore définir quelques types remarquables d'endomorphismes.

5. <u>Endomorphismes rationnels</u> (<u>à droite, ou à gauche</u>).

Nous dirons qu'un endomorphisme η est <u>rationnel à droite</u> si :

$$S_\lambda \subseteq S_\eta \ \underline{\text{entraîne}} : \ \exists\, \nu \in H \ \text{tel que} \ \lambda = \eta\nu \ .$$

Soit Φ' l'ensemble des endomorphismes rationnels à droite (non vide, car $\varepsilon \in \Phi'$).

Si η , $\eta' \in \Phi'$, la relation $\eta \equiv \eta'$ $(\mathcal{R}^*)$, c'est-à-dire $S_\eta = S_{\eta'}$, entraîne $\eta \in |\eta')$ et $\eta' \in |\eta)$ donc $\eta \equiv \eta'$ $(\mathcal{R})$: en tenant compte de (14), on en déduit que $\mathcal{R}$ <u>et</u> $\mathcal{R}^*$ <u>ont même restriction à</u> Φ' :

(16) $$\mathcal{R}^*|\Phi' = \mathcal{R}|\Phi' \ .$$

D'autre part, Φ' est <u>saturé</u> (c'est-à-dire réunion de classes) <u>modulo</u> $\mathcal{R}$.

Soit en effet $\xi \equiv \eta \quad (\mathcal{R})$ avec $\eta \in \Phi'$. D'après l'inclusion $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}^*$, on a : $S_\xi = S_\eta$ donc l'inclusion $S_\varphi \subseteq S_\xi$ entraîne $S_\varphi \subseteq S_\eta$ et, puisque $\eta \in \Phi'$, $\varphi = \eta\nu$. Or, par hypothèse, $\eta \in |\xi)$ donc $\eta = \xi\nu'$ d'où $\varphi = \xi . \nu'\nu$: nous avons bien $\xi \in \Phi'$.

Il en résulte que, <u>si</u> $\eta \in \Phi'$, <u>les classes</u> $\mathcal{R}(\eta)$ <u>et</u> $\mathcal{R}^*(\eta)$ <u>vérifient l'égalité</u>:

(17) $$\mathcal{R}(\eta) = \mathcal{R}^*(\eta) \cap \Phi' \qquad (\eta \in \Phi') .$$

D'après ce qui précède en effet, le premier membre est contenu dans le deuxième, et si inversement $\xi \in \mathcal{R}^*(\eta) \cap \Phi'$, nous avons $\xi \equiv \eta \quad (\mathcal{R}^*)$ avec $\xi , \eta \in \Phi'$, donc, d'après (16), $\xi \in \mathcal{R}(\eta)$.

Prenons en particulier pour η l'automorphisme identique ε : $\mathcal{R}^*(\varepsilon)$ est l'ensemble Σ des endomorphismes <u>surjectifs</u> tandis que $\mathcal{R}(\varepsilon)$ est l'ensemble I' des endomorphismes <u>inversibles à droite</u>, donc :

(17') $$I' = \Sigma \cap \Phi' .$$

CONSÉQUENCE. - <u>Pour que tout endomorphisme surjectif soit inversible à droite, il faut et il suffit que l'on ait</u> :

$$\Sigma \subseteq \Phi' .$$

Si l'inclusion précédente n'est pas vraie, on a $\mathcal{R}(\varepsilon) \subset \mathcal{R}^*(\varepsilon)$ (strictement), donc $\mathcal{R} \subset \mathcal{R}^*$.

Un endomorphisme η est <u>rationnel à gauche</u> si

$$\pi_\lambda \supseteq \pi_\eta \ \underline{\text{entraîne}} \ \exists\, \nu \in H \ \text{ tel que } \ \lambda = \nu\eta .$$

Soit Φ'' l'ensemble des endomorphismes rationnels à gauche $(\varepsilon \in \Phi'')$.

Si $\eta , \eta' \in \Phi''$, la relation $\eta \equiv \eta' \quad (\mathcal{L}^*)$, c'est-à-dire $\pi_\eta = \pi_{\eta'}$, entraîne $\eta \in (\eta'|$ et $\eta' \in (\eta|$, donc $\eta \equiv \eta' \quad (\mathcal{L})$: en tenant compte de (15), on en déduit que $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}^*$ <u>ont même restriction à</u> Φ'' :

(18) $$\mathcal{L}^*|\Phi'' = \mathcal{L}|\Phi'' .$$

D'autre part, Φ'' est <u>saturé modulo</u> $\mathcal{L}$. Soit en effet $\xi \equiv \eta \quad (\mathcal{L})$ avec $\eta \in \Phi''$. D'après l'inclusion $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}^*$, on a : $\pi_\xi = \pi_\eta$, donc l'inclusion $\pi_\varphi \supseteq \pi_\xi$ entraîne $\pi_\varphi \supseteq \pi_\eta$ d'où, puisque $\eta \in \Phi''$, $\varphi = \nu\eta$. Or, par hypothèse, $\eta \in (\xi|$, donc $\eta = \nu'\xi$, d'où $\varphi = \nu\nu' . \xi$: nous avons bien $\xi \in \Phi''$.

Il en résulte que, <u>si</u> $\eta \in \Phi''$, <u>les classes</u> $\mathcal{L}(\eta)$ <u>et</u> $\mathcal{L}^*(\eta)$ <u>vérifient l'égalité</u>:

(19) $$\mathcal{L}(\eta) = \mathcal{L}^*(\eta) \cap \Phi'' \qquad (\eta \in \Phi'') ,$$

car le premier membre, d'après ce qui précède, est contenu dans le deuxième, et si, inversement, $\xi \in \mathcal{L}^*(\eta) \cap \Phi''$, on a, d'après (18), $\xi \in \mathcal{L}(\eta)$.

Pour $\eta = \varepsilon$ $(\in \Phi'')$, $\mathcal{L}^*(\varepsilon)$ est l'ensemble Θ des endomorphismes <u>injectifs</u> et $\mathcal{L}(\varepsilon)$ l'ensemble I'' des endomorphismes <u>inversibles à gauche</u>, donc :

(19')
$$I'' = \Theta \cap \Phi'' .$$

CONSÉQUENCE. - <u>Pour que tout endomorphisme injectif soit inversible à gauche, il faut et il suffit que l'on ait</u> :

$$\Theta \subseteq \Phi'' .$$

Dans le cas contraire, $\mathcal{L}$ est strictement contenue dans $\mathcal{L}^*$.

6. Endomorphismes vectoriels (à droite, ou à gauche).

Nous dirons qu'un endomorphisme η de l'algèbre G est <u>vectoriel à droite</u> s'il existe au moins une sous-algèbre T de G telle que l'on ait :

(20)
$$\begin{cases} \mathcal{N}_\eta(T) = G \\ \mathcal{N}_\eta | T = \mathcal{E} | T . \end{cases}$$

Cette double propriété, qui ne dépend que de $\mathcal{N}_\eta$, appartient, en même temps qu'à η , à tout endomorphisme $\eta' \equiv \eta$ $(\mathcal{L}^*)$. L'ensemble Ψ' des endomorphismes vectoriels à droite est donc saturé modulo $\mathcal{L}^*$.

D'autre part, les égalités (20) signifient que chaque classe modulo $\mathcal{N}_\eta$ rencontre la sous-algèbre T et n'a avec elle qu'un élément commun : T est donc un système de représentants modulo $\mathcal{N}_\eta$ et nous avons l'isomorphisme naturel :

$$T \simeq G/\mathcal{N}_\eta .$$

Comme nous l'avons vu au § 3, les conditions (20) entraînent qu'il existe un idempotent ω tel que $\mathcal{N}_\omega = \mathcal{N}_\eta$ et $S_\omega = T$: <u>tout endomorphisme vectoriel à droite a donc même équivalence nucléaire qu'un idempotent</u> ; la <u>réciproque</u> est immédiate puisque, d'après (6') et (7'), tout idempotent ω est vectoriel à droite $(T = S_\omega)$. Finalement, nous avons :

$$\Psi' = \mathcal{L}^*(\Omega)$$

(Ω désignant l'ensemble des idempotents), d'où

$$\Psi' \supseteq \mathcal{L}(\Omega) .$$

Or, d'après la théorie des équivalences de Green ([14], [5] § 2.1) et d'après un théorème de A. H. Clifford et D. D. Miller [4], on a

$$\mathcal{L}(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega)$$

et cet ensemble est celui des <u>éléments réguliers</u> (au sens de von Neumann : un élément a d'un demi-groupe D est régulier s'il existe un élément x de D tel que $axa = a$).

Nous avons maintenant la proposition suivante.

THÉORÈME. - <u>Tout endomorphisme vectoriel à droite</u> η <u>est rationnel à droite</u>.

En composant l'isomorphisme naturel $T \simeq G/\mathcal{N}_\eta$ obtenu à partir de (20) avec l'isomorphisme canonique $G/\mathcal{N}_\eta \simeq S_\eta$ nous obtenons l'<u>isomorphisme</u>

$$\eta^* : T \simeq S_\eta$$

<u>restriction de</u> η <u>à</u> T .

Soit alors η' un endomorphisme tel que $S_{\eta'} \subseteq S_\eta$. Le composé $\eta^{*-1}\,\eta' = \xi$ est un endomorphisme de G envoyant G <u>dans</u> T , et nous avons :

$$\eta\xi = \eta^*\,\xi = \eta^*\,\eta^{*-1}\,\eta' = \eta' \;;$$

η est donc bien rationnel à droite.

Nous avons donc l'inclusion :

(21) $$\Psi' \subseteq \Phi' , \qquad (\text{d'où } \mathcal{R}^*|\Psi' = \mathcal{R}|\Psi').$$

Nous dirons qu'un endomorphisme η de l'algèbre G est <u>vectoriel à gauche</u> s'il existe au moins une congruence $\mathcal{C}$ de G vérifiant

(22) $$\begin{cases} \mathcal{C}(S_\eta) = G \\ \mathcal{C}|S_\eta = \mathcal{E}|S_\eta \end{cases} .$$

Cette double propriété ne dépend que de l'image S_η donc appartient, en même temps qu'à η , à tout endomorphisme η' congru à η modulo $\mathcal{R}^*$: l'ensemble Ψ'' des endomorphismes vectoriels à gauche est donc saturé modulo $\mathcal{R}^*$.

L'algèbre image S_η est un système de représentants modulo $\mathcal{C}$ et nous avons l'isomorphisme naturel :

$$G/\mathcal{C} \simeq S_\eta .$$

D'après (22), il existe un idempotent ω tel que l'on ait $\mathcal{N}_\omega = \mathcal{C}$ et $S_\omega = S_\eta$: <u>tout endomorphisme vectoriel à gauche a donc même image qu'un idempotent</u>. La <u>réciproque</u> est immédiate puisque tout idempotent est vectoriel à gauche $(\mathcal{C} = \mathcal{N}_\omega)$, et nous avons :

$$\Psi'' = \mathcal{R}^*(\Omega)$$

d'où

$$\Psi'' \supseteq \mathcal{R}(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega) \ :$$

<u>tout endomorphisme régulier est vectoriel à gauche</u> (<u>comme à droite</u>).

THÉORÈME. - <u>Tout endomorphisme vectoriel à gauche</u> η <u>est rationnel à gauche</u>.

En composant l'homomorphisme canonique (surjectif)

$$\gamma \ : \ G \sim G/\mathcal{C} \qquad (\pi_{\gamma} = \mathcal{C}) \ ,$$

l'isomorphisme naturel

$$\varphi \ : \ G/\mathcal{C} \simeq S_{\eta} \ ,$$

et l'isomorphisme canonique

$$\sigma \ : \ S_{\eta} \simeq G/\pi_{\eta} \ ,$$

nous obtenons un homomorphisme <u>surjectif</u>

$$\gamma' = \sigma\varphi\gamma \ : \ G \sim G/\pi_{\eta}$$

dont l'équivalence nucléaire $\pi_{\gamma'}$ contient π_{γ} :

$$\pi_{\gamma'} \supseteq \pi_{\gamma} \ .$$

Pour un élément arbitraire y de G , soient

$$Y = \gamma y \in G/\mathcal{C}$$

$$s = \varphi\gamma y \ \ \text{c'est-à-dire} \ \ \{s\} = Y \cap S_{\eta}$$

et

$$X = \sigma s = \gamma' y \in G/\pi_{\eta} \ .$$

Nous avons $s \equiv y \ \ (\pi_{\gamma}) \ \ (\pi_{\gamma} = \mathcal{C})$ et, d'après la définition de σ :

$$(\forall \ x \in X) \qquad \eta x = s \ .$$

Cela étant, si η' est un endomorphisme tel que $\pi_{\eta'} \supseteq \pi_{\eta}$, il existe un homomorphisme naturel λ de G/π_{η} <u>sur</u> $G/\pi_{\eta'}$:

$$\lambda \ : \ G/\pi_{\eta} \sim G/\pi_{\eta'}$$

(où λX est la classe X' modulo $\pi_{\eta'}$ qui contient X). Si $z = \eta' x$ et si ρ' désigne l'isomorphisme canonique

$$\rho' \ : \ G/\pi_{\eta'} \simeq S_{\eta'}$$

nous avons

$$z = \eta' x = \rho' \lambda X = \rho' \lambda \gamma' y = \xi y \qquad (z \in S_{\eta'})$$

où $\xi = \rho'\lambda\gamma'$ est un homomorphisme de G dans $S_{\eta'}$, donc un endomorphisme de G.

Or, nous avons :

$$\pi_\xi \supseteq \pi_{\gamma'} \supseteq \pi_\gamma$$

et, puisque $s \equiv y \quad (\pi_\gamma)$,

$$\xi y = \xi s$$

donc

$$\eta' x = z = \xi y = \xi s = \xi\eta x .$$

Puisque x est un élément arbitraire de X, et X un élément arbitraire de G/π_η, x est un élément arbitraire de G, et nous avons obtenu l'égalité

$$\eta' = \xi\eta$$

montrant que η est rationnel à gauche.

Nous avons donc

(23) $$\Psi'' \subseteq \Phi'' \qquad (\text{d'où } \mathcal{L}^*|\Psi'' = \mathcal{L}|\Psi'')$$

et l'inclusion $\mathcal{Q}(\Omega) \subseteq \Psi' \cap \Psi''$ entraîne

(24) $$\mathcal{Q}(\Omega) \subseteq \Phi' \cap \Phi''$$

par conséquent

(24') $$\begin{cases} \mathcal{R}^*|\mathcal{Q}(\Omega) = \mathcal{R}|\mathcal{Q}(\Omega) \\ \mathcal{L}^*|\mathcal{Q}(\Omega) = \mathcal{L}|\mathcal{Q}(\Omega) \end{cases}$$

$\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}^*$ d'une part, $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}^*$ d'autre part ont même restriction à l'ensemble $\mathcal{Q}(\Omega)$ des éléments réguliers.

CONSÉQUENCES. - Propriétés des endomorphismes réguliers.

Si une classe X^* modulo $\mathcal{R}^*$ contient un endomorphisme régulier ξ, elle contient la classe X de ξ modulo $\mathcal{R}$ et X est l'ensemble de tous les endomorphismes réguliers qui appartiennent à X^*. Une classe modulo $\mathcal{R}^*$ contient donc au plus une $\mathcal{R}$-classe d'endomorphismes réguliers.

Propriétés analogues pour $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}^*$.

Soient maintenant ξ, η deux endomorphismes réguliers appartenant à une même classe modulo $\mathcal{Q}^*$: il existe (dans cette classe) un endomorphisme λ tel que

$$S_\xi = S_\lambda \qquad \text{et} \qquad \pi_\lambda = \pi_\eta .$$

Mais la $\mathcal{R}$-classe de ξ contient un idempotent ω, qui a même image : il en résulte que λ est vectoriel à gauche. De même, la $\mathcal{L}$-classe de η contient un idempotent ω', qui a même équivalence nucléaire : il en résulte que λ est aussi vectoriel à droite ; nous dirons qu'il est vectoriel. Les idempotents ω, ω' étant eux aussi vectoriels, $S_\lambda = S_\omega$ entraîne $\lambda \equiv \omega \equiv \xi \ (\mathcal{R})$, $\pi_\lambda = \pi_{\omega'}$, entraîne $\lambda \equiv \omega' \equiv \eta \ (\mathcal{L})$, d'où finalement $\xi \equiv \eta \ (\mathcal{D})$.

Ainsi, une classe modulo $\mathcal{D}^*$ contient au plus une $\mathcal{D}$-classe d'endomorphismes réguliers (dont les images sont isomorphes).

THÉORÈME. - On a $\Phi' \cap \Psi'' = \mathcal{D}(\Omega) = \Phi'' \cap \Psi'$.

Nous avons déjà établi les inclusions $\mathcal{D}(\Omega) \subseteq \Psi' \subseteq \Phi'$, $\mathcal{D}(\Omega) \subseteq \Psi'' \subseteq \Phi''$, d'où $\mathcal{D}(\Omega) \subseteq \Phi' \cap \Psi''$, $\mathcal{D}(\Omega) \subseteq \Phi'' \cap \Psi'$.

Soit $\mu \in \Phi' \cap \Psi''$. Puisque $\mu \in \Psi'' = \mathcal{R}^*(\Omega)$, il existe un endomorphisme idempotent ω ayant même image que μ : $S_\omega = S_\mu$. D'autre part, $\omega \in \mathcal{D}(\Omega) \subseteq \Phi'$ et, par hypothèse, $\mu \in \Phi'$. Par conséquent, d'après (16), $\omega \equiv \mu \ (\mathcal{R}^*)$ entraîne $\omega \equiv \mu \ (\mathcal{R})$, d'où $\mu \in \mathcal{R}(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega)$. Ainsi, nous avons $\Phi' \cap \Psi'' \subseteq \mathcal{D}(\Omega)$, d'où l'égalité.

L'égalité $\mathcal{D}(\Omega) = \Phi'' \cap \Psi'$ s'établit d'une façon analogue.

COROLLAIRE. - On a $\Psi' \cap \Psi'' = \mathcal{D}(\Omega)$, c'est-à-dire : les notions d'endomorphisme vectoriel et d'endomorphisme régulier coïncident.

7. Epimorphismes, monomorphismes.

Soit Δ' l'ensemble des épimorphismes, c'est-à-dire des endomorphismes simplifiables à droite. Tout endomorphisme surjectif σ a cette propriété : $\Sigma \subseteq \Delta'$. Mais nous avons aussi $\Sigma = \mathcal{R}^*(\varepsilon) \subseteq \mathcal{R}^*(\Omega) = \Psi''$, d'où $\Sigma \subseteq \Delta' \cap \Psi''$.

Etablissons l'égalité, c'est-à-dire tout endomorphisme vectoriel à gauche et simplifiable à droite est surjectif, ce qui résulte du théorème suivant.

THÉORÈME. - Tout endomorphisme vectoriel à gauche η, qui n'est pas surjectif, n'est pas simplifiable à droite.

Soit $S_\eta = S_\omega$ $(\omega \in \Omega)$, avec $\eta \notin \Sigma$, donc $S_\omega \neq G$, $\omega \neq \varepsilon$. Nous avons :

$$\omega\eta = \omega^*\eta, \quad \text{où} \quad \omega^* = \omega|S_\eta = \omega|S_\omega = \varepsilon|S_\omega = \varepsilon|S_\eta,$$

d'où $\omega\eta = \eta = \varepsilon\eta$ et η n'est pas simplifiable à droite. Finalement :

$$(25') \qquad \Sigma = \Delta' \cap \Psi''.$$

Soit de même Δ'' l'ensemble des monomorphismes, c'est-à-dire des endomorphismes simplifiables à gauche. Tout endomorphisme injectif Θ a cette propriété : $\Theta \subseteq \Delta''$. Mais aussi $\Theta = \mathcal{L}^*(\varepsilon) \subseteq \mathcal{L}^*(\Omega) = \Psi'$, donc

$$\Theta \subseteq \Delta'' \cap \Psi' .$$

En fait, on a l'égalité, d'après le théorème suivant.

THÉORÈME. - Tout endomorphisme vectoriel à droite η, qui n'est pas injectif, n'est pas simplifiable à gauche.

Soit $\pi_\eta = \pi_\omega$ $(\omega \in \Omega)$ avec $\eta \notin \Theta$, donc $\pi_\eta \neq \mathcal{E}$, $\omega \neq \varepsilon$.

Puisque ω est idempotent, nous avons :

$$(\forall\ x \in G) \qquad x \equiv \omega x \quad (\pi_\omega) \quad \text{ou} \quad (\pi_\eta)$$

donc :

$$\eta x = \eta\omega x$$

c'est-à-dire

$$\eta = \eta\omega \quad \text{ou} \quad \eta\varepsilon = \eta\omega$$

ce qui établit la proposition :

$$(25'') \qquad \Theta = \Delta'' \cap \Psi' .$$

8. Eléments inversibles d'un côté.

Nous avons établi au § 5 les formules

$$(17') \quad I' = \Sigma \cap \Phi' , \qquad (19') \quad I'' = \Theta \cap \Phi'' .$$

Donnons, pour les éléments inversibles d'un côté, quelques propriétés plus précises.

Si $\rho\lambda = \varepsilon$, $\lambda\rho$ est idempotent : $\lambda\rho\lambda\rho = \lambda\varepsilon\rho = \lambda\rho$; soit $\lambda\rho = \omega$ $(\in \Omega)$. De plus :

$$\begin{cases} S_\omega = S_{\lambda\rho} = S_\lambda & \text{d'après (2')} , \\ \pi_\omega = \pi_{\lambda\rho} = \pi_\rho & \text{d'après (3')} , \end{cases}$$

d'où (§ 3) :

$$\begin{cases} \pi_\rho(S_\lambda) = \pi_\omega(S_\omega) = G \\ \pi_\rho | S_\lambda = \pi_\omega | S_\omega = \mathcal{E} | S_\omega = \mathcal{E} | S_\lambda , \end{cases}$$

et par conséquent

ρ est vectoriel à droite, $\rho \in \Psi'$ $(\subseteq \Phi')$

λ est vectoriel à gauche, $\lambda \in \Psi''$ $(\subseteq \Phi'')$

d'où

$$(17'') \quad I' = \Sigma \cap \Psi' , \qquad (19'') \quad I'' = \Theta \cap \Psi'' .$$

Notons que, d'après le théorème de A. H. Clifford et D. D. Miller ([4], [5] § 2.3), l'idempotent ω appartient à $\mathfrak{D}(\varepsilon)$.

Ces propriétés admettent les réciproques suivantes.

(a) Pour tout idempotent $\omega \in \mathfrak{D}(\varepsilon)$, il existe des endomorphismes ρ , λ tels que : $\rho\lambda = \varepsilon$, $\lambda\rho = \omega$.

Soit en effet ρ un élément quelconque de $\mathfrak{R}(\varepsilon) \cap \mathfrak{L}(\omega)$. Nous avons d'une part des égalités de la forme $\omega = \lambda\rho$, $\rho = \mu\omega$ d'où $\rho\omega = \rho$; d'autre part $\rho\nu = \varepsilon$, d'où $\omega\nu = \lambda\rho\nu = \lambda$; enfin $\rho\lambda = \rho\omega\nu = \rho\nu = \varepsilon$.

(b) Si un endomorphisme surjectif σ et un endomorphisme injectif θ vérifient les deux conditions

$$\begin{cases} (26') & \pi_\sigma(S_\theta) = G \\ (26'') & \pi_\sigma | S_\theta = \mathcal{E} | S_\theta \end{cases}$$

le produit $\sigma\theta$ est un automorphisme (donc $\sigma \in \mathfrak{R}(\varepsilon)$ et $\theta \in \mathfrak{L}(\varepsilon)$).

1° $\sigma\theta$ est surjectif. - Soit x un élément quelconque de G ; il existe $y \in G$ tel que $x = \sigma y$. D'après (26'), il existe un élément $s \in S_\theta$, $s = \theta u$, tel que $y \equiv s \quad (\pi_\sigma)$, d'où

$$x = \sigma y = \sigma s = \sigma\theta u .$$

2° $\sigma\theta$ est injectif. - Soit $\sigma\theta x_1 = \sigma\theta x_2$ ou $\theta x_1 \equiv \theta x_2 \quad (\pi_\sigma)$. Il en résulte, d'après (26''), $\theta x_1 = \theta x_2$, puis $x_1 = x_2$.

(c) Si un endomorphisme surjectif σ et un endomorphisme injectif θ sont tels que $\theta\sigma \in \Gamma_\omega = \mathcal{H}(\omega) \quad (\omega \in \Omega)$, $\sigma\theta \in A$ et $\omega \in \mathfrak{D}(\varepsilon)$.

Nous avons, par hypothèse (§ 3) :

$$\begin{cases} \pi_{\theta\sigma}(S_{\theta\sigma}) = G \\ \pi_{\theta\sigma} | S_{\theta\sigma} = \mathcal{E} | S_{\theta\sigma} \end{cases}$$

Puisque $\pi_{\theta\sigma} = \pi_\sigma$ et $S_{\theta\sigma} = S_\theta$, nous sommes ramenés à la proposition (b) ; $\omega \in \mathfrak{D}(\varepsilon)$ d'après le théorème direct.

9. Algèbres remarquables.

DÉFINITIONS. - Un endomorphisme est rationnel (resp. vectoriel) s'il est rationnel à droite et à gauche (resp. vectoriel à droite et à gauche).

Une algèbre universelle est rationnelle à droite , ... , vectorielle , ... , si tous ses endomorphismes ont la propriété en question.

Entre ces différents types d'algèbres, nous avons les implications qui résultent du § 6.

Dans une algèbre G rationnelle à droite, $\Phi' = G$, nous avons :

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}^* , \qquad I' = \Sigma .$$

Dans une algèbre G vectorielle à droite, $\Psi' = \Phi' = G$, nous avons en outre :

$$\Delta'' = \Theta .$$

De plus, dans une algèbre vectorielle, tout élément est régulier puisque

$$G = \Psi'' = \mathcal{R}^*(\Omega) = \mathcal{R}(\Omega) = \mathcal{Q}(\Omega) .$$

Les algèbres vectorielles ont donc de très bonnes propriétés. Parmi elles se trouvent évidemment les algèbres dans lesquelles, pour toute congruence $\mathcal{C}$, il existe au moins une sous-algèbre T vérifiant les relations

$$\begin{cases} \mathcal{C}(T) = G \\ \mathcal{C}|T = \mathcal{E}|T , \end{cases}$$

et, pour toute sous-algèbre T , au moins une congruence $\mathcal{C}$ vérifiant les mêmes relations. Cette double condition dans laquelle ne figurent plus que les sous-algèbres et les congruences, est vérifiée par tout ensemble, tout espace vectoriel et plus généralement par tout groupe abélien (avec opérateurs) dont chaque sous-groupe (permis) est composant direct.

Signalons enfin que toute algèbre universelle libre est vectorielle à droite (VALUCÈ, 1963, [22]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] BAER (Reinhold). - Splitting endomorphisms, Trans. Amer. math. Soc., t. 61, 1947, p. 508-516.

[2] BIRKHOFF (Garrett). - Universal algebra, Proceedings of the first canadian mathematical Congress [1945. Montreal], p. 310-326. - Toronto, The University of Toronto Press, 1946.

[3] BOURBAKI (Nicolas). - Algèbre, Chapitre 1 : Structures algébriques, 3e édition. - Paris, Hermann, 1958 (Act. scient. et ind., 1144 ; Bourbaki, 4).

[4] CLIFFORD (A. H.) and MILLER (D. D.). - Regular $\mathcal{D}$-classes in semigroups, Trans. Amer. math. Soc., t. 82, 1956, p. 270-280.

[5] CLIFFORD (A. H.) and PRESTON (G. B.). - The algebraic theory of semigroups. - Providence, American mathematical Society, 1961 (Mathematical Surveys, 7).

[6] DOSS (C. G.). - Certain equivalence relations in transformation semigroups (Thesis, University of Tennessee, 1955).

[7] DUBREIL (Paul). - Sous-groupes d'un demi-groupe, demi-groupe des endomorphismes d'un groupe, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et Théorie des nombres, t. 14, 1960/61, n° 16, 15 p.

[8] DUBREIL (Paul). - Lectures on the algebraic theory of semigroups. - New Orleans, Tulane University, 1962.

[9] DUBREIL (Paul). - Cours de la Faculté des Sciences de Paris, 1964/65 (non publié).

[10] DUBREIL (Paul). - Remarques sur les théorèmes d'isomorphisme, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 215, 1942, p. 239-241.

[11] FITTING (Hans). - Die Theorie der Automorphismenringe Abelscher Gruppen und ihr Analogon bei nicht kommutativen Gruppen, Math. Annalen, t. 107, 1933, p. 514-542.

[12] FUCHS (Laszlo). - Abelian groups. - Budapest, Publishing House of the Hungarian Academy of Science, 1958.

[13] GLUSKIN (L. M.). - Demi-groupes et anneaux d'endomorphismes des espaces vectoriels [en russe], Izv. Akad. Nauk SSSR, t. 23, 1959, p. 841-870.

[14] GREEN (J. A.). - On the structure of semigroups, Ann. of Math., t. 54, 1951, p. 163-172.

[15] HIGGINS (P. J.). - Groups with multiple operators, Proc. London math. Soc., Series 3, t. 6, 1956, p. 366-416.

[16] HUKUHARA (Masuo). - Théorie des endomorphismes de l'espace vectoriel, J. Fac. Sc. Univ. Tokyo, Section 1, t. 7, 1954-1958, p. 129-192 et p. 305-332.

[17] KUROŠ (A. G.). - The theory of groups. Translated from the Russian by K. A. Hirsch. Vol. 1 and 2. - New York, Chelsea Publishing Company, 1955-1956.

[18] KUROŠ (A. G.). - Lectures on general algebra. Translated from the Russian by K. A. Hirsch. - New York, Chelsea Publishing Company, 1963.

[19] RAMALHO (Margarita). - Sur quelques théorèmes de la théorie des groupes, Revista Fac. Ciências, Lisboa, 2e Série, A, t. 8 , 1960, p. 333-337.

[20] SPECHT (Wilhelm). - Gruppentheorie. - Berlin, Springer-Verlag, 1956 (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 82).

[21] SZÁSZ (Gábor). - Einführung in die Verbandstheorie. - Budapest, Verlag der Ungarischen Akademie der Wissenschaften, 1962.

[22] VALUCÈ (I. I.). - Idéaux à gauche du demi-groupe des endomorphismes d'une algèbre universelle libre [en russe], Dokl. Akad. Nauk SSSR, t. 150, 1963, p. 235-237 ; Mat. Sbornik, Novaja Serija, t. 62, 1963, p. 371-384.