Günter Pickert

Algebraische Methoden in der Theorie der projektiven Ebenen

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 18, n° 2 (1964-1965), exp. n° 21, p. 1-14

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1964-1965__18_2_A2_0>

ALGEBRAISCHE METHODEN IN DER THEORIE DER PROJEKTIVEN EBENEN (*)

von Günter PICKERT

Unter einer projektiven Ebene versteht man ein Paar bestehend aus einer Menge, deren Elemente Punkte genannt verden, und einer Menge von Teilmengen, Geraden genannt, dieser Menge, wobei die folgenden Bedingungen erfüllt sein müssen :

(1) Zu je zwei Punkten gibt es genau eine Gerade, der beide Punkte angehören.

(2) Zu je zwei Geraden gibt es einen Punkt, der beiden angehört.

(3) Es gibt vier Punkte, von denen keine drei derselben Geraden angehören.

Die nach (1) zu verschiedenen Punkten P , Q bestimmte Verbindungsgerade wird im folgenden mit PQ bezeichnet, der nach (2) vorhandene und nach (1) eindeutig bestimmte Schnittpunkt der verschiedenen Geraden d , e mit $d \cap e$. Lässt man eine Gerade und die ihr angehörenden Punkte weg, so entsteht aus der projektiven Ebene eine affine Ebene. Die affinen Ebenen lassen sich in derselben Weise wie die projektiven Ebenen kennzeichnen, indem man (1) beibehält, statt (3) nur die Existenz von drei nichtkollinearen (d. h. nicht derselben Geraden angehörenden) Punkten fordert und (2) ersetzt durch die Forderung der Existenz genau einer Parallelen zu einer Geraden durch einen Punkt (dabei heissen Geraden parallel, wenn sie gleich oder punktfremd sind). Eine projektive Ebene heisst endlich, wenn sie nur endlich viele Punkte besitzt ; die um 1 verminderte Anzahl der Punkte auf einer (und damit auf jeder) ihrer Geraden wird als die Ordnung der Ebene bezeichnet. Automorphismen einer projektiven Ebene sind solche Permutationen der Menge der Punkte, bei denen die Geraden wieder in Geraden übergehen ; man nennt sie die Kollineationen der Ebene und bezeichnet demgemäss die aus ihnen bestehende Permutationsgruppe als die Kollineationsgruppe der Ebene.

Der riesige, unübersehbare Bereich der projektiven Ebenen wird durch Hinzunahme von geeigneten Bedingungen eingeengt und damit einer aussichtsreicheren Untersuchung zugänglich. Derartige Bedingungen sind einmal Inzidenzbedingungen (auch : Inzidenzsätze, Konfigurationstheoreme, Schliessungssätze), die - wie z. B. die Desargues-, Pappos-, Reidemeister-Bedingung - verlangen, dass aus der Zugehörigkeit gewisser Punkte zu gewissen Geraden (die man auch als Inzidenz der Punkte mit den Geraden bezeichnet) eine weitere Zugehörigkeitsaussage folgt. Zum andern sind es Transiti-

---

(*) Un résumé, en français, figure à la suite de l'exposé en allemand.

vitätsbedingungen, die die Transitivität der Kollineationsgruppe oder gewisser Untergruppen von ihr auf gewissen Mengen geometrischer Figuren (Mengen oder Familien aus Punkten und Geraden) verlangen. Bezüglich solcher zusätzlicher Bedingungen kann man in der Theorie der projektiven Ebenen zwei Hauptaufgaben formulieren :

(I) Es sind logische Beziehungen zwischen den verschiedenen Bedingungen aufzufinden.
(II) Es sind Ebenen anzugeben, die gewissen Bedingungen genügen, bzw. nicht genügen.

Ein wichtiges Beispiel zu (I) ist der Satz (BAER [1]) : Die Desargues-Bedingung mit dem Punkt C als Zentrum und der Geraden a als Achse ist gleichbedeutend mit der (C , a)-Transitivität ; dabei bedeutet (C , a)-Transitivität, dass die Gruppe der (C , a)-Kollineationen (d. s. diejenigen Kollineationen, bei denen alle Geraden durch C und alle Punkt auf a festbleiben) transitiv ist auf den von C verschiedenen, nicht auf a liegenden Punkten einer (und damit jeder) Geraden $\neq$ a durch C .

Mit diesem Satz wird eine Inzidenzbedingung in eine Transitivitätsbedingung übersetzt und so gruppentheoretischen Methoden zugänglich gemacht. Wie weit man in dieser Richtung gekommen ist, zeigt vielleicht am besten der Satz (OSTROM und WAGNER [11]) : Bei endlicher projektiver Ebene folgt die Desargues-Bedingung aus der zweifachen Transitivität der Kollineationsgruppe. Der wesentliche Beweisgedanke lässt sich folgendermassen andeuten. Zuerst zeigt man, dass die Ordnung der Ebene die Potenz einer Primzahl p sein muss (was leider noch nicht für geliebige endliche Ebenen bewiesen werden konnte). Dann bildet man zu je zwei beliebigen Geraden die Gruppe der sie festlassenden Kollineationen, zu dieser Gruppe eine p-Sylowgruppe und wählt in dieser ein Zentrumselement der Ordnung p . Dieses erweist sich dann als (C , a)-Kollineation für ein Paar (C , a) . Mittels genügend vieler solcher Kollineationen gewinnt man dann die (C , a)-Transitivität für alle Paare (C , a) und damit die Desargues-Bedingung.

Bei diesem Schluss ist es allerdings wesentlich, dass man wegen der Endlichkeit der Ebene die (C , a)-Transitivität nur für $C \in a$ nachzuweisen braucht : Es gilt nämlich (LEVI [6]) : Bei endlicher Ebene folgt die Desargues-Bedingung bereits aus der kleinen Desargues-Bedingung (d. i. die durch Hinzunahme der Inzidenz von Zentrum und Achse zur Voraussetzung entstehende Inzidenzbedingung). Für diesen Satz kennt man keinen rein gruppentheoretischen, allein mit der Kollineationsgruppe arbeitenden Beweis. Man verwendet vielmehr ein anderes Verfahren um zu algebraischen Strukturen zu gelangen. Der Vorteil solcher algebraischer Strukturen liegt darin, dass in ihnen die Verknüpfungen (lois de compositions) überall definiert sind, während in einer projektiven Ebene die Bildung von Schnittpunkt und Verbindungsgerade nur bei Paaren verschiedener Geraden, bzw. Punkte, möglich ist. Wie weiter unten dargestellt, führt man einen Koordinatenbereich ein, dem man mit Hilfe der Geraden eine algebraische Struktur gibt. Dieser Koordinatenbereich ist genau bei den desarguesschen Ebenen (also bei den projektiven Ebenen mit Desargues-Bedingung) ein Körper, während er sich unter Voraussetzung lediglich der kleinen Desargues-Bedingung als Alternativkörper (d. h. das Assoziativgesetz der Multiplikation ist zu

$$a(ab) = a^2 b , \qquad (ba)a = ba^2$$

abgeschwächt) ergibt. Aus dem Satz von Artin über die Assoziativität eines aus zwei Elementen erzeugten Alternativrings und der Tatsache, dass jeder endliche Körper von einem Element erzeugt wird, folgt nun, dass ein endlicher Alternativkörper ein Körper sein muss.

Um allgemein in einer projektiven Ebene (ohne jede Zusatzbedingung) Koordinaten einzuführen, wählt man ein nach (3) vorhandenes Punktquadrupel O , U , V , E und nimmt die Menge $\mathcal{C}$ der Geraden $\neq UV$ durch U als Koordinatenbereich bezüglich O , U , V , E . Die durch Weglassen von UV (und der Punkte dieser Geraden) entstehende affine Ebene wird nun durch

$$P \longrightarrow ((PV \cap OE)U , PU)$$

umkehrbar auf $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ abgebildet ; das dabei dem Punkt P zugeordnete Element von $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ heisst das Koordinatenpaar von P . Die Geraden $(\neq UV)$ durch V gehen dabei (als Punktmengen der affinen Ebene) in die Mengen

$$\{(x , y) \mid x = c , \; y \in \mathcal{C}\} \qquad (c \in \mathcal{C})$$

über. Um auch das Bild jeder anderen Geraden d mit $V \notin d$ einfach beschreiben zu können, wird in $\mathcal{C}$ eine ternäre Verknüpfung T folgendermassen eingeführt und $(\mathcal{C} , T)$ dann als Ternärkörper bezüglich O , U , V , E (auch : Ternärring, Ternar) bezeichnet : u , v seien die zweiten Koordinaten der Schnittpunkte der Parallelen zu d durch O mit EV sowie der Geraden d mit OV ; $T(u , x , v)$ bedeute die zweite Koordinate desjenigen Punktes von d , der x als erste Koordinate hat. Durch die Koordinatendarstellung geht d dann in

$$\{(x , y) \mid y = T(u , x , v) , \; x \in \mathcal{C}\}$$

über. Schreibt man o und 1 statt OU und EU , so hat T die folgenden Eigenschaften :

(4) $o \neq 1$; $T(o , u , v) = v = T(u , o , v)$, $T(u , 1 , o) = u = T(1 , u , o)$ für alle $u , v \in \mathcal{C}$.

(5) Wenn $u , x , v , v' \in \mathcal{C}$, $T(u , x , v) = T(u , x , v')$, so $v = v'$.

(6) Zu $u , u' , v , v' \in \mathcal{C}$ mit $u \neq u'$, $v \neq v'$ gibt es $x \in \mathcal{C}$ mit $T(u , x , v) = T (u' , x , v')$.

Im endlichen Fall kennzeichnen (4-6) die Ternärkörper (siehe z. B. PICKERT [14]), während ohne Endlichkeitsvoraussetzung weitere Bedingungen hinzutreten (HALL [3] ; für die hier gewählte Darstellung, siehe PICKERT [12]).

Man definiert in $\mathcal{C}$ Addition und Multiplikation durch

(7) $x + v = T(1 , x , v)$,

(8) $ux = T(u , x , o)$;

$(\mathcal{C} , +)$ und $(\mathcal{C}-\{o\} , .)$ sind dann Loops, d. h. Quasigruppen mit den neutralen Elementen o , bzw. 1 . In dem wichtigen Sonderfall der Linearität

(9) $T(u , x , v) = ux + v$ für alle $u , x , v \in \mathcal{C}$,

kann man mit $(\mathcal{C} , + , .)$ statt mit $(\mathcal{C} , T)$ arbeiten. Ist dann die Addition noch assoziativ, d. h. $(\mathcal{C} , +)$ Gruppe, so bezeichnet man $(\mathcal{C} , + , .)$ als cartesische Gruppe ("cartesian number system" bei BAER [1]). Bei einer solchen ist (5) wegen (7) eine unmittelbare Folge der Gruppeneigenschaft, während (6) sich reduziert auf :

(6') Zu $u , u' , v \in \mathcal{C}$ mit $u \neq u'$, $v \neq o$ gibt es $x \in \mathcal{C}$ mit $ux - u'x = v$.

Für die Übersetzung von (C , a)-Transitivitäten in algebraische Eigenschaften des Ternärkörpers hat man den Satz (BAER [1]) : Dass der Ternärkörper bezüglich O , U , V , E cartesische Gruppe ist, besagt die (V , UV)-Transitivität. Der Beweis sei als Beispiel für das Arbeiten mit Koordinaten ausgeführt ; dabei werden der Einfachheit halber die Punkte mit ihren Koordinatenpaaren identifiziert. Eine (V , UV)-Kollineation φ bildet $\mathcal{C}$ auf sich ab, und es gilt

$$(x, y)^{\varphi} = (x, y^{\varphi}) \ , \quad \{(x, y) \mid y = T(u, x, v)\}^{\varphi} = \{(x, y) \mid y = T(u, x, v^{\varphi})\} .$$

Daraus folgt

(10) $T(u , x , v)^{\varphi} = T(u , x , v^{\varphi})$ für alle $u , x , v \in \mathcal{C}$.

Man erkennt leicht, dass umgekehrt jede Permutation φ von $\mathcal{C}$ mit (10) die Einschränkung $(x , y) \rightarrow (x , y^{\varphi})$ einer (V , UV)-Kollineation auf die affine Ebene ergibt. Mit $u = 1$ gibt (10) wegen (7)

(11) $(x + v)^{\varphi} = x + v^{\varphi}$.

Setzt man $o^{\varphi} = c$, so wird daraus

(12) $x^{\varphi} = x + c$.

Da wegen der (V , UV)-Transitivität zu jedem $c \in \mathcal{C}$ eine (V , UV)-Kollineation φ mit $c^{\varphi} = c$ existiert, ergibt (11) mittels (12) die Assoziativität der Addition, während (10) für $v = o$ mittels (12) und (8) zu (9) wird. Umgekehrt bilden die nach (12) zu definierenden Abbildungen φ bei assoziativer Addition eine auf C transitive Permutationsgruppe, und aus (12), (9) sowie der Assoziativität der Addition folgt wieder (10).

Nach demselben Verfahren ergibt sich (GINGERICH [2]) die Gleichwertigkeit der (U, OV)-Transitivität mit Assoziativität der Multiplikation und Linearität.

Mittels Koordinatendarstellung liefern Ergebnisse von SKORNJAKOV ([18]), KLEINFELD ([5]) und SAN SOUCIE ([17]) den Satz : Gibt es in einer projektiven Ebene eine Gerade d derart, dass die Ebene (C, a)-transitiv ist für alle inzidenten Paare (C, a) mit $C \in d$, so erfüllt die Ebene die kleine Desargues-Bedingung.

Ebenfalls mit Koordinaten konnte SPENCER ([19]) beweisen : Gibt es in einer projektiven Ebene drei Punkte P, Q, R und drei Geraden p, q, r mit

$$R = p \cap q \in PQ = r$$

derart, dass die Ebene (P, p)-, (Q, q)- und (R, r)-transitiv ist, so erfüllt die Ebene die Desargues-Bedingung. Da genau bei den desarguesschen Ebenen der Ternärkörper ein Körper ist, folgt aus diesem Satz die folgende Kennzeichnung der Körper (PICKERT [13]) : Gruppe bezgl. der Addition, die nach Wegnahme der 0 Gruppe bezgl. der Multiplikation und nach Wegnahme der 1 Gruppe bezgl. der Verknüpfung $(a, b) \longrightarrow a - ab + b$ ist. Die dritte Gruppe wird ja bei einem Körper durch $a \longrightarrow 1 - a$ isomorph auf die multiplikative Gruppe abgebildet. Beim Beweis des Spencerschen Satzes erhält man sie, wenn man nach Wahl von $0 \neq R$ auf p die Multiplikation im Ternärkörper bezgl. $q \cap OP$, Q, R, 0 geeignet in den Ternärkörper bezgl. 0, P, R, $q \cap OQ$ überträgt.

Mit gruppentheoretischen Methoden konnte LÜNEBURG [7] zeigen, dass bei endlichen Ebenen ungerader Ordnung im Spencerschen Satz die Voraussetzung der (R, r)-Transitivität unnötig ist. Die Gruppe der (P, p)-Kollineationen hat wegen $P \notin p$ gerade Ordnung, so dass die 2-Sylowgruppen verwandt werden können ; ferner lässt sich ein Satz von SUZUKI ([20]) über zweifach transitive Gruppen anwenden, da sich die von den (P, p)- und (Q, q)-Kollineationen erzeugte Gruppe als zweifach transitiv auf $r-\{R\}$ erweist.

Ebenfalls auf gruppentheoretischem Wege bewies LÜNEBURG, [8] : Gibt es in einer endlichen projektiven Ebene gerader Ordnung drei nichtkollineare Punkte P, Q, R derart, dass die Ebene (P, PR)-, (Q, QR)- und (R, PQ)-transitiv ist, so erfüllt sie die Desargues-Bedingung ; die Voraussetzung der (R, PQ)-Transitivität wird dabei überflüssig, falls die Ordnung der Ebene gerade und kein Quadrat oder aber $\equiv 3 \mod 4$ ist. Für den Beweis ist wesentlich, dass die von den (P, PR)-

und (Q, QR)-Kollineationen erzeugte Gruppe von gerader Ordnung und zweifach transitiv auf PQ ist. Aus der Geradheit der Ebenenordnung folgert man, dass bei einer involutorischen (C, a)-Kollineation $C \in a$ sein muss. Man vermutet, dass in den Lüneburgschen Ergebnissen die Voraussetzungen über die Ordnung der Ebene, abgesehen von der Endlichkeit, überflüssig sind. Zu dem ersten Ergebnis ist auch kein unendliches Gegenbeispiel bekannt, wohl aber zu dem zweiten (YAQUB [21]).

Als Beispiele zur Hauptaufgabe (I) sind hier mit einer Ausnahme nur solche ausgewählt, die sich mit Beziehungen zwischen (C, a)-Transitivitäten und der Desargues-Bedingung, bzw. der kleinen Desargues-Bedingung, befassen. Auf die Darstellung von Ergebnissen, die andere Inzidenz- und Transitivitätsbedingungen betreffen, muss hier verzichtet werden. Doch soll die Hauptaufgabe (II) nicht ganz ohne Beispiele bleiben. Es sei $(\mathcal{C}, +, .)$ ein endlicher <u>Linksfastkörper</u> (d. h. von der Körperaxiomen ist lediglich das Rechtsdistributivgesetz $a(b+c) = ab + ac$ verletzt) der Ordnung q^2 mit dem Körper $(\mathcal{K}, +, .)$ der Ordnung q als Zentrum. Nach ZASSENHAUS [22] erhält man alle diese Linksfastkörper, abgesehen von drei Ausnahmetypen mit $q = 11, 23, 59$, durch die folgende Konstruktion (Siehe hierzu auch ROSATI [16]) : Man nimmt für eine Potenz q einer ungeraden Primzahl das Galoisfeld der Ordnung q^2, behält dessen Addition bei, ändert jedoch das Produkt der Elemente a, b zu $a^q b$ ab, falls b kein Quadrat ist (andernfalls behält man es bei). OSTROM [9] hat für die <u>Hughes-Ebene</u> über $\mathcal{C}$ (HUGHES [4]) den Ternärkörper $(\mathcal{C}, T)$ folgendermassen bestimmt :

(13) $T(u, x, v) = ux + v$ für $x, v \in \mathcal{C}$, $u \in \mathcal{K}$;

(14) $T(u, x, ua + b) = u(x + a) + b$ für $x \in \mathcal{C}$, $u \in \mathcal{C}-\mathcal{K}$, $a, b \in \mathcal{K}$.

Die Addition und Multiplikation nach (7), (8) sind dann gerade die so bezeichneten Verknüpfungen in $(\mathcal{C}, +, .)$. Dass eine durch (13), (14) definierte Verknüpfung T wirklich $\mathcal{C}$ zu einem Ternärkörper macht, stellt man (unabhängig von der Ostromschen Herleitung) leicht durch Nachprüfen von (4-6) fest. Nichttrivial sind dabei lediglich (5), (6) im Falle $u \in \mathcal{C}-\mathcal{K}$. Hierfür braucht man dann die folgende Feststellung : Zu $u \in \mathcal{C}-\mathcal{K}$, $u' \in \mathcal{C}$, $a \in \mathcal{K}-\{o\}$, $b \in \mathcal{K}$ gibt es genau im Falle $u \neq u'$ ein $x \in \mathcal{C}$ mit

(15) $u(x + a) + b = u'x$.

Zum Beweis formt man (15) der Reihe nach gleichwertig um zu

$$u(x + a) + ba^{-1}(x + a) = (u' + ba^{-1})x ,$$

$$(u + ba^{-1})(x + a) = (u' + ba^{-1})x ,$$

$$x + a = vx ,$$

$$a = (v - 1)x ,$$

wobei $v = (u + ba^{-1})^{-1}(u' + ba^{-1})$ (vorhanden wegen $u \notin \mathcal{K}$, $ba^{-1} \in \mathcal{K}$) gesetzt ist. Wegen $a \neq o$ gibt es somit genau dann ein $x \in \mathcal{C}$ mit (15), wenn $v \neq 1$, also $u \neq u'$ gilt.

Da $(\mathcal{C}, +, \cdot)$ kein Körper ist, kann nicht für alle $u, t \in \mathcal{C}-\mathcal{K}$ und alle $a, c \in \mathcal{C}$ gelten : $u(ct + a) = uct + ua$. Aus (14) (mit $x = ct$) folgt daher die Ungültigkeit von (9). Nach den Sätzen von Baer und Gingerich (S. 21-04 und 21-05 ist daher eine Hughes-Ebene weder (V, UV)- noch (U, OV)-transitiv. Die Bestimmung der Kollineationsgruppe durch ROSATI [15] zeigt darüber hinaus : <u>Eine Hughes-Ebene ist für jedes Paar</u> (C, a) <u>nicht</u> (C, a)-<u>transitiv</u>.

Nach OSTROM [9] erhält man aus einem Linksfastkörper $(\mathcal{C}, +, \cdot)$ der oben beschriebenen Art eine cartesische Gruppe, indem man nach Wahl eines Elementes $j \in \mathcal{C}-\mathcal{K}$ die Multiplikation durch die folgendermassen definierte Verknüpfung $\star$ ersetzt : Für alle $a, b, x, y, x', y' \in \mathcal{K}$

$$(a + bj) \star (x + yj) = x' + y'j$$

genau dann, wenn

$$ax = x', \quad ay = y' \qquad \text{im Falle } b = o$$

und

$$(16) \qquad b^{-1}(a + j)(y' + yj) = x' + xj \qquad \text{im Falle } b \neq o .$$

Dies wird bei OSTROM durch eine Abänderung der Hughes-Ebene bewiesen. Es sei im folgenden ein rein algebraischer Beweisgang beschrieben. Zuerst einmal muss gezeigt werden, dass durch (16) die x', y' eindeutig bestimmt sind :

- Im Falle $y = o$ ergibt sich $x' = ax$, $y' = bx$;
- im Falle $x = o$ sind x', y' aus $y' + yj = x'b(a + j)^{-1}$ zu bestimmen ;
- im Falle $x, y \neq o$ schliesslich lässt sich (16) mit

$$x'' = x'x^{-1}, \quad y'' = y'y^{-1}, \quad w = (bx)^{-1}y(a + j) - 1$$

umformen zu $y'' + j = (x'' - y'')w^{-1}$, woraus die eindeutige Bestimmtheit der x'', y'' und damit der x', y' leicht zu erkennen ist. Da (4) trivialerweise erfüllt ist, braucht man nur noch (6') nachzuweisen und zwar offenbar nur im Falle $u = a + bj$ mit $b \neq o$. Ist dann $u' \in \mathcal{K}$, so bestimmt man $r, s, c, d, c', d' \in \mathcal{K}$ derart, dass

$$(u' + j)^{-1} = r + sj, \quad v = c + dj, \quad u \star v = c' + d'j .$$

Mit

$$x = sc' - rc, \quad y = sd' - rd, \qquad x' = c + u'x, \quad y' = d + u'y,$$

also

$$x + yj = s(u \star v) - rv \,, \qquad x' + y'j = v + u'(x + yj)$$

und der Abkürzung $b^{-1}(a + j) = w$ erhält man dann wegen (16) (mit c , d , c' , d' statt x , y , x' , y') :

$$\begin{aligned} w(y' + yj) &= w(d + y(u' + j)) = w(d(u' + j)^{-1} + y)(u' + j) \\ &= ws(d' + dj)(u' + j) = s(c' + cj)(u' + j) \\ &= (x + rc + scj)(u' + j) = x(u' + j) + c \\ &= x' + xj \,. \end{aligned}$$

Damit hat man (16), d. h. $u \star (x + yj) = x' + y'j$, also

$$u \star (x + yj) - u' \star (x + yj) = v \,.$$

Damit ist (6') für $u' \in \mathcal{K}$ nachgewiesen. Im Falle $u' \in \mathcal{C}\text{-}\mathcal{K}$ setzt man $u' = a' + b'j$ mit a' , $b' \in \mathcal{K}$ sowie $w' = b'^{-1}(a' + j)$. Für x , y , x' , $y' \in \mathcal{K}$ und mit w , c , d wie oben ergibt sich dann das Gleichungspaar

$$u \star (x + yj) = x' + y'j \,, \qquad u \star (x + yj) - u' \star (x + yj) = v$$

als gleichwertig mit dem aus (16) und

$$w(y' + yj) - w'(y' + yj - d) = c \tag{17}$$

bestehenden Gleichungspaar. Da $u \neq u'$ nun $w \neq w'$ nach sich zieht, zeigt der Vergleich mit (15) die Existenz von y , $y' \in \mathcal{K}$ mit (17). Damit ist (6') auch in diesem Fall nachgewiesen.

Nach dem Baerschen Satz (S. 21-04) sind die so aus gewissen Linksfastkörpern zu gewinnenden Ostrom-Ebenen (V , UV)-transitiv. Nach OSTROM [10] gilt sogar : Eine Ostrom-Ebene einer Ordnung > 9 , die mit einem nicht zu einem Ausnahmetyp gehörenden Linksfastkörper gebildet wird, ist (C , a)-transitiv nur für C = V , a = UV. Bei $q = 3$ dagegen stimmen die Multiplikationen $\star$ und $\bullet$ überein : Die Ostrom-Ebene ist dann die Ebene über dem Linksfastkörper und als solche z. B. auch noch (U , OV)-transitiv.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] BAER (Reinhold). - Homogeneity of projective planes, Amer. J. Math., Bd 64, 1942, S. 137-152.

[2] GINGERICH (Hugh F.). - Generalized fields and Desargues configurations. Abstract of a Thesis, 12 S. - Urbana, University of Illinois, 1945.

[3] HALL (Marshall). - Projective planes, Trans. Amer. math. Soc., Bd 54, 1943, S. 229-277.

[4] HUGHES (D. R.). - A class of non-desarguesian projective planes, Canadian J. Math., Bd 9, 1957, S. 378-388.

[5] KLEINFELD (Erwin). - Right alternative rings, Proc. Amer. math. Soc., Bd 4, 1953, S. 939-944.

[6] LEVI (Friedrich W.). - Finite geometrical systems. - Calcutta, University of Calcutta, 1942.

[7] LÜNEBURG (Heinz). - Endliche projektive Ebenen von Lenz-Barlotti typ I-6, Abh. math. Semin. Univ. Hamburg, Bd 27, 1964, S. 75-79.

[8] LÜNEBURG (Heinz). - Charakterisierungen der endlichen desarguesschen projektiven Ebenen, Math. Z., Bd 85, 1964, S. 419-450.

[9] OSTROM (Theodore G.). - Semi-translation planes, Trans. Amer. math. Soc., Bd 111, 1964, S. 1-18.

[10] OSTROM (Theodore G.). - Finite planes with a single (p, L)-transitivity, Arch. der Math., Bd 15, 1964, S. 378-384.

[11] OSTROM (T. G.) and WAGNER (A.). - On projective and affine planes with transitive collineation groups, Math. Z., Bd 71, 1959, S. 186-199.

[12] PICKERT (Günter). - Projektive Ebenen. - Berlin, Springer-Verlag, 1955 (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 80).

[13] PICKERT (Günter). - Eine Kennzeichnung desarguesscher Ebenen, Math. Z., Bd 71, 1959, S. 99-108.

[14] PICKERT (Günter). - Koordinatenbereiche von Semitranslationsebenen, Math. Z., Bd 87, 1965, S. 62-70.

[15] ROSATI (Luigi A.). - I gruppi di collineazioni dei piani di Hughes, Boll. Un. mat. ital., Serie 3, Bd 13, 1958, S. 505-513.

[16] ROSATI (Luigi A.). - Unicità e autodualità dei piani di Hughes, Rend. Sem. mat. Univ. Padova, Bd 30, 1960, S. 316-327.

[17] SAN SOUCIE (R. L.). - Right alternative division rings with characteristic two, Proc. Amer. math. Soc., Bd 6, 1955, S. 291-296.

[18] SKORNJAKOV (L. A.). - Rechtsalternativkörper [en russe], Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat., Bd 15, 1951, S. 177-184.

[19] SPENCER (Jill C. D.). - On the Lenz-Barlotti classification of projective planes, Quart. J. Math., Bd 11, 1960, S. 241-257.

[20] SUZUKI (Michio). - A class of doubly transitive permutation groups, Proceedings of the International Congress of Mathematicians [1962. Stockholm]; S. 285-287. - Djursholm, Institut Mittag-Leffler, 1963.

[21] YAQUB (Jill C. D. S.). - On projective planes of class III, Arch. der Math., Bd 12, 1961, S. 146-150.

[22] ZASSENHAUS (Hans). - Über endliche Fastkörper, Abd. math. Sem. Univ. Hamburg, Bd 11, 1936, S. 187-220.

RÉSUMÉ en français,

rédigé par Jean-Claude PETIT

Un plan projectif est un couple constitué par un ensemble $\mathcal{P}$ de <u>points</u>, et une famille de sous-ensembles de $\mathcal{P}$, les <u>droites</u>, vérifiant les conditions suivantes :

(1) Deux points distincts quelconques appartiennent à une et une seule droite.
(2) Deux droites distinctes quelconques ont au moins un point commun.
(3) Il existe quatre points dont trois quelconques n'appartiennent pas à une même droite.

En supprimant une droite du plan projectif et ses points, on obtient une géométrie plane affine dans laquelle deux droites sont dites parallèles si elles sont confondues ou sans point commun.

Un plan projectif est dit <u>fini</u> lorsqu'il n'a qu'un nombre fini de points ; il a alors le même nombre $n + 1$ de points sur chaque droite, n est <u>l'ordre</u> du plan. Une permutation de $\mathcal{P}$, dans laquelle l'image de toute droite est une droite, est une <u>collinéation</u> du plan projectif. Leur ensemble constitue le <u>groupe des collinéations</u> du plan.

On restreint et on enrichit le domaine des plans projectifs en imposant des conditions supplémentaires :

- <u>Conditions d'incidence</u> (DESARGUES - PAPPOS - REIDEMEISTER) qui permettent de déduire de certaines incidences de points et de droites (" P et d incidents" signifie $P \in d$) certaines autres incidences.
- <u>Conditions de transitivité</u> de certains sous-groupes de collinéations sur certains sous-ensembles de points.

Il se pose alors deux problèmes fondamentaux :

(I) Recherche des liens logiques entre les diverses conditions ;
(II) Existence de plan satisfaisant à des conditions données.

Une illustration importante de (I) est donnée par le théorème (BAER [1]) :

<u>La condition de Desargues, avec</u> C <u>pour centre et</u> a <u>pour axe, équivaut à la</u> $(C\ ,\ a)$-<u>transitivité</u>, où la $(C\ ,\ a)$-transitivité signifie que le groupe des collinéations, laissant invariant toutes les droites passant par C et tous les points de a ($(C\ ,\ a)$-collinéations), est transitif sur les points différents de C n'appartenant pas à a, et situés sur une droite distincte de a et passant par C.

On traduit ainsi une propriété d'incidence en langage de la théorie des groupes ; on obtient de même (OSTROM et WAGNER [11]) :

Dans un plan projectif fini, la condition de Desargues résulte de la double transitivité du groupe des collinéations.

Il suffit pour cela de prouver la validité de la petite condition de Desargues, car (LEVI [6]) : Dans un plan fini la condition de Desargues résulte de la petite condition de Desargues (c'est-à-dire de la condition de Desargues dans laquelle le centre et l'axe sont incidents).

Une autre façon de faire intervenir des structures algébriques est d'introduire un système de coordonnées muni de lois de composition internes :

- la structure de corps caractérise ainsi le cas des plans arguésiens ;
- la structure de corps alternatif caractérise la validité de la petite condition de Desargues (on remplace l'associativité de la multiplication d'un corps par l'associativité restreinte : $a(ab) = a^2 b$, $(ba)a = ba^2$).

Soient O , U , V , E quatre points du plan dont trois quelconques ne sont pas collinéaires. On prend comme coordonnées relativement à O , U , V , E l'ensemble $\mathcal{C}$ des droites passant par U et distinctes de UV . On définit une bijection de $\mathcal{P} - UV$ sur $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ en posant :

$$P \longrightarrow ((PV \cap OE)U , PU) ,$$

où AB désigne la droite joignant A et B . On peut ainsi caractériser un point de la géométrie plane affine, obtenue par suppression de UV , à l'aide de son abscisse et de son ordonnée.

Dans cette bijection, une droite différente de UV et passant par V devient :

$$\{(x , y) \mid x = c , \ y \in \mathcal{C}\} \subset \mathcal{C} \times \mathcal{C} \qquad (c \in \mathcal{C}) .$$

Une droite d ne passant pas par V donne de même :

$$\{(x , y) \mid y = T(u , x , v) , \ x \in \mathcal{C}\} ,$$

où $T(u , x , v)$ désigne l'ordonnée du point d'abscisse x sur la droite d , u l'ordonnée de $d' \cap EV$, si d' est la parallèle à d menée par O , et v l'ordonnée du point $d \cap OV$. T est une loi de composition ternaire dans $\mathcal{C}$, et $(\mathcal{C} , T)$ est le corps ternaire relatif à O , U , V , E . En notant OU par o et EU par 1 , on obtient pour T les propriétés :

(4) $o \neq 1$; $T(o , u , v) = v = T(u , o , v)$, $T(u , 1 , o) = u = T(1 , u , o)$, $\forall\, u , v \in \mathcal{C}$.

(5) u, x, v, v' désignant des éléments de $\mathcal{C}$, $T(u, x, v) = T(u, x, v')$ implique $v = v'$.

(6) Pour $u \neq u'$ et $v \neq v'$, il existe $x \in \mathcal{C}$ tel que $T(u, x, v) = T(u', x, v')$.

Dans le cas fini, ces propriétés caractérisent les corps ternaires (cf. par exemple PICKERT [14]), sinon d'autres propriétés s'y ajoutent.

On définit dans $\mathcal{C}$ une addition et une multiplication par :

(7) $x + v = T(1, x, v)$,

(8) $ux = T(u, x, o)$.

$(\mathcal{C}, +)$ et $(\mathcal{C}-\{o\}, .)$ sont alors des boucles, c'est-à-dire des quasi-groupes avec élément neutre (respectivement o et 1).

Dans le cas particulier important de la linéarité, où

(9) $T(u, x, v) = ux + v$, $\forall\, u, x, v \in \mathcal{C}$,

si l'addition est associative, $(\mathcal{C}, +, .)$ est un groupe cartésien. (5) résulte alors de la structure de groupe pour $+$ et (6) se réduit à :

(6') Pour $u \neq u'$, $v \neq o$, il existe $x \in \mathcal{C}$ tel que $ux - u'x = v$.

On a le critère (BAER [1]) : Le corps ternaire relatif à O, U, V, E est un groupe cartésien si et seulement si on a la (V, UV)-transitivité. On établit ce résultat en montrant que toute (V, UV)-collinéation s'obtient à l'aide d'une bijection φ de $\mathcal{C}$ vérifiant

(10) $$T(u, x, v)^{\varphi} = T(u, x, v^{\varphi}).$$

De même, en travaillant avec les coordonnées, on montre (GINGERICH [2]) que :

La (U, OV)-transitivité équivaut à l'associativité de la multiplication et la linéarité, et aussi que :

Tout plan projectif contenant une droite d telle que le plan soit (C, a)-transitif pour tout couple incident (C, a), avec $C \in d$, vérifie la petite condition de Desargues.

D'après SPENCER [19] :

Tout plan projectif, ayant trois points P, Q, R et trois droites p, q, r avec $R = p \cap q \in PQ = r$ tels que le plan soit (P, p)-, (Q, q)-, et (R, r)-transitif, est un plan arguésien.

On en déduit (PICKERT [13]) une caractérisation d'un corps en tant que groupe pour l'addition, qui (privé du o) est un groupe pour la multiplication et qui (privé du 1) est un groupe pour la loi $(a , b) \longrightarrow a - ab + b$. L'application $a \longrightarrow 1 - a$ réalise alors un isomorphisme du 3e groupe sur le groupe multiplicatif.

En utilisant des méthodes tirées de la théorie des groupes, LÜNEBURG a établi,

- dans [7] : Dans le théorème de Spencer, l'hypothèse de la (R , r)-transitivité est inutile pour un plan fini d'ordre impair.

- dans [8] : Tout plan projectif d'ordre pair, ayant trois points non collinéaires P , Q , R tels que le plan soit (P , PR)-, (Q , QR)- et (R , PQ)-transitif, est un plan arguésien. L'hypothèse de la (R , PQ)-transitivité est superflue si l'ordre du plan est pair sans être un carré ou bien s'il est $\equiv 3 \mod 4$.

Pour illustrer (II), considérons un quasicorps à gauche associatif $(\mathcal{C} , + , .)$ (on a tous les axiomes d'un corps sauf : $a(b + c) = ab + ac$) d'ordre q^2 avec le corps $\mathcal{K}$ d'ordre q comme centre.

OSTROM a déterminé le corps ternaire $(\mathcal{C} , T)$ du plan de Hughes sur $\mathcal{C}$; on a :

(13) $$T(u , x , y) = ux + y \qquad \text{pour } x , y \in \mathcal{C} , \ u \in \mathcal{K} .$$

(14) $$T(u , x , ua + b) = u(x + a) + b \qquad \text{pour } x \in \mathcal{C} , \ u \in \mathcal{C}-\mathcal{K} , \ a , b \in \mathcal{K} .$$

On vérifie directement (4), (5), (6). Pour (5) et (6), ce n'est pas trivial lorsque u appartient à $\mathcal{C}-\mathcal{K}$; on utilise alors le résultat intermédiaire : si $u \neq u'$, il existe un x unique de $\mathcal{C}$ vérifiant

(15) $$u(x + a) + b = u'x .$$

En utilisant les théorèmes de Baer et Gingerich, on montre qu'un plan de Hughes n'est ni (V , UV)- ni (U , OV)-transitif. La détermination du groupe de collinéations, faite par ROSATI [15], établit que :

Dans un plan de Hughes, il n'existe pas de couple (C , a) tel que le plan soit (C , a)-transitif.

D'après OSTROM [9], on peut construire un groupe cartésien à partir d'un quasicorps à gauche associatif du type précédent, en choisissant un élément $j \in \mathcal{C}-\mathcal{K}$ et en définissant une nouvelle multiplication $\star$ par :

$$(a + bj) \star (x + yj) = x' + y'j ,$$

avec

$$x' = ax , \quad y' = ay \qquad \text{si } b = o ,$$

et

(16) $$b^{-1}(a + j)(y' + yj) = x' + xj \qquad \text{si } b \neq o .$$

Il faut d'abord prouver que, pour $b \neq o$, x' et y' sont parfaitement définis. Ensuite (4) étant évidemment vérifiée, il suffit de prouver (6') ; pour cela, on distingue les deux cas $u' \in \mathcal{K}$ et $u' \notin \mathcal{K}$. D'après le théorème de Baer, les plans de Ostrom ainsi obtenus sont (V , UV)-transitifs et, d'après OSTROM [10], on a même :

Un plan de Ostrom d'ordre supérieur à 9 , construit à partir d'un quasicorps à gauche associatif, avec $q \neq 11 , 23 , 59$, est (C , a)-transitif pour le seul couple $C = V$ et $a = UV$.

Pour $q = 3$ (ordre 9), la multiplication $\star$ coïncide avec $\circ$ et le plan de Ostrom obtenu est alors, de plus, (U , OV)-transitif.