Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Maurice Koskas

Applications de la théorie des hypertas, II

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 18, nº 1 (1964-1965), exp. nº 5, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1964-1965__18_1_A5_0>

APPLICATIONS DE LA THÉORIE DES HYPERTAS, II.

par Maurice KOSKAS

Nous donnons dans cet exposé d'autres applications de la théorie des hypertas. Nous utilisons les notations déjà employées dans [4] et [5]. En particulier, D est un demi-groupe, $(D , \mathcal{R} , \mathcal{L})$ est le bi-hypertas qui lui est associé, $(E , \mathcal{Q})$ est un hypertas, $(E , \mathcal{Q}_1 , \mathcal{Q}_2)$ est un bi-hypertas.

1. Caractérisation des demi-groupes complètement simples sans zéro.

THÉORÈME 1. - Les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) $(D , \mathcal{R}' , \mathcal{L})$ est un bi-hypertas.

(b) $(D , \mathcal{R} , \mathcal{L}')$ est un bi-hypertas.

(c) D est complètement simple sans zéro.

(d) $ab = cd \implies \exists\, u \in D : \; b = ud \; , \; c = au$.

Démonstration.

(a) $\Longleftrightarrow$ (b). - $(D , \mathcal{R} , \mathcal{L}')$ est en effet le bi-hypertas inverse de $(D , \mathcal{R}' , \mathcal{L})$.

(a) $\Longleftrightarrow$ (d). - En effet si a , b sont deux éléments quelconques de D , l'égalité ${}_a\Gamma \circ \Theta_b = \Theta_b \circ {}_a\Gamma$ équivaut manifestement à la condition (d).

(c) $\implies$ (d). - Ceci découle immédiatement de la représentation matricielle de Rees des demi-groupes complètement simples sans zéro [6].

(d) $\implies$ (c). - Soient $a , b \in D$. De l'égalité $ab = ab$, il découle l'existence de $u \in D$ tel que $b = ub$, $a = au$. On a alors $b^2 = ub^2$; il existe donc $v \in D$ tel que $u = bv$, $b = vb^2$.

De même il existe $w \in D$ tel que $u = wa$, $a = a^2 w$.

D est donc inversif à gauche et à droite, et, par suite, est réunion de groupes, ceci en vertu d'un résultat de R. CROISOT [3].

On a d'autre part $a = au = abv$. D est donc simple sans zéro.

Un résultat classique [2] permet alors d'affirmer que D est complètement simple sans zéro.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE. - Tout sous-demi-groupe unitaire D' d'un demi-groupe complètement simple sans zéro est complètement simple sans zéro.

En effet D' vérifie manifestement la condition (d) du précédent théorème.

2. Rappels de résultats.

Nous avons établi dans [4] les résultats suivants :

THÉORÈME 2. - *Pour que* E *contienne un complexe* Ω*-net minimal, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient réalisées* :

(a) $\forall x \in E \, , \ \exists \, \theta \in \Omega \, : \ \theta(x) \neq \emptyset$.

(b) *Tout* Ω*-idéal de* E , *non vide, contient un* Ω*-idéal minimal* (1).

Dans ces conditions le cardinal de tout complexe Ω*-net minimal est égal au nombre de* Ω*-idéaux minimaux de* E .

En appliquant ce théorème à l'hypertas $(E \, , \Omega')$, il vient le théorème suivant.

THÉORÈME 3. - *Pour que* E *contienne un complexe* Ω*-générateur minimal, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient réalisées*.

(a) $E = \Omega E$.

(b) *Tout* Ω*-idéal de* E , *distinct de* E , *est contenu dans un* Ω*-idéal maximal* (1).

Dans ces conditions le cardinal de tout complexe Ω*-générateur minimal est égal au nombre de* Ω*-idéaux maximaux de* E .

3. Applications des théorèmes précédents.

(A). - Supposons D abélien et artinien ; D possède alors un complexe net minimal A (car tout idéal non vide contient un idéal manimal). De plus, D étant abélien, il possède au plus un idéal minimal. (Car l'intersection de deux idéaux non vides de D est un idéal non vide.) Il en résulte que A est réduit à un seul élément, autrement dit que D possède un élément net. Il est bien connu que D possède alors un sous-groupe comme idéal, c'est-à-dire est un homogroupe [7].

On a donc établi la proposition suivante (due à P. LEFEBVRE [8]).

PROPOSITION. - *Tout demi-groupe abélien et artinien est un homogroupe*.

---

(1) Rappelons que lorsqu'il n'existe pas de Ω-idéaux propres, E est considéré à la fois comme un Ω-idéal minimal et un Ω-idéal maximal.

(G. THIERRIN [7] a montré directement qu'un demi-groupe abélien fini est un homogroupe.)

(B). - Demi-groupes simples. - Supposons que D soit simple, et que la famille F_g de ses idéaux à gauche minimaux soit non vide.

On sait [2] alors que tout idéal à gauche de D est réunion d'idéaux à gauche minimaux. Donc D possède un complexe net à gauche minimal A , de même cardinal que F_g .

D'autre part, si D n'est pas simple à gauche, les idéaux à gauche maximaux de D sont ceux qui sont réunion de tous les idéaux minimaux de D sauf de l'un d'eux. Il y a donc autant d'idéaux à gauche minimaux que d'idéaux à gauche maximaux, et l'intersection de ces derniers est vide (2).

En outre, il est clair que tout idéal à gauche de D , distinct de D , est contenu dans un idéal à gauche maximal. Puisque on a $D = D^2$, D possède un complexe générateur à gauche, minimal, équipotent à A .

Notons enfin qu'il découle tout de suite de la forme des idéaux à gauche de D que les treillis qu'ils constituent est booléen.

Nous résumons tous ces résultats dans la proposition suivante.

PROPOSITION. - Tout demi-groupe D simple, possédant un idéal à gauche minimal, contient un complexe net à gauche minimal et un complexe générateur à gauche minimal ; ces complexes sont équipotents.

En outre l'intersection des idéaux à gauche maximaux de D est vide ou égale à D , et le treillis des idéaux à gauche de D est booléen.

Nous allons maintenant établir un ensemble de réciproques de cette proposition, fournissant des caractérisations des demi-groupes simples.

PROPOSITION. - Si le treillis des idéaux à gauche de D est booléen, D est simple.

En effet, dans ce cas, le complémentaire d'un idéal à gauche principal est un idéal à gauche. On a donc :

$$x \in Dy \implies y \in Dx \cup \{x\} .$$

Par suite, tout idéal à gauche principal est minimal, D est réunion de ses

(2) Si D était simple à gauche, cette intersection serait égale à D .

idéaux à gauche minimaux, donc est simple.

PROPOSITION. - *Si l'intersection des idéaux à gauche maximaux de* D *est vide,* D *est simple*.

Nous démontrons cette proposition en établissant deux lemmes sur les hypertas.

LEMME. - *S'il existe des* Ω*-idéaux propres, et si* E *est réunion de ses* Ω*-idéaux minimaux, alors l'intersection des* Ω*-idéaux maximaux de* E *est vide, et de plus* E *est réunion de ses* Ω'*-idéaux minimaux*.

Ce lemme est évident, car les Ω-idéaux maximaux de E sont les ensembles qui sont réunion de tous les Ω-idéaux minimaux de E sauf de l'un d'eux, et donc ont une intersection vide. De plus tout Ω'-idéal minimal est le complémentaire d'un Ω-idéal maximal.

En appliquant ce lemme à l'hypertas (E, Ω'), on obtient le lemme suivant.

LEMME. - *Si l'intersection des* Ω*-idéaux maximaux de* E *ext vide,* E *est réunion de ses* Ω*-idéaux minimaux*.

Ce lemme appliqué au tas $(D, \mathfrak{L})$ entraîne que D est réunion de ses idéaux à gauche minimaux, donc est simple.

C. Q. F. D.

4. Comparaison du cardinal de l'ensemble des Ω-idéaux minimaux et du cardinal de l'ensemble des Ω-idéaux maximaux.

Pour effectuer cette comparaison, supposons que E possède un complexe K, Ω-net minimal, et un complexe G, Ω-générateur minimal. Nous avons vu que le cardinal de K (resp. de G) est égal au cardinal de la famille des Ω-idéaux minimaux (resp. maximaux). Il suffit donc de comparer card K et card G.

Pour cela, remarquons que K et G sont des complexes Ω''-nets. ((E, Ω'') est l'hypertas stable associé à (E, Ω).) Supposons un moment que, moyennant certaines hypothèses, on ait montré que K est Ω''-net minimal (3). Dans ce cas, G contient un complexe Ω''-net minimal, équipotent à K, et par la suite on a :

$$\operatorname{card} K \leqslant \operatorname{card} G .$$

En d'autres termes, il y a moins de Ω-idéaux minimaux que de Ω-idéaux maximaux.

---

(3) Pour cela nous utiliserons le critère suivant :
Un complexe K de E, Ω-net, est Ω-net minimal si

$$x \in K , \quad \mathcal{O}(x) \cap K \neq \emptyset \implies \mathcal{O}(x) \cap K = \{x\} .$$

Le théorème suivant fournit une catégorie importante d'hypertas pour lesquels cette conclusion est valable.

THÉORÈME 4. - *Si* $(E, \mathcal{O})$ *vérifie la condition notée* (R)

$$x \in \mathcal{O}(u) , \quad y \in \mathcal{O}'(u) \implies \mathcal{O}x \cap \mathcal{O}y \neq \emptyset .$$

Alors tout complexe K , $\mathcal{O}$*-net minimal, est aussi* $\mathcal{O}''$*-net minimal*.

Démonstration. - Il faut montrer que si $k , k' \in K$, $\varphi \in \mathcal{O}''$, et si $k \in \varphi(k')$, on a $k = k'$.

φ est composée d'applications appartenant à $\mathcal{O}$ ou à $\mathcal{O}'$, c'est-à-dire d'applications de la forme $\mathcal{O} \in \mathcal{O}$ ou ${}_{\mathcal{O}'}\Gamma$ $(\mathcal{O}' \in \mathcal{O})$.

Supposons que ces applications soient au nombre de n . On va faire une récurrence sur n .

$n = 1$. - On a $k \in \mathcal{O}(k')$ ou $k \in {}_{\mathcal{O}'}\Gamma(k')$, avec $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}' \in \mathcal{O}$; soit

$$k \in \mathcal{O}(k') \quad \text{ou} \quad k' \in \mathcal{O}'(k) .$$

Ces relations entraînent $k = k'$, puisque K est $\mathcal{O}$-net minimal.

On fait alors l'hypothèse de récurrence suivante : si φ est composée de n applications appartenant à $\mathcal{O} \cup \mathcal{O}'$, $k = k'$. Montrons que l'on a la même conclusion lorsque φ est composée de $n + 1$ applications appartenant à $\mathcal{O} \cup \mathcal{O}'$.

Compte tenu de la relation ${}_{\mathcal{O}}\Gamma \circ {}_{\mathcal{O}'}\Gamma = {}_{\mathcal{O}'\mathcal{O}}\Gamma$, deux cas peuvent se présenter :

$$\varphi = {}_{\mathcal{O}_1}\Gamma \circ \mathcal{O}_2 \circ {}_{\mathcal{O}_3}\Gamma \circ \varphi_4 \circ \cdots \circ \varphi_{n+1} \ ; \quad \mathcal{O}_1 , \mathcal{O}_2 , \mathcal{O}_3 \in \mathcal{O} , \quad \varphi_4 , \cdots , \varphi_{n+1} \in \mathcal{O} \cup \mathcal{O}'$$

ou bien

$$\varphi = \mathcal{O}_1 \circ {}_{\mathcal{O}_2}\Gamma \circ \mathcal{O}_3 \circ \varphi_4 \circ \cdots \circ \varphi_{n+1} \ ; \quad \mathcal{O}_1 , \mathcal{O}_2 , \mathcal{O}_3 \in \mathcal{O} , \quad \varphi_4 , \cdots , \varphi_{n+1} \in \mathcal{O} \cup \mathcal{O}' .$$

Ces deux cas se traitent de la même façon. Supposons, par exemple, le second réalisé. On a donc :

$$k \in \mathcal{O}_1 \circ {}_{\mathcal{O}_2}\Gamma \circ \mathcal{O}_3 \circ \varphi_4 \circ \ldots \circ \varphi_{n+1} (k') .$$

Il existe $x , y \in E$ tels que :

$$k \in \mathcal{O}_1(x) , \quad y \in \mathcal{O}_2(x) \cap (\mathcal{O}_3 \circ \varphi_4 \circ \ldots \circ \varphi_{n+1})(k') .$$

En vertu de la condition (R) appliquée à k et y , il existe $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}' \in \mathcal{O}$ tels que $\mathcal{O}(k) \cap \mathcal{O}'(y) \neq \emptyset$.

On a $k \in {}_{\mathcal{O}}\Gamma \circ \mathcal{O}'(y)$, soit :

$$k \in {}_{\mathcal{O}}\Gamma \circ (\mathcal{O}' \circ \mathcal{O}_3) \circ \varphi_4 \circ \cdots \circ \varphi_{n+1}(k') .$$

L'hypothèse de récurrence entraîne $k = k'$.

C. Q. F. D.

Exemple d'hypertas vérifiant la condition (R) .

(a) Si (E , Ω) est un tas, et si Ω est un demi-groupe abélien, (E , Ω) vérifie la condition (R) .

(b) Même conclusion si E est réunion de ses Ω-idéaux minimaux et est tel que, pour tout $x \in E$, il existe $\mathcal{O} \in \Omega$ avec $\mathcal{O}(x) \neq \phi$.

Dans ce cas en effet, les relations $x \in \mathcal{O}(u)$, $y \in \mathcal{O}'(u)$ entraînent que x et y appartiennent à un même Ω-idéal minimal L . On a $L = \Omega x$, donc y appartient à Ωx .

On peut maintenant appliquer le théorème précédent à l'hypertas (E , Ω') . Il en résulte le théorème suivant.

THÉORÈME 5. - Si (E , Ω) vérifie la condition notée (R')

$$\Omega x \cap \Omega y \neq \phi \implies \exists\, u \in E : \ x \in \Omega u , \ y \in \Omega u ,$$

alors tout complexe G , Ω-générateur minimal est Ω''-net minimal.

La démonstration est évidente car (E , Ω) vérifie la condition (R) si et seulement si (E , Ω') vérifie la condition (R') .

Exemples d'hypertas vérifiant la condition (R') .

(a) Si (E , Ω) est injectif et surjectif, et si Ω est un demi-groupe abélien, (E , Ω) vérifie la condition (R') .

En effet (E , Ω') est alors un tas vérifiant la condition (R) .

(b) Même conclusion si E est réunion de ses Ω-idéaux minimaux et vérifie $E = \Omega E$.

Dans ce cas, en effet, la relation $\Omega x \cap \Omega y \neq \phi$ entraîne que x et y appartiennent à un même idéal minimal L . Il existe d'autre part $u \in E$, tel que x appartient à Ωu . On a alors $L = \Omega u$.

Applications des théorèmes 5 et 6.

Rappel. - Etant donnée une partie A de D , nous posons :

$$\mathcal{R}(A) = \{x \in D : x^n \in A \quad \text{pour un} \quad n > 0\}$$

$$\text{si} \quad n > 0 , \quad A^{(n)} = \{x \in D , \ \exists \ a \in A : \ x = a^n\} .$$

PROPOSITION - <u>Si</u> D <u>possède un complexe</u> A <u>tel que</u> $D = \mathcal{R}(A)$, <u>minimal pour cette condition, et un complexe</u> B <u>tel que</u> $D = \bigcup_{n>0} B^{(n)}$, <u>minimal pour cette condition, on a</u> :

$$\text{card } A \leqslant \text{card } B .$$

<u>Démonstration</u>. - Soit $\mathcal{P}$ le demi-groupe abélien constitué par les applications de la forme $x \to x^n$ ($x \in D$, n entier > 0) .

$(D , \mathcal{P})$ est un tas vérifiant la condition (R) , A est $\mathcal{P}$-net minimal, B est $\mathcal{P}$-générateur minimal.

La proposition découle alors du théorème 5.

C. Q. F. D.

Soit maintenant un demi-hypergroupe H . Examinons quand l'hypertas $(H , \mathcal{L})$ vérifie les conditions (R) ou (R') .

Il est immédiat que $(H , \mathcal{L})$ vérifie la condition (R) si et seulement si

$$x \in H \star u , \quad y \in H \star u \implies H \star x \cap H \star y \neq \emptyset .$$

Cette condition est notée (R_g) .

D'autre part, $(H , \mathcal{L})$ vérifie la condition (R') si et seulement si

$$H \star x \cap H \star y \neq \emptyset \implies \exists \ u \in H : \ x \in H \star u , \quad y \in H \star u .$$

Cette condition est notée (R'_g) .

(Evidemment ces conditions sont également définies lorsque H est remplacé par D .)

Il découle alors des théorèmes 5 et 6 le théorème suivant.

THÉORÈME 7. - <u>Supposons que</u> H <u>possède un complexe net à gauche minimal</u> K , <u>et un complexe générateur à gauche minimal</u> G [4].

(a) <u>Si</u> H <u>vérifie la condition</u> (R_g) , <u>on a</u>

$$\text{card } K \leqslant \text{card } G ;$$

---

[4] Ceci est réalisé par exemple lorsque H est artinien et noethérien à gauche, et vérifie $H \star H = H$.

<u>il y a moins d'idéaux à gauche minimaux que d'idéaux à gauche maximaux</u>.

(b) <u>Si</u> H <u>vérifie la condition</u> (R'_g) , <u>on a</u>

$$\text{card } G \leqslant \text{card } K \; ;$$

<u>il y a moins d'idéaux à gauche maximaux que d'idéaux à gauche minimaux</u>.

Nous allons maintenant examiner le cas où H est remplacé par D .

(a) Si D est simple et réunion de ses idéaux à gauche minimaux, il vérifie (R_g) et (R'_g) . On a vu plus haut que D possède un complexe net à gauche minimal, et un complexe générateur à gauche minimal.

On retrouve alors l'égalité déjà mentionné entre les cardinaux de ces complexes.

(b) Si D est abélien, il vérifie (R_g) . Mais dans un tel demi-groupe, il existe au plus un idéal minimal, et donc l'inégalité card $K \leqslant$ card G du théorème 5 est ici sans intérêt.

Toutefois, on peut affiner de la façon suivante l'étude :

D est dit <u>quasi abélien à gauche</u> si

$$\forall a \, , \, b \, , \, c \in D \, , \quad abc = bac \, .$$

Il est clair que D est quasi abélien à gauche si et seulement si le demi-groupe $\mathcal{L}$ des translations à gauche est abélien ; dans ce cas le tas $(D \, , \, \mathcal{L})$ vérifie la condition (R_g) , et on peut lui appliquer le théorème 5.

Nous n'insistons pas.

(c) Rappolons une définition, due à P. DUBREIL [1].

D est dit <u>réversible à gauche si</u>

$$\forall x \, , \, y \in D \, , \quad Dx \cap Dy \neq \emptyset \, .$$

Evidemment un demi-groupe réversible à gauche vérifie (R_g) .

Voici deux exemples de demi-groupes réversibles à gauche.

<u>Tout homogroupe est réversible à gauche</u>. - En effet, supposons D un homogroupe, et soit e son élément unitif, c'est-à-dire l'élément neutre du groupe g , idéal de D. Soient $x \, , \, y \in D$. On a $ex \in g$, $ey \in g$.

Puisque g est un groupe, il existe $u \in g$, tel que $ex = uey$. Donc

$$Dx \quad Dy \neq \emptyset \, .$$

<u>Tout demi-groupe réunion de groupes dont les indempotents commutent est réversible à gauche</u>. - Soit D un tel demi-groupe, et soient $x \, , \, y \in D$. Il existe e , f

idempotents de D , x' , $y' \in D$ tels que $e = x'x$, $f = y'y$. On a

$$fe = fx'x = ef = ey'y .$$

Donc $Dx \cap Dy \neq \emptyset$.

(d) Supposons que D soit une réunion de groupes dont les idempotents commutent, et de plus que, pour tous idempotents e , $f \in D$, il existe un idempotent $g \in D$ tel que $e = ge$, $f = gf$. (Ceci est par exemple réalisé lorsque l'ensemble des idempotents de E forme un treillis.)

Dans ce cas D vérifie non seulement la condition (R_g) , mais aussi la condition (R'_g) .

En effet soient x , $y \in D$. Il existe deux idempotents e et f tels que $x = xe$, $y = yf$. Il existe donc aussi un idempotent g tel que $e = eg$, $f = fg$. On a

$$x = xeg \in Dg , \quad y = yfg \in Dg .$$

De ce qui précède découle tout de suite le théorème suivant.

THÉORÈME 8. - Supposons D globalement idempotent, artinien et noethérien à gauche (par exemple fini et vérifiant $D^2 = D$).

(a) Si D est réversible à gauche (en particulier si D est un homogroupe, ou une réunion de groupes dont les idempotents commutent), il y a moins d'idéaux à gauche minimaux que d'idéaux à gauche maximaux.

(b) Si D est réunion de groupes, que deux idempotents quelconques commutent et possèdent un diviseur commun, il y a autant d'idéaux à gauche minimaux que d'idéaux à gauche maximaux.

BIBLIOGRAPHIE

[1] DUBREIL (Paul). - Contribution à la théorie des demi-groupes. - Paris, Gauthier-Villars, 1941 (Mém. Acad. Sc. Inst. France, 2e série, t. 63, nº 3, 52 p.).

[2] CLIFFORD (A. H.) and PRESTON (G. B.). - The algebraic theory of semigroups, Vol. 1. - Providence, American mathematical Society, 1961 (Mathematical Surveys, 7).

[3] CROISOT (Robert). - Demi-groupes inversifs et demi-groupes réunions de demi-groupes simples, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 3e série, t. 70, 1953, p. 361-379.

[4] KOSKAS (Maurice). - Les hypertas, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et Théorie des nombres, 16e année, 1962/63, nº 10, 42 p.

[5] KOSKAS (Maurice). - Application de la théorie des hypertas aux demi-groupes, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et Théorie des nombres, 17e année, 1963/64, n° 3, 22 p.

[6] REES (D.). - On semi-groups, Proc. Cambr. phil. Soc., t. 36, 1940, p. 387-400.

[7] THIERRIN (Gabriel). - Contribution à la théorie des équivalences dans les demi-groupes, Bull. Soc. math. France, t. 83, 1955, p. 103-159 (Thèse Sc. math. Paris, 1954).

[8] LEFEBVRE (P.). - Sur certaines conditions minimales en théorie des demi-groupes, Annali di Mat., 4e série, t. 59, 1962, p. 77-163 (Thèse Sc. math., Paris, 1962).