MAURICE NIVAT

Sur une classe de transducteurs

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 18, n° 1 (1964-1965), exp. n° 7, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1964-1965__18_1_A6_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
18e année, 1964/65, n° 7

21 décembre 1964

SUR UNE CLASSE DE TRANSDUCTEURS

par Maurice NIVAT

1. Produit en couronne de groupes.

Soient A un groupe, Y un ensemble non vide, B un groupe de permutations sur Y. Nous noterons :

A^Y l'ensemble des applications de Y dans A,

yb l'image de $y \in Y$ par $b \in B$.

Ainsi $y1 = y$ pour tout $y \in Y$,

$$\forall\, b\, ,\, c \in B : \qquad (yb)c = y(bc)\ .$$

Définissons le produit en couronne de A par B (en anglais : wreath product), soit $W(A\, ,\, B)$, comme l'ensemble $B \times A^Y$ muni de la loi de composition

$$(b\, ,\, \varphi)(b'\, ,\, \omega') = (bb'\, ,\, \Psi)$$

où $\Psi : Y \to A$ est défini par

$$\forall\, y \in Y : \qquad \Psi(y) = \omega(y)\ \varphi'(yb)\ .$$

On vérifie aisément l'associativité de cette loi, pour laquelle $(1\, ,\, 1)$, où 1 désigne aussi l'application de Y dans A qui envoie tous les $y \in Y$ sur l'élément neutre $1 \in A$, est élément neutre.

L'inverse de $(b\, ,\, \varphi)$ est l'élément $(b^{-1}\, ,\, \overline{\varphi}_b)$ où $\overline{\varphi}_b(y) = \big(\varphi(yb^{-1})\big)^{-1}$.

Ainsi $W(A\, ,\, B)$ est un groupe que l'on peut représenter fidèlement comme groupe de $Y \times Y$ matrices à éléments pris dans $A \cup \{0\}$. Posons en effet

$$\mu(b\, ,\, \varphi)_{(y_i, y_j)} = \begin{cases} \varphi(y_i) & \text{si } y_i\, b = y_j \\ 0 & \text{dans le cas contraire} \end{cases}$$

avec $\forall\, a \in A :\ 0.a = a.0 = 0.0 = 0$ (ce qui fait de $A \cup \{0\}$ un homogroupe).

Le calcul de $\mu(b\, ,\, \varphi)\ \mu(b'\, ,\, \varphi')$ donne

$$[\mu(b\, ,\, \varphi)\ \mu(b'\, ,\, \varphi')]_{(y_i, y_j)} = \sum_{y_k \in Y} \mu(b\, ,\, \varphi)_{(y_i, y_k)}\ \mu(b'\, ,\, \varphi')_{(y_k, y_j)}$$

$$= \begin{cases} \varphi(y_i)\ \varphi'(y_k) & \text{si } \exists\, y_k \in Y \text{ tel que } y_k\, b' = y_j \text{ et } y_i\, b = y_k \\ 0 & \text{dans le cas contraire.} \end{cases}$$

Ainsi

$$\mu[(b\ ,\ \varphi)(b'\ ,\ \varphi')] = \mu(b\ ,\ \varphi)\ \mu(b'\ ,\ \varphi')\ ,$$

donc μ est une représentation.

Le fait que μ est fidèle, i. e. $\mu(b\ ,\ \varphi) = \mu(b'\ ,\ \varphi') \implies b = b'$, et $\varphi = \varphi'$, est assez évident.

Le plus souvent, B sera représenté comme groupe de permutation sur lui-même, autrement dit comme son propre groupe de translation à droite. On écrira encore $W(A\ ,\ B)$.

La justification de l'introduction du produit en couronne en algèbre réside dans la propriété suivante, établie en [1] :

PROPOSITION. - Si C est une extension de A par B , il existe un monomorphisme de C dans $W(A\ ,\ B)$ (ou, autrement dit, C peut être plongé dans $W(A\ ,\ B)$).

Soient en effet $\varepsilon : C \to B$ un épimorphisme de noyau K , et $\alpha : K \to A$ un isomorphisme.

ε étant un épimorphisme, il existe une application $\Sigma : B \to C$ telle que $\Sigma\varepsilon$ soit l'identité de B . (Σ est l'inverse à gauche de ε , ce n'est généralement pas un homomorphisme.)

Définissons $\gamma : C \to A^B$ par

$$\forall\ y \in B : \quad (\gamma c)(y) = \alpha\Big(\Sigma(y)\ c\big(\Sigma(y(\varepsilon c))\big)^{-1}\Big)$$

et $\mu : C \to W(A\ ,\ B)$ par

$$\mu c = (\varepsilon c\ ,\ \gamma c)\ .$$

1° μ est une injection de C dans $W(A\ ,\ B)$, en effet $\mu c = \mu c' \Rightarrow \varepsilon c = \varepsilon c'$ et $\gamma c = \gamma c'$, donc en particulier $(\gamma c)(1) = (\gamma c')(1)$, soit

$$\alpha\Big(\Sigma(1)\ c\big(\Sigma(\varepsilon c)\big)^{-1}\Big) = \alpha\Big(\Sigma(1)\ c'\big(\Sigma(\varepsilon c')\big)^{-1}\Big)\ ,$$

d'où, α étant un isomorphisme et $\varepsilon c = \varepsilon c'$ étant vérifié,

$$c = c'\ .$$

2° μ est un homomorphisme. En effet

$$\begin{aligned}\gamma(cc')(y) &= \alpha\Big(\Sigma(y)\ cc'\big(\Sigma(y(\varepsilon cc'))\big)^{-1}\Big)\\ &= \alpha\Big(\Sigma(y)\ c\big(\Sigma(y(\varepsilon c))\big)^{-1}\ \Sigma\big(y(\varepsilon c)\big)\ c'\big(\Sigma(y(\varepsilon c)(\varepsilon c'))\big)^{-1}\Big)\\ &= (\gamma c)(y)(\gamma c')(y(\varepsilon c))\ .\end{aligned}$$

Ainsi

$$\mu c\, \mu c' = (\varepsilon c\ ,\ \gamma c)(\varepsilon c'\ ,\ \gamma c') = (\varepsilon cc'\ ,\ \gamma cc') = \mu cc'$$

Q. E. D.

2. Produit en couronne de monoïdes.

L'introduction de ce concept n'est pas nouvelle. Une certaine forme en a été introduite en [2].

Celle que nous donnons ici est plus générale, pour des raisons que nous donnerons dans la suite.

On part de trois monoïdes A , B , F (avec éléments neutres) dont deux, A et B , sont représentés comme monoïdes d'applications : A comme monoïde d'application de S dans lui-même, S étant simplement un ensemble sur lequel A opère par

$$(s\ ,\ a) \to sa\ ,\quad \forall\, s \in S\ ,\quad \forall\, a \in A\ ;$$

de même B comme monoïde d'application de T dans lui-même

$$(b\ ,\ t) \to bt\ ,\quad \forall\, t \in T\ ,\quad \forall\, b \in B\ .$$

Le produit en couronne $W(A\ ,\ F\ ,\ B)$ sera alors l'ensemble $A \times F^{S\times T} \times B$ muni de la loi de composition :

$$(a\ ,\ \varphi\ ,\ b)(a'\ ,\ \varphi'\ ,\ b') = (aa'\ ,\ \Psi\ ,\ bb')\ ,$$

où $\Psi(s\ ,\ t) = \varphi(s\ ,\ b't)\, \varphi'(sa\ ,\ t)$, ceci pour tout $(s\ ,\ t) \in S \times T$.

L'associativité de cette loi est immédiate.

L'élément $(1\ ,\ 1\ ,\ 1)$, où $1 \in F^{S\times T}$ est l'application qui envoie tout couple $(s\ ,\ t)$ sur l'élément neutre de F , est élément neutre, par suite $W(A\ ,\ F\ ,\ B)$ est bien un monoïde.

Comme précédemment, nous représenterons fidèlement $W(A\ ,\ F\ ,\ B)$ comme monoïde de matrices carrées à éléments pris dans $F \cup \{0\}$ où $0.f = f.0 = 0.0 = 0$ pour tout $f \in F$.

Ce sont des $(S \times T)(S \times T)$ matrices que l'on définit par

$$\mu(a\ ,\ \varphi\ ,\ b)_{(s,t)(s',t')} = \begin{cases} \varphi(s\ ,\ t') & \text{si}\quad sa = s' \quad \text{et} \quad t = bt' \\ 0 & \text{dans le cas contraire.} \end{cases}$$

La représentation μ est bien injective.

C'est une représentation, car

$$\left[\mu(a\,,\varphi\,,b)\,\mu(a',\varphi'\,,b')\right]_{(s,t)(s',t')}$$

$$= \sum_{s'',t''} \mu(a,\varphi\,,b)_{(s,t)(s'',t'')}\,\mu(a'\,,\varphi',b')_{(s'',t'')(s',t')}$$

$$= \begin{cases} \mu(a\,,\varphi\,,b)_{(s,t)(s'',t'')}\,\mu(a',\varphi',b')_{(s'',t'')(s',t')} \\ \qquad \text{s'il existe } s'',\ t'' \text{ tels que } \begin{cases} s'' = sa\,, & s' = s''a \\ t'' = bt'\,, & t = bt'' \end{cases} \\ 0 \quad \text{dans le cas contraire.} \end{cases}$$

Remarque 1. - La structure des matrices $\mu(a\,,\varphi\,,b)$ n'est pas quelconque : leur support est en effet obtenu en substituant dans la $S \times S$ matrice représentant l'application $s\,,\ a \to sa$ à chaque élément une $T \times T$ matrice

- nulle si l'élément substitué est nul,
- égale à la matrice représentant l'application $b\,,\ t \to bt$ si l'élément substitué est 1.

Ceci suggère que l'on pourrait, après avoir défini le mnoïde $A \otimes B$ comme étant le monoïde représenté par la famille de ces supports, définir, comme pour les groupes, le produit en couronne de deux facteurs.

Avec les deux définitions qui ont été données, il n'en est rien, la notion introduite pour les monoïdes est effectivement plus générale que celle qui concerne les groupes, telle qu'elle vient d'être définie.

Remarque 2. - Plus important est de remarquer ceci :

la convention adoptée au § 1 conduit à écrire

$$(b_1\,,\varphi_1)(b_2\,,\varphi_2)\ \dots\ (b_n\,,\varphi_n) = (b_1\,b_2 \dots b_n\,,\Psi)$$

où

$$\Psi(y) = \varphi_1(y)\ \varphi_2(yb_1)\ \varphi_3(yb_1\,b_2)\ \dots\ \varphi_n(yb_1\,b_2\,\dots\,b_{n-1})\ ;$$

la convention adoptée au § 2 conduit à

$$(a_1\,,\varphi_1\,,b_1)\ \dots\ (a_n\,,\varphi_n\,,b_n) = (a_1\,\dots\,a_n\,,\Psi\,,b_1\dots\,b_n)\ ,$$

où

$$\Psi(s\,,t) = \varphi_1(s\,,b_2\,\dots\,b_n\,t)\ \varphi_2(sa_1\,,b_3\,\dots\,b_n\,t)\ \dots\ \varphi_n(sa_1\,\dots\,a_{n-1}\,,t)\ .$$

D'où l'on voit qu'au § 2 les b n'opèrent pas sur T comme opèrent sur Y les b au § 1 , ou comme opèrent sur S les a au § 2, puisqu'en effet le produit

$(b_1 \ldots b_n)t$ est égal à $b_1 \cdot \big(b_2(\ldots (b_n\, t) \ldots)\big)$, donc les b, en tant qu'opérateurs sur T, se composent de droite à gauche.

Dans nos définitions du produit en couronne, figure donc un choix de l'ordre de composition des opérateurs.

Dans le cas du produit de groupes, ce choix n'implique rien d'autre qu'une convention d'écriture : en effet, B, groupe, est muni d'un anti-automorphisme naturel $b \to b^{-1}$, et le produit en couronne que l'on aurait pu définir par

$$(b\ ,\ \varphi)(b'\ ,\ \varphi') = (bb'\ ,\ \Psi) \quad \text{avec} \quad \Psi(y) = \varphi(y)\ \varphi'(by)$$

n'aurait pas été différent de $W(A\ ,\ \hat{B})$ où $\hat{B}$ est identique à B mais muni de la loi $b \circ b' = b'b$.

En effet, on a alors

$$\begin{cases} (b\ ,\ \varphi)(b'\ ,\ \varphi') = (b'b\ ,\ \Psi) \\ \Psi(y) = \varphi(y)\ \varphi'(yb) \end{cases}$$

et plus généralement

$$(b_1\ ,\ \varphi_1) \ldots (b_n\ ,\ \varphi_n) = (b_n \ldots b_1\ ,\ \Psi)$$

$$\Psi(y) = \varphi_1(y)\ \varphi_2(yb_1)\ \varphi_3(yb_2\, b_1) \ldots \varphi_n(yb_{n-1} \ldots b_1) .$$

Par contre, dans le cas des monoïdes, le choix que nous avons fait implique une option fondamentale, que l'on ne peut réduire par le même artifice.

3. Transducteurs.

Soit X^* (resp. Y^*) un monoïde libre engendré par l'alphabet X (resp. Y). Une application de $S \times X$ dans S, notée $s\ ,\ x \to sx$, peut être étendue en une représentation α de X^* dans S^S en posant

$$\left.\begin{aligned} s(fx) &= (sf)x \\ s(e_X) &= s \end{aligned}\right\} \qquad \forall\ s \in S\ ,\quad f \in X^*\ ,\quad x \in X\ ,$$

et, pour tout $f \in X^*$,

$$(\alpha f)(s) = sf\ .$$

De même une application de $X \times T \to T$, notée $x\ ,\ t \to xt$, étendue en une application de

$$X^* \times T \to T \quad \text{par} \quad (fx)t = f(xt)\ ,\quad (e_X)t = t\ ,$$

définit une représentation β de X^* dans T^T.

Considérons, α et β étant ainsi définies, le produit en couronne $W(\alpha X^* , Y^* , \beta X^*)$, et proposons-nous de définir les représentations μ de X^* dans ce produit. Il n'y a là aucune difficulté : on prendra

$$\mu x = (\alpha x , \varphi_x , \beta x) ,$$

où φ_x est absolument quelconque, et l'on en déduira

$$\mu f = (\alpha f , \varphi_f , \beta f) ,$$

où φ_f est donné par

$$\varphi_f(s , t) = \varphi_{x_1 \cdots x_n}(x , t)$$

$$= \varphi_{x_1}(s , x_2 \ldots x_n t) \varphi_{x_2}(sx_1 , x_3 \ldots x_n t) \ldots \varphi_{x_n}(sx_1 \ldots x_{n-1} , t) .$$

De plus, $\varphi_{e_x}(s , t) = e_y$ quel que soit (s , t) .

Ainsi, étant donnés X^* et Y^* , les deux ensembles S et T et les applications de $S \times X \to S$, $X \times T \to T$ comme plus haut, il suffit, pour définir une représentation μ de X^* dans $W(\alpha X^* , Y^* , \beta X^*)$, de se donner une application $\eta : S \times X \times T \to Y^*$. On posera en effet

$$\varphi_x(s , t) = \eta(s , x , t) .$$

Si l'on pose $\eta(s , f , t) = \varphi_f(s , t)$, $\forall f \in X^*$, on obtient une application

$$\eta : S \times X^* \times T \to Y^*$$

qui peut être définie récursivement par

$$\eta(s , fx , t) = \eta(s , f , xt) \eta(sf , x , t) .$$

On reconnait dans une telle application η une transduction bilatère comme elles ont été définies en [4].

D'où le nom de <u>transducteur</u> donné à la représentation μ , et le nom de <u>transduction</u> associée à μ donné aux applications

$X^* \to Y^*$,

$f \to \varphi_f(s_0 , t_0)$ pour tout couple s_0 , t_0 choisi à l'avance.

La forme matricielle donnée en [4] aux transductions découle immédiatement de la représentation canonique que nous avons donné d'un produit en couronne de trois monoïdes.

<u>Définition équivalente d'un transducteur</u>. - Considérons une représentation μ de X^* sur un monoïde M de matrices carrées à éléments 0 ou 1 , et soit $\bar{\mu}$

une représentation de X^* sur un monoïde de matrices à éléments pris dans $Y^* \cup \{0\}$ (où $\forall\, y \in Y^*$: $0.y = y.0 = 0.0 = 0$) telle que

$$\forall\, f \in X^*\,,\quad \mu f \text{ et } \overline{\mu} f \text{ aient même support.}$$

Toute représentation $\overline{\mu}$ est obtenue à partir de μ en substituant aux éléments non nuls des matrices μx , $x \in X$, des éléments de Y^* ; si les matrices μf sont des $I \times I$ matrices, on voit ainsi que l'on peut associer une représentation $\overline{\mu}$ à toute application ρ de $I \times X \times I$ dans Y^* en posant

$$\overline{\mu} x_{(i,i')} = \begin{cases} \rho(i\,,\,x\,,\,i') & \text{si } \mu x_{(i,i')} \neq 0 \\ 0 \text{ si } \mu x_{(i,i')} = 0\,. \end{cases}$$

Tout ceci nous permet de définir un <u>transducteur</u> au sens précédent.

Posons $S = M \times I$, et définissons

$$\alpha : M \to S^S \quad \text{par} \quad \alpha(m)(m'\,,\,i') = (m'm\,,\,i')\,,$$

$$\beta : M \to S^S \quad \text{par} \quad \beta(m)(m'\,,\,i') = (mm'\,,\,i')\,.$$

αM est isomorphe au monoïde des translations à droite de M , βM au monoïde des translations à gauche, α et β sont deux représentations.

$\overline{\alpha}$ et $\overline{\beta}$ désigneront $\mu \circ \alpha$ et $\mu \circ \beta$, respectivement.

Remarquons maintenant que, étant donnés

$$m_1\,,\, m_2 \ldots m_n \in M \text{ et } i\,,\, i' \in I\,,$$

il existe au plus une suite de couples $(i\,,\,i_1)$, $(i_1\,,\,i_2) \ldots (i_k\,,\,i_{k+1}) \ldots (i_{n-1}\,,i')$, telle que les éléments

$$m_{1(i,i_1)}\,,\, m_{2(i_1,i_2)}\,, \ldots\,,\, m_{k+1(i_k,i_{k+1})}\,, \ldots\,,\, m_{n(i_{n-1},i')}$$

soient tous non nuls.

Considérons alors $W(\alpha M\,,\, Y^* \cup \{0\}\,,\, \beta M) = H.$, et soit $\tilde{\mu} : X^* \to H$.

$$\tilde{\mu} f = (\overline{\alpha} f\,,\, \varphi_f\,,\, \overline{\beta} f)\,,$$

où

$$\varphi_f[(m\,,\,i)(m'\,,\,i')] = \begin{cases} \overline{\mu} f_{(i_1,i_2)} & \text{s'il existe } i_1\,,\, i_2 \text{ tel que } m_{i,i_1}\,,\, \mu f_{i_1,i_2}\,, \\ & \quad m'_{i_2,i} \text{ soient tous non nuls} \\ 0 & \text{dans le cas contraire.} \end{cases}$$

Je dis que $\tilde{\mu}$ est une représentation : en effet,

$$\tilde{\mu}f\ \tilde{\mu}g = (\overline{\alpha}f\ ,\ \varphi_f\ ,\ \overline{\beta}f)(\overline{\alpha}g\ ,\ \varphi_g\ ,\ \overline{\beta}g) = (\overline{\alpha}fg\ ,\ \Psi\ ,\ \overline{\beta}fg)\ ,$$

où

$$\Psi[(m\ ,\ i)(m'\ ,\ i')] = \varphi_f[(m\ ,\ i)(\mu gm'\ ,\ i')]\ \varphi_g[(m\ ,\ \mu f)(m'\ ,\ i')]\ ;$$

si cet élément est non nul, il est égal à

$$\overline{\mu f}(i_1,i_2)\ \overline{\mu g}(i_3,i_4)\ ,$$

avec $(i_1\ ,\ i_2)\ ,\ (i_3\ ,\ i_4)$ tels que

$$m_{i,i_1}\ ,\ \mu f_{i_1,i_2}\ ,\ \mu gm'_{i_2,i'} \neq 0$$

et

$$m\mu f_{i,i_3}\ ,\ \mu g_{i_3,i_4}\ ,\ m'_{i_4,i'} \neq 0\ .$$

Mais ceci implique que

$$m_{i,i_1}\ ,\ \mu f_{i_1,i_2}\ ,\ \mu g_{i_2,i_5}\ ,\ m'_{i_5,i'} \neq 0 \quad \text{pour un certain} \quad i_5$$

et

$$m_{i,i_6}\ ,\ \mu f_{i_6,i_3}\ ,\ \mu g_{i_3,i_4}\ ,\ m'_{i_4,i'} \neq 0 \quad \text{pour un certain} \quad i_6\ ,$$

d'où, d'après la remarque,

$$i_1 = i_6\ ,\quad i_2 = i_3\ ,\quad i_4 = i_5\ .$$

Par suite,

$$\overline{\mu f}(i_1,i_2)\ \overline{\mu g}(i_3,i_4) = \overline{\mu f g}(i_1,i_4)\ ,$$

et $i_1\ ,\ i_4$ est le seul couple d'indices tel que $m_{i,i_1}\ ,\ \mu fg_{i_1,i_4}\ ,\ m'_{i_4,i'}$ soient tous $\neq 0$.

Ainsi $\tilde{\mu}f\ \tilde{\mu}g = \tilde{\mu}\ fg$, et $\tilde{\mu}$ est une représentation.

Par extension, nous dirons que $\overline{\mu}$ est un transducteur en définissant les transductions associées à $\overline{\mu}$ comme les transductions associées à $\tilde{\mu}$.

Une transduction associée à $\tilde{\mu}$ est définie par le choix d'un couple $(m,\ i)(m'\ ,\ i')$. C'est l'application

$$f \to \varphi_f[(m\ ,\ i)(m'\ ,\ i')]\ .$$

En l'occurrence, c'est l'application qui envoie f sur $\overline{\mu f}(i_1,i_2)$, où $i_1\ ,\ i_2$ est le seul couple d'indices tel que $m_{i,i_1}\ ,\ \mu f_{i_1,i_2}\ ,\ m'_{i_2,i'}$ sont tous $\neq 0$. Celles de ces transductions qui correspondent aux couples $(1\ ,\ i)(1\ ,\ i')$, où 1 est la $I \times I$ matrice unité, élément neutre de M , seront dites <u>élémentaires</u> :

ce sont simplement les applications

$$f \to \overline{\mu} f_{(i,i')} \,, \qquad \text{pour } i \,,\, i' \text{ fixés.}$$

En manière de conclusion, nous dirons ceci :

La notion de produit en couronne introduite ici est bien justifiée, puisqu'elle seule permet de rendre compte du phénomène lié à la représentation d'un des monoïdes facteurs comme monoïde de matrices carrées à éléments 0 ou 1 .

Pour ce qui est des propriétés des transducteurs, c'est l'objet de notre travail actuel.

BIBLIOGRAPHIE

[1] KRASNER (M.) et KALOUJNINE (L.). - Produit complet de groupes de permutations et problème d'extension de groupes, III., Acta Scient. Math., Szeged, t. 14, 1951, p. 69-82.

[2] NEUMANN (B. H.). - Embedding theorems for semigroups, J. London math. Soc., t. 35, 1960, p. 184-192.

[3] NEUMANN (B. H.), NEUMANN (H.) and NEUMANN (P. M.). - Wreath products and varieties of groups, Math. Z., t. 80, 1962, p. 44-62.

[4] SCHÜTZENBERGER (Marcel P.). - A remark on finite transducers, Information and Control, t. 4, 1961, p. 185-196.