Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Mahmoud Djabali

Anneau de fractions d'un J-anneau

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 18, nº 1 (1964-1965), exp. nº 8, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1964-1965__18_1_A7_0>

11 janvier 1965

ANNEAU DE FRACTIONS D'UN J-ANNEAU

par Mahmoud DJABALI

Rappelons le problème : Soit A un anneau et soit R l'ensemble des éléments réguliers de A, c'est-à-dire l'ensemble des éléments qui ne sont diviseurs de 0 ni à gauche, ni à droite. On cherche à plonger A dans un anneau $F(A)$ dont les éléments s'écrivent sous la forme $b^{-1} a$, où $b \in R$ et $a \in A$. Pour cela, il faut et il suffit que pour tout couple (b, a), $b \in R$, $a \in A$, il existe un couple (b', a'), $b' \in R$, $a' \in A$, tel que $b'a = a'b$.

Nous allons d'abord préciser quelques définitions.

1. Définition d'un A-module de dimension finie [6].

DÉFINITION 1.1. - Un A-module M non nul est dit de dimension finie, si on ne peut trouver une infinité de sous-modules de M non nuls dont la somme soit directe [6]. On a la propriété suivante.

PROPRIÉTÉ 1.1. - Si M est un A-module de dimension finie, il existe un entier positif n tel que toute somme directe de sous-modules non nuls de M possède au plus n composantes.

DÉFINITION 1.2. - L'entier n s'appelle la dimension de M.

PROPRIÉTÉ 1.2. - Si M est de dimension finie, tout sous-module non nul de M est de dimension finie inférieure ou égale à celle de M.

DÉFINITION 1.3. - Un A-module M est dit irréductible s'il est de dimension 1.

Alors on ne peut trouver deux sous-modules non nuls de M dont l'intersection soit nulle.

PROPRIÉTÉ 1.3. - Pour que M soit de dimension n, il faut et il suffit qu'il existe une somme directe de n sous-modules irréductibles essentielle dans M.

2. Définition d'un sous-module fermé [5] [6].

DÉFINITION 2.1. - Un sous-module N du A-module M est dit fermé si, pour tout

x n'appartenant pas à N, il existe un sous-module non nul N' du sous-module engendré par x tel que $N' \cap N = 0$.

PROPRIÉTÉ 2.1. - Une intersection quelconque de sous-modules fermés de M est un sous-module fermé.

DÉFINITION 2.2. - Si N est un sous-module de M, l'intersection $\overline{N}$ des sous-modules fermés contenant N est le plus petit sous-module fermé contenant N. On l'appelle la fermeture de N.

PROPRIÉTÉ 2.2. - Pour que le A-module M soit de dimension finie, il faut et il suffit que les sous-modules fermés de M vérifient la condition maximale, <u>ou</u> la condition minimale.

PROPRIÉTÉ 2.3. - Si N est un sous-module de dimension finie, $\overline{N}$ a même dimension que N.

PROPRIÉTÉ 2.4. - Soient N un sous-module et X un sous-module irréductible. Pour que $X \subset \overline{N}$, il faut et il suffit que $X \cap N \neq 0$.

PROPRIÉTÉ 2.5. - Si N_1 et N_2 sont deux sous-modules fermés de dimension finie, avec $N_1 \subset N_2$, N_1 et N_2 sont distincts si, et seulement si, $\dim N_1 \neq \dim N_2$.

3. Définition d'un J-anneau [6].

Soit A un anneau. Nous ferons usage des condition suivantes susceptibles d'être vérifiées par A :

(1 1) A est de dimension finie comme A-module à gauche ;
(2 1) Les annulateurs à gauche des sous-ensembles de A vérifient la condition maximale ;
(2' 1) Les annulateurs à gauche des éléments de A vérifient la condition maximale ;
(3 1) Pour tout $x \in A$, $x \neq 0$, l'idéal à gauche $(0 \cdot . x)$, annulateur à gauche de x, n'est pas essentiel dans A.

PROPRIÉTÉ 3.1. - La condition (3 1) entraîne la condition suivante :

(3' 1) Pour tout $x \in A$, $(0 \cdot . x)$ est fermé comme A-module à gauche.

DÉFINITION 3.1. - On appelle J-anneau (anneau de Johnson), un anneau unitaire qui satisfait aux conditions (1 1) et (3 1).

DÉFINITION 3.2. - On appelle G-anneau (anneau de Goldie), un J-anneau semi-premier.

PROPRIÉTÉ 3.2. - Dans un J-anneau A, les 3 affirmations suivantes sont équivalentes :

(1) b est un élément régulier ;

(2) b n'est pas diviseur de 0 à droite $(0 \cdot. b = 0)$;

(3) L'idéal Ab est essentiel dans A.

PROPRIÉTÉ 3.3. - Dans un J-anneau de dimension n,

$$\dim(Aa) + \dim(0 \cdot. a) = n .$$

En particulier, si Aa est irréductible, $\dim(0 \cdot. a) = n - 1$, c'est-à-dire que $(0 \cdot. a)$ est un annulateur à gauche maximal.

4. Anneau de fractions d'un G-anneau.

On a le résultat suivant, dû à GOLDIE [3].

THÉORÈME 4.1. - Pour qu'un anneau A possède un anneau de fractions à gauche semi-simple, il faut et il suffit que A soit semi-premier et qu'il vérifie les conditions (1 1) et (2' 1).

On montre que dans un tel anneau, la condition (2' 1) et la condition (3 1) sont équivalentes. C'est pourquoi on peut énoncer :

COROLLAIRE. - Pour qu'un anneau unitaire possède un anneau de fractions à gauche semi-simple, il faut et il suffit que ce soit un G-anneau.

Pour démontrer ce théorème, on utilise les résultats suivants :

PROPRIÉTÉ 4.1. - Soit A un anneau semi-premier satisfaisant aux conditions (1 1) et (2' 1). Il existe une somme directe d'idéaux irréductibles qui contient un élément régulier.

Soit X_1 un idéal irréductible. $X_1^2 \neq 0$ puisque A est semi-premier. Donc $\exists\ u_1 \in X_1$ tel que $X_1 u_1 \neq 0$. D'après la propriété (2.4), $X_1 \cap (0 \cdot. u_1) = 0$. Soit X_2 un idéal irréductible contenu dans $(0 \cdot. u_1)$. Il existe $u_2 \in X_2$ tel que $X_2 u_2 \neq 0$. On voit que la somme $X_1 + X_2$ est directe et que

$$(X_1 + X_2) \cap (0 \cdot. u_1 \cap 0 \cdot. u_2) = 0 .$$

Supposons donc construite une somme directe d'idéaux irréductibles $X_1 + X_2 + \dots + X_i$ avec des éléments $u_1 \in X_1, \dots, u_i \in X_i$ tels que

$$(X_1 + X_2 + \dots + X_i) \cap (0 \cdot. u_1 \cap \dots \cap 0 \cdot. u_i) = 0 .$$

Si $0 \cdot. u_1 \cap \dots \cap 0 \cdot. u_i$ est non nul, il existe un idéal irréductible X_{i+1}

contenu dans $0 \overset{\cdot}{.} u_1 \cap \dots \cap 0 \overset{\cdot}{.} u_i$ et un élément $u_{i+1} \in X_{i+1}$ tels que

$$X_{i+1} \cap (0 \overset{\cdot}{.} u_{i+1}) = 0 .$$

Alors on voit que la somme $X_1 + \dots + X_i + X_{i+1}$ est directe et que

$$(X_1 + \dots + X_{i+1}) \cap (0 \overset{\cdot}{.} u_1 \cap \dots \cap 0 \overset{\cdot}{.} u_{i+1}) = 0 .$$

Comme une somme directe ne peut avoir qu'un nombre fini de composantes, au bout d'un nombre fini n d'opérations, on aura une somme directe $\sum_1^n X_i$ d'idéaux irréductibles et des éléments $u_i \in X_i$ tels que $(\bigcap 0 \overset{\cdot}{.} u_i) = 0$. Posons

$$b = \sum_1^n u_i$$

et montrons que b est régulier. En effet, soit λ tel que $\lambda b = 0$.

$$\sum_1^n \lambda u_i = 0$$

et la somme $\sum X_i$ étant directe, on a $\lambda u_i = 0$ pour tout i. Donc

$$\lambda \in (\bigcap 0 \overset{\cdot}{.} u_i) \quad \text{et} \quad \lambda = 0 .$$

On en déduit que

$$(0 \overset{\cdot}{.} b) = 0 .$$

On remarque que les idéaux Au_i étant irréductibles, les annulateurs à gauche $(0 \overset{\cdot}{.} u_i)$ sont maximaux (prop. 3.3).

PROPRIÉTÉ 4.2. - Pour qu'un idéal soit essentiel dans A, il faut et il suffit qu'il contienne un élément régulier.

La condition est suffisante, montrons qu'elle est nécessaire. Soit X un idéal essentiel dans A. Pour $\forall\, i$,

$$Y_i = X \cap X_i \neq 0 .$$

Si on avait $u_i Y_i = 0$, on aurait $u_i \in (0 \overset{\cdot}{.} Y_i)$ et comme X_i est irréductible, $X_i \subset (0 \overset{\cdot}{.} Y_i)$ (prop. 2.4). Donc $X_i Y_i = 0$, d'où $Y_i^2 = 0$, ce qui est impossible. Alors pour tout i,

$$u_i Y_i \neq 0 .$$

Il existe un $y_i \in Y_i$ tel que $u_i y_i \neq 0$. On a

$$(0 \overset{\cdot}{.} u_i) \subset (0 \overset{\cdot}{.} u_i y_i)$$

mais comme $(0 \overset{\cdot}{.} u_i)$ est maximal et comme $(0 \overset{\cdot}{.} u_i y_i) \neq A$ $(u_i y_i \neq 0)$, on en déduit

$$(0 \overset{\cdot}{.} u_i) = (0 \overset{\cdot}{.} u_i y_i) .$$

Donc

$$(\cap 0 \overset{\cdot}{.}\, u_i\, y_i) = (\cap 0 \overset{\cdot}{.}\, u_i) = 0 \,.$$

Si on pose $b_1 = \sum u_i\, y_i$, on démontre, comme dans la démonstration précédente, que b_1 est régulier.

L'existence de l'anneau de fractions se démontre en utilisant le fait que si b est régulier, a quelconque dans A , l'idéal à gauche $(Ab \overset{\cdot}{.}\, a)$ (ensemble des λ tels que $\lambda a \in Ab$) est essentiel dans A , donc contient un élément régulier b'.

5. Quelques propriétés d'un J-anneau.

PROPRIÉTÉ 5.1. - *Dans un J-anneau de dimension n , tout demi-groupe multiplicatif nilpotent est de puissance n-ième nulle.*

Soit S un demi-groupe multiplicatif nilpotent. Supposons que $S^p \neq 0$, $S^{p+1} = 0$ avec $p \geqslant n$. On a

$$(0 \overset{\cdot}{.}\, S) \subset (0 \overset{\cdot}{.}\, S^2) \subset (0 \overset{\cdot}{.}\, S^3) \ldots$$

Les idéaux à gauche $(0 \overset{\cdot}{.}\, S^i)$ sont fermés (prop. 3.1) donc ils vérifient la condition maximale. Il existe un i tel que $(0 \overset{\cdot}{.}\, S^i) = (0 \overset{\cdot}{.}\, S^{i+1})$. $(0 \overset{\cdot}{.}\, S)$ n'est pas nul, car il contient S^p , donc $(0 \overset{\cdot}{.}\, S)$ est de dimension au moins égale à 1 . Si $(0 \overset{\cdot}{.}\, S^2)$ est différent de $(0 \overset{\cdot}{.}\, S)$, $(0 \overset{\cdot}{.}\, S^2)$ est de dimension au moins égale à 2, et ainsi de suite. Donc $(0 \overset{\cdot}{.}\, S^i)$ est de dimension au moins égale à i , et comme il est au maximum de dimension égale à $n - 1$, $i \leqslant n - 1$. On peut alors écrire

$$S^{p+1} = S^{p-i}\, S^{i+1}$$

puisque $p > i$.

$$S^{p-i} \subset (0 \overset{\cdot}{.}\, S^{i+1})$$

donc

$$S^{p-i} \subset (0 \overset{\cdot}{.}\, S^i)$$

et on en déduit que $S^p = 0$ contrairement à l'hypothèse. Donc $p \leqslant n$ et $S^n = 0$.

PROPRIÉTÉ 5.2. - *Dans un J-anneau, tout nil-demi-groupe multiplicatif engendré par un nombre fini d'éléments est nilpotent.*

Démonstration dans [4], p. 199.

THÉORÈME 5.1. - *Dans un J-anneau, tout nil-demi-groupe multiplicatif engendré par un nombre fini d'éléments est nilpotent.*

Soient S un nil-demi-groupe et a_1 , a_2 , ... , a_n n éléments de S . Le demi-groupe engendré par les a_i est un nil-demi-groupe. Donc d'après la propriété (5.2), il est nilpotent, et d'après (5.1), il est de puissance n-ième nulle. Alors le produit $a_1 a_2 \dots a_n$ est nul, et on en déduit que $S^n = 0$. En particulier, tout nil-idéal est nilpotent. Soit B la somme des idéaux nilpotents. C'est le plus grand idéal nilpotent de A . On l'appellera le radical de A .

PROPRIÉTÉ 5.3. - *Soient* I *un idéal à gauche de* A , *et* b *un élément régulier. Alors* Ib *est de même dimension que* I .

La démonstration ne présente aucune difficulté.

PROPRIÉTÉ 5.4. - *Soient* I *un idéal à gauche de* A , *et* b *un élément régulier. Alors*

$$0 \,\dot{.}\, bI = 0 \,\dot{.}\, I .$$

On a d'abord $bI \subset I$, donc

$$(0 \,\dot{.}\, I) \subset (0 \,\dot{.}\, bI) .$$

Soit $\lambda \in (0 \,\dot{.}\, bI)$. $\lambda bI = 0$, donc $\lambda b \in (0 \,\dot{.}\, I)$. On en déduit que

$$(0 \,\dot{.}\, bI)b \subset (0 \,\dot{.}\, I)$$

et on a les inclusions

$$(0 \,\dot{.}\, bI)b \subset (0 \,\dot{.}\, I) \subset (0 \,\dot{.}\, bI) .$$

$(0 \,\dot{.}\, bI)b$ est de même dimension que $0 \,\dot{.}\, bI$. Comme $(0 \,\dot{.}\, I)$ et $(0 \,\dot{.}\, bI)$ sont des idéaux fermés (prop. 3.1), on a

$$(0 \,\dot{.}\, I) = (0 \,\dot{.}\, bI) \qquad \text{(prop. 2.5)}.$$

PROPRIÉTÉ 5.5. - *Si* b *est un élément régulier,* $(B \,\dot{.}\, b) = B$.

On a $B \subset (B \,\dot{.}\, b)$. Réciproquement si $\lambda b \in B$, montrons que $\lambda \in B$. Par hypothèse

$$(A\lambda b)^n = 0 \text{ , ou } (A\lambda b)^{n-2}(A\lambda b)(A\lambda b) = 0 .$$

Comme b est régulier, $(A\lambda b)^{n-2} A\lambda b A\lambda = 0$, soit

$$(A\lambda b)^{n-2} A\lambda \subset (0 \,\dot{.}\, bA\lambda) .$$

D'après (5.4), $(0 \,\dot{.}\, bA\lambda) = (0 \,\dot{.}\, A\lambda)$. On en déduit que

$$(A\lambda b)^{n-2}.(A\lambda)^2 = 0 .$$

On procède ainsi de proche en proche, et on en déduit que $(A\lambda)^n = 0$, donc que $\lambda \in B$.

PROPRIÉTÉ 5.6. - *Soit* B^p *une puissance de* B . *Si* X *est un idéal à gauche tel* *que* $X \cap B^p = 0$, *alors* $B^p X = 0$. *Si de plus* $X \subset B$, $B^{p-1} X = 0$.

La démonstration n'offre aucune difficulté.

PROPRIÉTÉ 5.7. - *Soit* X *un idéal à gauche irréductible tel que* $X \cap B^{p+1} = 0$, $X \cap B^p \neq 0$. *Alors*

$$X \cap B = X \cap (0 \mathbin{.^{\cdot}} B^p)$$

($(0 \mathbin{.^{\cdot}} B^p)$ est l'annulateur à droite de B^p). D'après (5.6), on a $X \cap B(0 \mathbin{.^{\cdot}} B^p)$. Réciproquement, soit

$$Y = X \cap (0 \mathbin{.^{\cdot}} B^p) .$$

$B^p Y = 0$, donc

$$\overline{B^p} Y = 0 \qquad \text{(prop. 3.1 et déf. 2.2).}$$

D'autre part, d'après (2.4), $X \subset \overline{B^p}$, donc $XY = 0$. Alors

$$Y^2 = 0 \quad \text{et} \quad Y \subset B .$$

6. Anneau de fractions d'un J-anneau.

Il s'agit de savoir si le résultat valable pour un G-anneau s'étend à un J-anneau. Dans [1], nous donnons un exemple de J-anneau qui n'a pas d'anneau de fractions. Nous allons donner deux conditions suffisantes pour qu'un J-anneau possède un anneau de fractions. Ces conditions sont les suivantes.:

(F 1) : Pour tout p , l'anneau $A_p = A/(0 \mathbin{.^{\cdot}} B^p)$ satisfait à la condition (1 1).

(F 2) : Il existe dans A une somme directe d'idéaux irréductibles qui contient un élément régulier.

(F 1) *est vérifiée en particulier si* A *est noethérien à gauche.*

(F 2) *est vérifiée si le radical* B *ne contient aucun idéal fermé non nul.* La construction est la même que dans le cas semi-premier en considérant des idéaux irréductibles fermés.

Lorsque (F 2) est vérifiée, il existe n idéaux irréductibles X_i et n éléments non nuls $u_i \in X_i$ tels que la somme $\sum X_i$ soit directe et tels que $\bigcap 0 \mathbin{.^{\cdot}} u_i = 0$. Alors $b = \sum u_i$ est un élément régulier.

PROPRIÉTÉ 6.1. - *Si la condition* (F 2) *est vérifiée, aucun des* u_i *n'est dans* B .

Supposons qu'il existe un indice i_0 tel que $u_{i_0} \in B$. Il existe alors un entier p tel que $Au_{i_0} \cap B^p \neq 0$,

$$Au_{i_0} \cap B^{p+1} = 0 .$$

D'après (5.6), $B^p u_{i_0} = 0$. D'après (5.3), $B^p b$ est de même dimension que B^p .

Comme $B^p b \subset B^p$, $B^p b$ est essentiel dans B^p . Or montrons que $B^p b \cap Au_{i_0} = 0$, ce qui prouvera que $B^p b$ a une intersection nulle avec $Au_{i_0} \cap B^p$, donc qu'il n'est pas essentiel dans B^p . En effet,

$$B^p b = \sum_{i \neq i_0} B^p u_i$$

puisque $B^p u_{i_0} = 0$. Donc

$$B^p b \subset \sum_{i \neq i_0} Au_i$$

et la somme $\sum Au_i$ étant directe, on a bien

$$Au_{i_0} \cap (\sum_{i \neq i_0} Au_i) = 0 .$$

On arrive ainsi à une contradiction.

Pour tout p , soit A_p l'anneau $A/(0 \,.^{\cdot}\, B^p)$ et soit φ_p l'application canonique de A sur A_p . Nous allons démontrer le lemme suivant :

LEMME 6.1. - Soit $a \in (0 \,.^{\cdot}\, B^{p+1})$, $a \notin (0 \,.^{\cdot}\, B^p)$. Soit X un idéal à gauche de A tel que $(\varphi_p(X) \,^{\cdot}.\, \varphi_p(a))$ soit essentiel dans A_p . Si les conditions (F 1) et (F 2) sont vérifiées, il existe un élément régulier b' tel que

$$\varphi_p(b') \in (\varphi_p(X) \,^{\cdot}.\, \varphi_p(a)) .$$

Il suffit de montrer que $b'a \in X + (0 \,.^{\cdot}\, B^p)$. Pour ceci, nous montrerons que, pour tout i , il existe $y_i \in X_i$ tel que $u_i y_i \neq 0$ et $y_i a \in X + (0 \,.^{\cdot}\, B^p)$. Alors, en posant $b' = \sum u_i y_i$, on aura comme dans la démonstration du théorème (4.1) et de la propriété (4.2)

$$b'a \in X + (0 \,.^{\cdot}\, B^p) ,$$

et b' régulier.

Nous allons partager les n éléments u_i en 3 groupes :

- Ceux du 1er groupe seront tels que $Au \cap B^p = 0$. Alors $u \in 0 \,.^{\cdot}\, B^p$ (prop. 5.6).
- Ceux du 2e groupe seront tels que $A_u \cap B^p \neq 0$, $Au \cap B^{p+1} = 0$.
- Ceux du 3e groupe seront tels que $A_u \cap B^{p+1} \neq 0$. Alors $u \in \overline{B^{p+1}}$.

Pour les u_i des 1er et 3e groupes, il suffit de prendre $y_i = 1$, car les u_i du 1er groupe sont dans $(0 \,.^{\cdot}\, B^p)$, et alors

$$u_i \, a \in (0 \,.^{\cdot}\, B^p) .$$

De même, puisque $B^{p+1} a = 0$, $\overline{B^{p+1}} a = 0$ (prop. 3' 1). Donc pour un u_i du 3e groupe,

$$u_i \, a = 0 .$$

Il suffit d'étudier les u du 2e groupe. Pour un tel u ,

$$Au \cap (0 \mathbin{\dot{.}} B^p) = Au \cap B \qquad \text{(prop. 5.7).}$$

Comme $Au \not\subset B$, $Au \not\subset (0 \mathbin{\dot{.}} B^p)$. Alors $\varphi_p(Au) \neq 0$. Comme $(\varphi_p(X) \mathbin{\dot{.}} \varphi_p(a))$ est essentiel dans A_p ,

$$\varphi_p(Au) \cap (\varphi_p(X) \mathbin{\dot{.}} \varphi_p(a)) \neq 0 .$$

Donc il existe un idéal non nul $\varphi_p(Y)$ tel que

$$Ya \subset X + (0 \mathbin{\dot{.}} B^p) , \qquad Y \not\subset (0 \mathbin{\dot{.}} B^p) .$$

Comme $X \cap (0 \mathbin{\dot{.}} B^p) = X \cap B$, et que $Y \not\subset (0 \mathbin{\dot{.}} B^p)$, $Y \not\subset B$, et Y n'est pas nilpotent. Comme pour la démonstration de (4.2), on voit que $uY \neq 0$. Il existe un $y \in Y$ tel que $uy \neq 0$ et $ya \in X + (0 \mathbin{\dot{.}} B^p)$.

THÉORÈME 6.1. - Un J-anneau qui satisfait aux conditions (F 1) et (F 2) possède un anneau de fractions.

Soit b un élément régulier. Montrons que dans A_p , $\varphi_p(b)$ n'est pas diviseur de 0 à droite. Soit λ tel que $\varphi_p(\lambda)\ \varphi_p(b) = 0$, c'est-à-dire tel que $\lambda b \in (0 \mathbin{\dot{.}} B^p)$. Alors $B^p\ \lambda b = 0$, et comme b est régulier

$$B^p\ \lambda = 0 , \quad \lambda \in (0 \mathbin{\dot{.}} B^p) \quad \text{et} \quad \varphi_p(\lambda) = 0 .$$

A_p étant de dimension finie, cela entraîne que $A_p\ \varphi_p(b)$ est essentiel dans $A_p[\ ]$. Donc, pour tout $a \notin (0 \mathbin{\dot{.}} B^p)$, l'idéal $(\varphi_p(Ab) \mathbin{\dot{.}} \varphi_p(a))$ est essentiel dans A_p .

Nous pouvons alors appliquer le lemme (6.1), et pour tout $a \in (0 \mathbin{\dot{.}} B^{p+1})$, $a \notin (0 \mathbin{\dot{.}} B^p)$, il existe b_1 régulier tel que

(1) $$b_1\ a \in Ab + (0 \mathbin{\dot{.}} B^p) .$$

En particulier, si $a \in (0 \mathbin{\dot{.}} B)$, la formule (1) se réduit à

(2) $$b_1\ a \in Ab .$$

Pour montrer qu'il y a anneau de quotients, il suffit de montrer que, pour a quelconque, $Ab \mathbin{\dot{.}} a$ contient un élément régulier. C'est vrai pour tout élément de $(0 \mathbin{\dot{.}} B)$ d'après (2), supposons-le vrai pour un élément de $(0 \mathbin{\dot{.}} B^p)$, et soit $a \in (0 \mathbin{\dot{.}} B^{p+1})$, $a \notin (0 \mathbin{\dot{.}} B^p)$. La formule (1) peut s'écrire

$$b_1\ a = a_1\ b + a' \qquad a' \in (0 \mathbin{\dot{.}} B^p) .$$

D'après l'hypothèse de récurrence, $\exists\ b_1'$ régulier tel que $b_1'\ a' \in Ab$. Alors

$$(b_1'\ b_1) a \in Ab .$$

$(Ab \cdot . \, a)$ contient bien l'élément régulier $b' = b_1' \, b_1$, et le théorème s'établit par récurrence.

THÉORÈME 6.2. - L'anneau de fractions d'un J-anneau qui satisfait aux conditions (F 1) et (F 2) est artinien à gauche.

Soit $F(A)$ cet anneau. Soit $\mathfrak{J}$ un idéal de $F(A)$. $\mathfrak{J} \cap A$ est un idéal de A non nul, et on a $\mathfrak{J} = F(A) \ (\mathfrak{J} \cap A)$. Il suffit alors de montrer que si l'on a une suite décroissante d'idéaux X_K de A , il existe un entier K_0 tel que pour $K \geqslant K_0$, on ait :

$$F(A)X_K = F(A)X_{K+1} \ .$$

Supposons que, pour $K \geqslant K_1$,

$$X_K \subset (0 \ .\cdot \ B^{p+1}) \ , \qquad X_K \not\subset (0 \ .\cdot \ B^p) \ .$$

Dans A_p les idéaux non nuls $\varphi_p(X_K)$ forment une suite décroissante. Il existe un entier K_2 tel que, pour $K \geqslant K_2$,

$$\dim \varphi_p(X_K) = \dim \varphi_p(X_{K+1})$$

puisque A_p est de dimension finie, ce qui veut dire que $\varphi_p(X_{K+1})$ est essentiel dans $\varphi_p(X_K)$, ou encore que si $\varphi_p(a) \in \varphi_p(X_K)$, l'idéal $(\varphi_p(X_{K+1}) \ \cdot . \ \varphi_p(a))$ est essentiel dans A_p .

Posons $K_0' = \sup(K_1 \ , \ K_2)$. Si $K \geqslant K_0'$, pour $a \in X_K$, le lemme (6.1) s'applique. Donc il existe b_1 régulier tel que

(i) $$b_1 \ a \in X_{K+1} + (0 \ .\cdot \ B^p) \ .$$

En particulier, si la suite X_K est contenue dans $(0 \ .\cdot \ B)$, il existe b_1 tel que

(ii) $$b_1 \ a \in X_{K+1} \qquad \text{ou} \qquad a \in b_1^{-1} \ X_{K+1} \ ,$$

donc

$$X_K \subset F(A)X_{K+1}$$

ce qui prouve le théorème pour une suite d'idéaux de $(0 \ .\cdot \ B)$.

Alors l'égalité (i) permet d'étendre le résultat par récurrence à une suite quelconque d'idéaux de A .

PROPRIÉTÉ 6.2. - Le plus grand idéal nilpotent de l'anneau artinien $F(A)$ est

$$F(B) = F(A).B \ .$$

Soit $F(B)$ le plus grand idéal nilpotent de $F(A)$. On a

$$F(B) = F(A).(F(B) \cap A) .$$

$F(B) \cap A$ est un idéal nilpotent de $F(A)$, donc contenu dans B . On a bien

$$F(B) \subset F(A).B .$$

Réciproquement, montrons que $F(A).B$ est un idéal nilpotent de $F(A)$. Pour ceci montrons que

$$(F(A).B)^p = F(A).B^p .$$

Considérons par exemple $(F(A).B)^2$. On voit facilement qu'un élément de $(F(A).B)^2$ s'écrit sous la forme $b^{-1} \beta b'^{-1} \beta'$ où b et b' sont réguliers et β et β' sont des éléments de B . On peut écrire

$$\beta b'^{-1} = b_1'^{-1} \beta_1'$$

soit $b_1' \beta = \beta_1' b'$, b_1' est régulier. $\beta_1' b' \in B$ puisque $\beta \in B$. Et comme b' est régulier, on en déduit, d'après (5.5), que $\beta_1' \in B$. On peut écrire

$$b^{-1} \beta b'^{-1} \beta' = b^{-1} b_1'^{-1}(\beta_1' \beta') \qquad \text{avec} \quad \beta_1' \beta' \in B^2 .$$

Ceci prouve que

$$(F(A).B)^2 = F(A).B^2$$

et on en déduit facilement que

$$(F(A).B)^p = F(A).B^p .$$

Donc

$$(F(A).B)^n = F(A).B^n = 0 .$$

Soit $F(A).B \subset F(B)$ ce qui prouve bien l'égalité

$$F(A).B = F(B) .$$

PROPRIÉTÉ 6.3. - $F(A)$ <u>est un anneau de même dimension que</u> A <u>et somme directe d'idéaux irréductibles.</u>

La démonstration est immédiate.

<u>Exemple</u>. - A est l'anneau des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$$

où les coefficients appartiennent à un anneau d'intégrité T . C'est un J-anneau de dimension 3 . Les conditions (F 1) et (F 2) sont vérifiées. L'anneau de fractions $J(A)$ est l'anneau des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} & \bar{c} \\ 0 & \bar{d} & \bar{e} \\ 0 & 0 & \bar{f} \end{pmatrix}$$

à coefficients dans le corps des fractions de T . C'est un anneau artinien.

BIBLIOGRAPHIE

[1] DJABALI (Mahmoud). - Etude d'un J-anneau noethérien de dimension 2 , C. R. Acad. Sc. Paris, t. 258, 1964, p. 5309-5310.

[2] GOLDIE (A. W.). - The structure of prime rings under ascending chain conditions, Proc. London math. Soc., Series 3, t. 8, 1958, p. 589-608.

[3] GOLDIE (A. W.). - Semi-prime rings with maximum conditions, Proc. London math. Soc., Series 3, t. 10, 1960, p. 201-220.

[4] JACOBSON (N.). - Structure of rings. - Providence, American mathematical Society, 1956 (Amer. math. Soc., Colloq. Publ., 37).

[5] LESIEUR (L.) et CROISOT (R.). - Sur les anneaux premiers noethériens à gauche, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 3e série, t. 76, 1959, p. 161-183.

[6] LESIEUR (L.) et CROISOT (R.). - Coeur d'un module, J. Math. pures et appl., 9e série, t. 42, 1963, p. 367-407.