Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Roger Desq

Structures des demi-groupes ayant tous leurs sous-demi-groupes homomorphiques

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 18, n° 1 (1964-1965), exp. n° 3, p. 1-23
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1964-1965__18_1_A3_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
18e année, 1964/65, n° 3

23 novembre 1964

STRUCTURES DES DEMI-GROUPES AYANT TOUS LEURS SOUS-DEMI-GROUPES HOMOMORPHIQUES

par Roger DESQ

1. Introduction.

Dans ce même séminaire, le 23 mars 1964, Pierre LEFEBVRE a exposé un travail de D. W. MILLER [9], travail dans lequel l'auteur donnait une généralisation des groupes hamiltoniens. Si l'image homomorphe d'un demi-groupe contient un élément neutre 1 [resp. un zéro 0], l'auteur appelle 1-noyau [resp. 0-noyau] l'image réciproque de cet élément. Dans une première partie, il étudie les demi-groupes D dans lesquels tout sous-demi-groupe non trivial est le 1-noyau d'un homomorphisme convenable de D ; la fin de l'article est consacrée à la caractérisation des demi-groupes D dans lesquels tout sous-demi-groupe non trivial est le 0-noyau d'un homomorphisme de D .

Si un sous-demi-groupe S du demi-groupe D est le 1-noyau d'un homomorphisme, S est en particulier unitaire. L'étude des demi-groupes ayant tous leurs sous-demi-groupes non triviaux unitaires est donc un problème plus général.

THÉORÈME 1.1. - Tout sous-demi-groupe non trivial d'un demi-groupe D est unitaire à droite si, et seulement si,

- D est un demi-groupe d'ordre 2 ,
- ou bien si D est isomorphe au produit direct d'un zéro-demi-groupe à gauche par un groupe périodique.

Supposons que tout sous-demi-groupe non trivial de D soit unitaire à droite. Soit x un élément de D ; considérons $S = \{x^2 , x^3 , \dots , x^4 , \dots\}$, si x^2 est différent de x^3 , S est un sous-demi-groupe non trivial qui contient $x.x^2$ et x^2 , S contient x . Pour tout élément x de D , nous avons donc $x^2 = x^3$ ou $x = x^n$ $(n \geqslant 3)$. D est un demi-groupe périodique, l'ensemble I de ses idempotents n'est pas vide.

Soient e et f deux idempotents distincts de D . Si ef n'est pas un idempotent, considérons le sous-demi-groupe S engendré par ef ; S n'est pas trivial, donc les relations $e.ef \in S$, $ef \in S$, donnent $e \in S$, c'est-à-dire $e = (ef)^n$ et $ef = e$, ce qui est impossible. I est stable.

Si ef est différent de fe , considérons $T = \{ef , fe , efe , fef\}$; T est un sous-demi-groupe non trivial, donc T contient e et f .

$$e = ef \implies T = \{e , fe\} \implies f = fe .$$

$$e = fe \implies e = efe .$$

$$e = efe \implies \left\{\begin{array}{l} \quad f = ef \implies f = fef \\ \text{ou } f = fe \implies f = fef \\ \text{ou } f = fef \end{array}\right\} \implies f = fef ;$$

$$e = fef \implies e = ef \implies f = fe \implies f = fef = e \quad \text{(impossible)} .$$

Dans tous les cas, on a $e = efe$, $f = fef$. I est un demi-groupe rectangulaire. En particulier, les relations $ef = fe = e$ donnent $f = fef = fe = e$; les idempotents sont tous primitifs ; en outre, si D contient un zéro, il ne contient pas d'autre idempotent.

D contient un zéro 0 . - Un élément x de D vérifie $x^2 = x^3 = x^4$ mais alors x^2 est un idempotent donc égal à 0 , ou bien $x = x^n$ mais alors x appartient au sous-groupe maximal de l'unique idempotent 0 de D , x est égal à 0 . Si x est différent de 0 , $S = \{x , 0\}$ est un sous-demi-groupe non trivial qui contient tout élément **y** de D , puisque $y.0 = 0$ appartient à S . D est donc égal à $\{x , 0\}$, où l'on a $x^2 = 0$.

D ne contient pas d'élément zéro. - D est simple. En effet, soit I un idéal de D ; I est un sous-demi-groupe non trivial de D , les relations $x \in D$, $i \in I$, $xi \in I$ entraînent $x \in I$. D'après l'étude des idempotents, D est donc complètement simple,

$$D \simeq \mathfrak{M}(G ; I , \Lambda ; P) \qquad \text{(notations de [2])} .$$

Le groupe G ne contient qu'un seul élément $G = \{1\}$; supposons d'abord que I contienne deux éléments distincts i et j , $S = \{(1 , i , \lambda) , (1 , j , \lambda)\}$ est un sous-demi-groupe non trivial ; la relation

$$(1 , i , \nu)(1 , i , \lambda) = (1 , i , \lambda)$$

montre que $(1 , i , \nu)$ appartient à S , $0 = \lambda$, donc Λ ne contient qu'un seul élément, D est un zéro-demi-groupe à gauche.

I ne contient qu'un seul élément i ; considérons

$$S = \{(1 , i , \lambda) , (1 , i , \mu)\} , \qquad \text{si } \lambda \neq \mu , \quad \forall \nu \in \Lambda ,$$

S contient également $(1 , i , \nu)$, car $(1 , i , \nu)(1 , i , \lambda) = (1 , i ,\lambda)$. Λ contient au maximum deux éléments distincts, D est un zéro-demi-groupe à droite d'ordre 2 .

Supposons maintenant que l'ordre de G soit supérieur à 1 ,

$$S_{i,\lambda} = \{(g\ ,\ i\ ,\ \lambda)\ ,\ \ g \in G\}$$

est un sous-groupe non trivial ; la relation $(1\ ,\ i\ ,\ \nu)(1\ ,\ i\ ,\ \lambda) = (p_{\nu i}, i, \lambda)$ montre que S contient $(1\ ,\ i\ ,\ \nu)$.

La fin de la démonstration directe et la réciproque résultent alors du théorème 3.5, chapitre II de ma thèse [3]. De ces deux théorèmes, on déduit :

COROLLAIRE 1.1. - Si l'ordre du demi-groupe D est plus grand que 2 , il y a équivalence entre les propriétés suivantes :

(a) Tout sous-demi-groupe de D est unitaire à droite.

(b) Tout sous-demi-groupe non trivial de D est unitaire à droite.

COROLLAIRE 1.2. - Tout sous-demi-groupe non trivial d'un demi-groupe D est unitaire si, et seulement si, D est un demi-groupe d'ordre 2 , ou si D est un groupe périodique.

Il semble cependant qu'une meilleure généralisation de la notion de groupe hamiltonien doit faire intervenir les relations d'équivalence. En effet, dire que tout sous-groupe d'un groupe est distingué équivaut à dire : Pour tout sous-groupe S de G , il existe une équivalence compatible admettant S comme classe. Rappelons qu'un complexe H d'un demi-groupe D est dit homomorphique [resp. homomorphique à droite], s'il existe dans D une relation d'équivalence régulière [resp. régulière à droite] admettant H comme classe [11],[3].

Dans la suite, D^* désignera le demi-groupe obtenu en adjoignant à D un élément unité. Si $a , b , \ldots , \ell$ sont des éléments de D , $(a , b , \ldots , \ell)$ désignera le sous-demi-groupe de D engendré par ces éléments ; si (a) est un demi-groupe cyclique, $[a]$ représentera sa période. Un sous-demi-groupe S de D est homomorphique à droite [resp. homomorphique], si les conditions $s \in S$, $s' \in S$, $x \in D^*$, $sx \in S$ [resp. $s \in S$, $s' \in S$, $u \in D^*$, $v \in D^*$, $usv \in S$] entraînent $s'x \in S$ [resp. $us'v \in S$]. Nous dirons qu'un demi-groupe, qui a tous ses sous-demi-groupes homomorphiques [resp. homomorphiques à droite], vérifie la condition (A) [resp. (A_d)].

LEMME 1.1. - Si D est un demi-groupe vérifiant la condition (A_d) ,

1° D est périodique ;

2° La période de tout sous-demi-groupe cyclique commence à un rang inférieur ou égal à 3 .

Soit a un élément de D ; considérons le sous-demi-groupe S engendré par a^2 et a^5 , nous avons :

$$a^2 \in S \ , \quad a^4 \in S \ , \quad a^5 \in S \ ,$$

on en déduit

$$a^3 \in S \ ,$$

et par suite, il existe un entier n différent de 3 tel que l'on ait

$$a^3 = a^n \ .$$

THÉORÈME 1.2. - _Si_ D _est un demi-groupe cyclique, il y a équivalence entre les deux propositions_ :

(1) _Tout sous-demi-groupe de_ D _est homomorphique_.

(2) D _est fini, et sa période commence à un rang inférieur ou égal à_ 3 .

D'après le lemme, (1) entraîne (2). Inversement, soit S un sous-demi-groupe du demi-groupe cyclique D différent de D . Si a engendre D , $S \cap [a]$ est un sous-groupe de $[a]$; si $x \in [a]$, x^{-1} désignera l'inverse de cet élément dans $[a]$. Les relations

$$s \in S \cap [a] \ , \quad x \in D \ , \quad sx \in S \ , \quad s' \in S$$

entraînent successivement :

$$s^{-1} \in S \ , \quad s'x = s'x.s^{-1} s = s's^{-1}.sx \ , \quad s'x \in S \ .$$

Il reste donc à considérer le cas suivant :

$$s = a^2 \in S \ , \quad x = a^q \ , \quad sx \in S \ , \quad a^3 = a^n \quad (\ n \ \text{ minimal}) \ ;$$

on peut supposer que q est un nombre impair, car autrement x appartient à S . Si n est pair, a^n appartient à S , donc S est égal à $\{a^2 , a^3 , \ldots, a^{n-1}\}$. Si n est impair, on a $q < n - 1$, d'où $2 + q \leqslant n$; $sx \in S$ entraîne alors $a^n \in S$; S a la même structure que précédemment, et par suite est bien homomorphique.

2. Structure de l'ensemble des idempotents.

Dans toute la suite, sauf précision supplémentaire, D représentera un demi-groupe vérifiant la condition (A_d) . D'après le lemme 1.1, D est périodique, l'ensemble I de ses idempotents n'est pas vide.

Soient e et f deux éléments de I ; considérons $S = (e , f)$, la forme des éléments de S montre que ce sous-demi-groupe est égal à

$$(e) \cup (f) \cup (ef) \cup (fe) \cup (efe) \cup (fef) \ .$$

Désignons respectivement par g , g' , h , h' les idempotents de (ef) , (fe) , (efe) , (fef) . Comme g appartient à (ef) , on a

$$g = (ef)^k ,$$

on en déduit

$$ge = (ef)^k e = (ef)^{2k} e = (ef)^k e.(ef)^k e = (ge)^2 ,$$

d'où il résulte

$$ge \in (efe) \cap I \qquad \text{et} \qquad ge = h .$$

On vérifie de même que fg est égal à h' , on a donc

$$hh' = ge.fg = g.ef .$$

Supposons maintenant que le produit ef n'appartienne pas à I . Considérons $S' = (e , (ef)^2)$; de

$$e \in S' , \quad (ef)^2 \in S' , \quad (ef)^2 f \in S' ,$$

résulte

$$ef \in S' , \qquad \text{c'est-à-dire} \quad ef = (ef)^n , e , \quad \text{ou} \quad (ef)^n e .$$

Comme ef n'est pas un idempotent, on a $ef = (ef)^k$, ce qui donne

$$(ef) = [ef] , \quad hh' = g.ef = ef ,$$

car g est un élément unité dans $[ef]$.

Le sous-demi-groupe $T = (h , h')$, étant inclus dans $(ef) \cup (fe) \cup (efe) \cup (fef)$, contient au plus quatre idempotents distincts. Nous pouvons donc considérer deux idempotents e , f , dont le produit n'appartient pas à I , et qui engendrent un sous-demi-groupe S ne contenant au plus que quatre idempotents distincts. D'après la thèse de M. EGO [6] (chapitre II), le seul cas possible est celui où e , f , g , g' sont distincts, où h est égal à e , h' à f ; mais alors $T = \{e,g\}$ est un sous-demi-groupe de D . Les conditions

$$e \in T , \quad g \in T , \quad gf = g \in T \qquad \text{entraînent} \qquad ef \in T ,$$

ef est encore un idempotent. Nous avons donc démontré le théorème suivant :

THÉORÈME 2.1. - Si un demi-groupe D vérifie la condition (A_d) , l'ensemble I de ses idempotents est stable.

D'après un résultat de D. MAC LEAN, il existe un demi-treillis Σ , et une famille de sous-demi-groupes rectangulaires disjoints de I indexés par Σ : $\{B_\alpha , \alpha \in \Sigma\}$ tels que $I = \bigcup_{\alpha \in \Sigma} B_\alpha$ et $B_\alpha B_\beta \subseteq B_{\alpha\beta}$ pour tout couple α , β d'éléments de Σ [8].

LEMME 2.1. - Σ <u>ne peut contenir trois éléments</u> α , β , γ <u>vérifiant</u>

$$\gamma < \beta < \alpha .$$

En effet, supposons que Σ contienne trois éléments vérifiant ces relations ; soient e un élément de B_α , f un élément de B_β , et g un élément de B_γ . Considérons le sous-demi-groupe S égal à (e , g , gf) ; S est contenu dans $B_\alpha \cup B_\gamma$, et S devrait contenir ef qui est dans B_β , d'où une impossibilité. Nous voyons donc que Σ contient un plus petit élément noté o , et que le produit de 2 éléments différents de Σ est égal à o .

LEMME 2.2. - <u>Si</u> α <u>est un élément de</u> Σ <u>différent de</u> o , B_α <u>est un zéro-demi-groupe à gauche</u>.

Soient e , f deux éléments quelconques de B_α , g un élément de B_o . Considérons $S = (e , g , gf)$; nous avons

$$ef \in S , \quad ef \in B_\alpha , \quad S \cap B_\alpha = \{e\} ,$$

et par suite

$$ef = e .$$

B_o est un demi-groupe rectangulaire noté B , B est le produit direct d'un zéro-demi-groupe à gauche L par un zéro-demi-groupe à droite R . Un élément quelconque de B pourra donc être noté (ℓ , r) , avec $\ell \in L$, $r \in R$.

LEMME 2.3. - <u>Si</u> B <u>n'est pas un zéro-demi-groupe à gauche</u>, Σ <u>est égal à</u> $\{o\} \cup \Lambda \cup \Delta$;

- <u>si</u> Λ <u>n'est pas vide, il ne contient qu'un seul élément</u>, $\Lambda = \{1\}$, <u>et on a</u>

$$\forall\, e \in B_1 , \quad \forall\, b \in B , \qquad be = b ;$$

- $\forall\, \alpha \in \Delta$, <u>il existe un élément</u> r_α <u>de</u> R <u>tel que l'on ait</u>

$$\forall\, (\ell , r) \in B , \quad \forall\, f \in B_\alpha , \qquad (\ell , r).f = (\ell , r_\alpha) .$$

<u>Si</u> B <u>est un zéro-demi-groupe à gauche, nous avons</u>

$$\forall\, e \in I , \quad \forall\, b \in B , \qquad be = b .$$

Posons $\Sigma = \{o\} \cup A$. Soient α un élément de A , e un élément de B_α . Si b est un élément quelconque de B , be appartient à B , et be.e est égal à be ; il existe donc au moins un élément $b = (\ell , r)$ de B tel que be soit égal à b . Mais alors, si f est un élément quelconque de B_α , nous avons

$$bf = be.f = b.ef = be = b .$$

Si B est un zéro-demi-groupe à gauche et si b' est un autre élément de B, nous avons

$$b'e = b'b.e = b'.be = b'b = b' .$$

Supposons que B n'est pas un zéro-demi-groupe à gauche, et qu'il existe un autre élément $b' = (\ell', r')$ de B vérifiant

$$r \neq r' , \qquad b'e = b' .$$

Soit (λ , ρ) un élément quelconque de B, $\{(\lambda , \rho) , (\lambda , r)\}$ est un sous-demi-groupe de D ; des relations

$$(\lambda , r)e = (\lambda , r)(\ell , r)e = (\lambda , r)(\ell , r) = (\lambda , r) ,$$

nous déduisons

$$(\lambda , \rho)e \in \{(\lambda , \rho) , (\lambda , r)\} .$$

On a de même

$$(\lambda , \rho)e \in \{(\lambda , \rho) , (\lambda , r')\} ,$$

d'où $(\lambda , \rho)e = (\lambda , \rho)$ puisque r est différent de r'. A est donc la réunion de deux ensembles disjoints, peut-être vides, A_1 et A_2, tels que

$$\forall\ \alpha \in A_1 , \quad \forall\ e \in B_\alpha , \quad \forall\ b \in B , \qquad be = b ,$$

$$\forall\ \beta \in A_2 , \quad \exists\ r_\beta \in R \text{ tel que la relation } (\ell , r)e = (\ell , r) ,$$
$$\text{vérifiée pour un } e \text{ de } B_\beta , \text{ entraîne } r = r_\beta .$$

Précisons la multiplication dans ce dernier cas ; nous savons que, $e \in B_\beta$ étant donné, il existe un élément (ℓ_β , r_β) de B vérifiant

$$(\ell_\beta , r_\beta)e = (\ell_\beta , r_\beta) .$$

On a $(\ell , r)e = (\ell , r)(\ell_\beta , r)e$, posons

$$(\ell_\beta , r)e = (\ell' , r') ;$$

de $(\ell_\beta , r)e.e = (\ell_\beta , r)e$ résulte $r' = r_\beta$, et par suite

$$(\ell , r)e = (\ell , r)(\ell' , r_\beta) = (\ell , r_\beta) .$$

Pour terminer la démonstration du lemme, il nous reste à vérifier que A_1 ne peut contenir au plus qu'un seul élément. Supposons que A_1 contienne deux éléments distincts α et β ; soient e un élément de B_α, f un élément de B_β, (ℓ , r) un élément de B. Le produit ef appartient à B ; nous pouvons poser

$ef = (\ell' , r')$. Les relations

$$(\ell , r).ef = (\ell , r)e.f = (\ell , r)f = (\ell , r)$$

entraînent

$$(\ell , r)(\ell' , r') = (\ell , r') = (\ell , r) .$$

B n'étant pas un zéro-demi-groupe à gauche, r peut être choisi différent de r', nous aboutissons donc à une contradiction.

LEMME 2.4. - <u>Pour tout élément</u> e <u>de</u> I , <u>il existe un élément</u> ℓ_e <u>de</u> L <u>tel que l'on ait</u> :

- <u>si</u> $(\ell , r) \in B$, $e(\ell , r) = (\ell_e , r)$,
- <u>si</u> $\beta \in \Delta$, $e \notin B_\beta$, $f \in B_\beta$, $ef = (\ell_e , r_\beta)$,
- <u>si</u> $\alpha \in \Delta$, $e \in B_\alpha$, $f \in B_1$, $ef = (\ell_e , r_\alpha)$.

Lorsque e appartient à B , ce lemme est vérifié en posant $e = (\ell_e , r_e)$, ce que nous ferons dans la suite. Soient e un élément de B_α ($\alpha \in \Lambda \cup \Delta$), $b = (\ell , r)$ un élément de B ; eb appartient à B , posons $eb = (\ell' , r')$. La relation $eb = eb.b$ donne

$$(\ell' , r') = (\ell' , r')(\ell , r) = (\ell' , r) ,$$

d'où il résulte que r' est égal à r et que ℓ' est seulement fonction de e et de ℓ ; $\ell' = \varphi(e , \ell)$. Considérons le sous-demi-groupe S engendré par e et $\big(\varphi(e , \ell) , r\big)$; S est égal à $\Big\{e , \big(\varphi(e , \ell) , r\big) , \big(\varphi(e , \ell) , r_\alpha\big)\Big\}$. Si λ est un élément de L , la relation

$$\big(\varphi(e , \ell) , r\big)(\lambda , r) = \big(\varphi(e , \ell) , r\big)$$

montre que l'élément $e(\lambda , r) = \big(\varphi(e , \lambda) , r\big)$ appartient à S . On en déduit $\varphi(e , \ell) = \varphi(e , \lambda)$; $\varphi(e , \ell)$ est indépendant de ℓ ; e étant donné, il existe donc un élément ℓ_e de L tel que l'on ait

$$\forall\ (\ell , r) \in B , \qquad e(\ell , r) = (\ell_e , r) .$$

Supposons que $\Lambda \cup \Delta$ contienne un élément β différent de α ; soit f un élément de B_β , ef appartient à B , $ef = (\ell' , r')$. Les relations

$$(\ell , r).ef = (\ell , r)e.f , \qquad ef.(\ell , r) = e.f(\ell , r)$$

entraînent,

- si $\beta \neq 1$, $(\ell , r') = (\ell , r_\alpha)f = (\ell , r_\beta)$;
- si $\beta = 1$, $(\ell , r') = (\ell , r_\alpha)$;
- et pour β quelconque, $(\ell' , r) = e(\ell_f , r) = (\ell_e , r)$.

Ceci complète la démonstration du lemme.

THÉORÈME 2.2.

(a) Si D est un demi-groupe vérifiant la condition (A_d), l'ensemble I de ses idempotents est stable et a la structure suivante :

$$I = B + B_1 + \bigcup_{\alpha\in\Delta} B_\alpha \quad \text{ou} \quad I = B + \bigcup_{\alpha\in\Delta} B_\alpha .$$

B est un demi-groupe rectangulaire, produit direct d'un zéro-demi-groupe à gauche L par un zéro-demi-groupe à droite R ; B_1 et les B_α, $\alpha \in \Delta$, sont des zéro-demi-groupes à gauche (Δ peut être vide).

$\forall\, \alpha \in \Delta$, $\exists\, r_\alpha \in R$; $\forall\, i \in I$, $\exists\, \ell_i \in L$ (pour $b \in B$, on pose $b=(\ell_b, r_b)$), tels que $\forall\, i \in I$, $\forall\, (\ell, r) \in B$, $\forall\, e \in B_1$, $\forall\, \alpha \in \Delta$, $\forall\, \beta \in \Delta - \{\alpha\}$, $\forall\, f \in B_\alpha$, $\forall\, g \in B_\beta$, on ait

$$\begin{array}{lll} (\ell, r)e = (\ell, r), & ef = (\ell_e, r_\alpha), & fg = (\ell_f, r_\beta), \\ (\ell, r)f = (\ell, r_\alpha), & fe = (\ell_f, r_\alpha), & i(\ell, r) = (\ell_i, r). \end{array}$$

(b) Inversement, considérons un ensemble I, réunion d'un demi-groupe rectangulaire $B = L \times R$ et de zéro-demi-groupes à gauche B_1, B_α, $\alpha \in \Delta$. I, muni de l'opération définie dans (a), est un demi-groupe qui vérifie la condition (A_d).

La proposition (a) rappelle les résultats obtenus dans les lemmes 2.2, 2.3, 2.4. Pour démontrer (b), vérifions d'abord que I est un demi-groupe. Nous devons envisager les cas suivants :

$$a \in B \begin{cases} b \in B \begin{cases} c \in B_1, & a.bc = ab.c = ab, \\ c \in B_\alpha, & a.bc = ab.c = (\ell_a, r_\alpha), \end{cases} \\ b \in B_1 \begin{cases} c \in B, & a.bc = ab.c = (\ell_a, r_c), \\ c \in B_1, & a.bc = ab.c = a, \\ c \in B_\alpha, & a.bc = ab.c = (\ell_a, r_\alpha), \end{cases} \\ b \in B_\alpha \begin{cases} c \in B, & a.bc = ab.c = ac, \\ c \in B_1, & a.bc = ab.c = ab, \\ c \in B_\beta,\ \beta \in \Delta, & a.bc = ab.c = ac, \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{array}{llll} a \in B_1 \text{ ou } B_\alpha, & b \in B \text{ ou } B_\beta,\ \beta \neq \alpha, & c \in B_1, & a.bc = ab.c = ab, \\ a \in B_1 \text{ ou } B_\alpha, & b \in I, & c \in I - B_1, & a.bc = ab.c = ac, \\ a \in B_\alpha, & b \in B_1 \text{ ou } B_\alpha, & c \in B_1, & a.bc = ab.c = ac. \end{array}$$

Soient S un sous-demi-groupe de I, s et s' des éléments de S, x un élément de I tel que sx appartienne à S ; il faut montrer que $s'x$ appartient à S. Nous avons les cas suivants :

$$
\begin{array}{ll}
x \in B, & s'x = (\ell_{s'}, r_x) = s'.sx \in S, \\
x \in B_1, s' \in B \text{ ou } B_1, & s'x = s' \in S, \\
x \in B_1, s' \in B_\alpha, & s'x = (\ell_{s'}, r_\alpha) = s'ss' \in S, \\
x \in B_\alpha, s' \in B_\alpha, & s'x = s' \in S, \\
x \in B_\alpha, s' \notin B_\alpha, & s'x = (\ell_{s'}, r_\alpha) = s'.sx \in S.
\end{array}
$$

COROLLAIRE 2.1.

(a) Si D est un demi-groupe vérifiant la condition (A), l'ensemble I de ses idempotents est stable et a la structure suivante : $I = B + C$; B est un demi-groupe rectangulaire, $B = L \times R$, pour $b \in B$, on écrit $b = (\ell_b, r_b)$; C est un ensemble envoyé par une application φ dans B, $\varphi(c) = (\ell_c, r_c)$. La loi de multiplication est définie de la manière suivante :

$$\forall\, i \in I, \quad \forall\, j \in I, \quad i \neq j, \qquad i^2 = i, \quad i.j = (\ell_i, r_j).$$

(b) Inversement, considérons un ensemble I, réunion d'un demi-groupe rectangulaire $B = L \times R$ et d'un ensemble C envoyé dans B par une application φ ; I, muni de l'opération définie dans (a), est un demi-groupe qui vérifie la condition (A).

Si tous les sous-demi-groupes de D sont homomorphiques, ils sont en particulier homomorphiques à gauche et homomorphiques à droite; I vérifie donc le théorème 2.2 et le théorème symétrique. B_1 et B_α, $\alpha \in \Delta$, doivent être des zéro-demi-groupes à gauche et à droite ; ils sont donc réduits à un seul élément. Pour tout élément i de I, il existe un élément ℓ_i de L, un élément r_i de R tels que l'on ait

$$i(\ell, r) = (\ell_i, r) \qquad \text{et} \qquad (\ell, r)i = (\ell, r_i).$$

Si B_1 n'est pas vide pour l'élément e qu'il contient, on a d'une part

$$(\ell, r)e = (\ell, r),$$

et d'autre part

$$(\ell, r)e = (\ell, r_e);$$

R ne contient donc qu'un élément, et B_1 joue le même rôle que les B_α. Les relations $e \notin B$, $f \notin B$, $e \neq f$, $ef = (\ell_{ef}, r_{ef})$, $ef(\ell, r) = e.f(\ell, r)$, $(\ell, r).ef = (\ell, r)e.f$ donnent

$$ef = (\ell_e , r_f) .$$

Inversement, d'après le théorème 2.2, l'ensemble I, muni de la loi indiquée, est un demi-groupe. Soient S un sous-demi-groupe de I, s et s' des éléments de S. La relation $sx \in S$ entraîne $s'x \in S$ d'après le théorème 2.2, de même, d'après le théorème symétrique, $xs \in S$ implique $xs' \in S$; $xsy \in S$ entraîne $xs'y \in S$, car $xsy = xs'y = xy$.

COROLLAIRE 2.2. - Pour un sous-demi-groupe idempotent I, les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(a) Tous les sous-demi-groupes de I sont homomorphiques à droite et à gauche.

(b) Tous les sous-demi-groupes de I sont homomorphiques.

En effet, pour obtenir la condition nécessaire du corollaire 2.1, nous avons seulement imposé aux sous-demi-groupes de D d'être à la fois homomorphiques à gauche et homomorphiques à droite.

COROLLAIRE 2.3. - Si D est un demi-groupe commutatif qui vérifie la condition (A), l'ensemble I de ses idempotents contient un zéro, et le produit de deux éléments distincts de I est égal à zéro.

En effet, B est alors commutatif, et donc réduit à un seul élément.

3. Etude du demi-groupe D.

Pour poursuivre l'étude du demi-groupe D, nous allons utiliser la décomposition de ce demi-groupe en fuseaux. D étant périodique, il existe une bijection entre l'ensemble I de ses idempotents et l'ensemble des fuseaux. Si e est un élément de I, le fuseau le contenant sera noté F_e, le groupe maximal associé à e sera noté Γ_e ; Γ_e est contenu dans F_e. Si a est un élément de F_e, $[a]$ est contenu dans Γ_e ; si b est un élément de Γ_e, on a

$$ab = a.eb = ae.b \in \Gamma_e , \qquad ba = be.a = b.ea \in \Gamma_e .$$

Rappelons un résultat dû à D. D. MILLER et A. H. CLIFFORD [10].

Si D est un demi-groupe arbitraire contenant un sous-demi-groupe B rectangulaire, les groupes maximaux de D relatifs aux idempotents de B sont tous isomorphes, et leur réunion est un sous-demi-groupe de D isomorphe au produit direct de l'un de ces groupes par le demi-groupe B.

LEMME 3.1. - Si e et f sont deux idempotents de D, et si $\{e , f\}$ est un zéro-demi-groupe à gauche, alors, $\forall a \in F_e$, on a $af = ae$.

En effet, les conditions $a \in (a)$, $e \in (a)$, $ef = e \in (a)$ entraînent $af \in (a)$; comme fe est égal à f , on en déduit

$$af = afe = af.e = e.af = ae.f = ae .$$

Si S et T sont des sous-demi-groupes de D , $S \vee T$ désigne le sous-demi-groupe de D engendré par $S \cup T$.

THÉORÈME 3.1. - *Si* e *et* f *sont deux idempotents de* D , *et si* (e , f) *est un demi-groupe rectangulaire, alors*, $\forall\, a \in F_e$, $\forall\, b \in F_f$, *on a*

$$af = aef , \qquad fa = fae , \qquad ab \in \{[a] \vee [b]\} \cup (a) .$$

(e , fe) est un zéro-demi-groupe à gauche ; donc, d'après le lemme 3.1, on a $afe = ae$, d'où

$$af = aef .$$

Considérons $S = [a] \vee (ef)$, les éléments de S sont de la forme ef , a^n ou $a^n f$; en effet,

$$ef\, a^n = efe\, a^n = e\, a^n = a^n , \quad a^n ef = a^n f ,$$

car a^n appartient à Γ_e .

Les relations $a^3 \in S$, $a^4 \in S$, $ef \in S$ entraînent $efa \in S$; on en déduit

$$efa = \begin{cases} ef \\ \text{ou } a^n \\ a^n f \end{cases} \Longrightarrow fa = \begin{cases} f \Longrightarrow f\, a^p = f \Longrightarrow fa = fae , \\ fa^n \Longrightarrow fa = fae , \\ fa^n f \Longrightarrow fa \in \Gamma_f \text{ et } fa = faf \Longrightarrow f\, a^p = (fa)^p \\ \qquad \Longrightarrow fa \in \Gamma_{fe} \Longrightarrow fe = f \Longrightarrow fa = fea . \end{cases}$$

Si b^n appartient à $[b]$, on a

$$ab^n = a.fb^n = aef\, b^n \in [a] \vee [b] ,$$
$$b^n\, a = b^n\, f.a = b^n\, fea \in [a] \vee [b] .$$

Donc, $T = (a) \vee [b]$ est égal à $\{[a] \vee [b]\} \cup (a)$; les relations $ab^3 \in T$, $ab^4 \in T$, $a \in T$, donnent $ab \in \{[a] \vee [b]\} \cup (a)$.

COROLLAIRE 3.1. - *Les fuseaux de* D *sont stables, et si* a *et* b *sont deux éléments d'un même fuseau*, ab *appartient à* $\{[a] \vee [b]\} \cup (a)$.

PROPRIÉTÉ 3.1. - *Soient* e *un idempotent de* D , a *et* b *deux éléments du fuseau* F_e ; *alors*, ab *appartient à* Γ_e , *ou* ab *est égal à* a^2 . *Réciproque-*

<u>ment, si un demi-groupe périodique et unipotent vérifie cette propriété pour tout couple d'éléments</u> a , b , <u>on a</u> $ab \in \{[a] \vee [b]\} \cup (a)$.

Nous avons vu que Γ_e était un idéal de F_e ; donc la condition $ab \notin \Gamma_e$ entraîne $a \notin \Gamma_e$. Comme ab appartient à $\Gamma_e \cup (a)$, on en déduit

$$ab = a \quad \text{ou} \quad ab = a^2 , \qquad ab = a \implies ab^n = a \quad \text{et} \quad ae = a ,$$

ce qui est impossible.

Pour démontrer la propriété réciproque, il suffit de remarquer que, si ab appartient à Γ_e , on a

$$ab = abe = ae.eb \in [a] \vee [b] .$$

D'après cette propriété, F_e^3 est égal à Γ_e ; en effet, Γ_e est toujours contenu dans F_e^3 . Soit abc un élément de $F_e^3 - \Gamma_e$;

$$abc \notin \Gamma_e \implies ab \notin \Gamma_e \implies ab = a^2 \implies abc = a^2 c ,$$

$$a^2 c \notin \Gamma_e \implies ac \notin \Gamma_e \implies ac = a^2 \implies abc = a^3 ,$$

mais a^3 appartient à $[a]$, nous avons donc une contradiction.

COROLLAIRE 3.2. - <u>Si</u> $\{e , f\}$ <u>est un zéro-demi-groupe à gauche [resp. à droite] propre,</u> $\forall\, a \in F_e$, $\forall\, b \in F_f$, <u>on a</u> $ab = a^2$ <u>ou</u> $ab = ae.fb$ [<u>resp.</u> $ab = ae.fb$].

Dans les deux cas, $[a] \vee [b]$ est contenu dans $\Gamma_e \cup \Gamma_f$. Si $\{e , f\}$ est un zéro-demi-groupe à gauche propre,

$$ab \in \Gamma_f \implies ab = abf = afb = ae.fb \in \Gamma_{ef} = \Gamma_e \implies f = e ,$$

ceci est impossible;

$$ab \in (a) \setminus \Gamma_e \implies ab = a \text{ ou } a^2 , \quad ab = a \implies af = a \implies aef = a ,$$

mais $aef \in \Gamma_{ef} = \Gamma_e \implies a \in \Gamma_e \implies ab \in \Gamma_e$, ce qui est impossible. Donc, si ab est différent de a^2 , ab appartient à Γ_e ; on a alors

$$ab = eab = ea.b = ae.b = a.eb = ae.fb .$$

Si $\{e , f\}$ est un zéro-demi-groupe à droite propre,

$$ab \in \Gamma_e \implies ab = eab = ae.fb \in \Gamma_{ef} = \Gamma_f \implies e = f ,$$

$$ab \in (a) \implies eb \in (a) ,$$

mais

$$eb = efb \in \Gamma_{ef} = \Gamma_f ,$$

d'où une impossibilité, car (a) est contenu dans F_e . On en déduit

$$ab \in \Gamma_f \qquad \text{et} \qquad ab = abf = ae.fb \ .$$

COROLLAIRE 3.3. - <u>Si</u> $(e\ ,\ f)$ <u>est un demi-groupe rectangulaire propre</u>, $\forall\ a \in F_e$, $\forall\ b \in F_f$, ab <u>est égal à</u> $ae.fb$.

ab appartient à $\{[a] \vee [b]\} \cup (a)$, qui est contenu dans $(a) \cup \Gamma_e \cup \Gamma_f \cup \Gamma_{ef} \cup \Gamma_{fe}$.

$$ab \in (a) \implies eb \in (a)\ ,\ \text{mais}\ \ eb = efb \in \Gamma_{ef}\ ,\ \text{et on a}\ \ e = ef\ ,$$

$$ab \in \Gamma_e \implies ab = eab = aeb = ae.fb \in \Gamma_{ef} \implies e = ef\ ,$$

$$ab \in \Gamma_f \implies ab = abf = afb = ae.fb \in \Gamma_{ef} \implies f = ef\ ,$$

$$ab \in \Gamma_{fe} \implies ab = feab = faeb = fae.fb \in \Gamma_f \implies fe = f\ .$$

Chacun de ces cas est donc impossible, ab appartient à Γ_{ef} , et il en résulte

$$ab = efab = efeab = eab = aeb = ae.fb\ .$$

D'après le théorème 2.2, nous savons que I peut se mettre sous la forme : $I = B + B_1 + \bigcup_{\alpha\in\Delta} B_\alpha$; nous pouvons alors énoncer le théorème :

THÉORÈME 3.2. - <u>Si</u> e <u>est un élément de</u> $B_1 + \bigcup_{\alpha\in\Delta} B_\alpha$, f <u>un élément de</u> B , <u>alors</u>, $\forall\ a \in F_e$, $\forall\ b \in F_f$, ba <u>appartient à</u> $(b\ ,\ efe)$, <u>et</u> ab <u>est égal à</u> $efe.fb$.

D'après la loi de multiplication vérifiée par les éléments de I , efe appartient à B ; $(b\ ,\ efe)$ est donc un demi-groupe rectangulaire. Le sous-demi-groupe $(b\ ,\ efe)$, contenant b , efe , efe.e , contient également be .

Si n est un entier supérieur ou égal à trois, eb^n et $b^n e$ appartiennent à $[b] \vee (efe)$; en effet, on a par exemple

$$eb^n = efb^n = efe.fb^n = efe.b^n\ .$$

L'élément eb appartient à $[b] \vee (e)$, car ce sous-demi-groupe contient e , eb^3 , eb^4 ; la relation $eb = e$ entraîne $ef = e$, ce qui est impossible ; nous avons donc

$$eb = eb^n.eb^m.\ldots.eb^s \qquad \text{ou} \qquad eb = eb^n.\ldots.eb^s.e\ ,$$

eb appartient à $[b] \vee (efe)$. Les relations précédentes permettent d'écrire

$$(b\ ,\ e) = (b\ ,\ efe) \cup (e)\ .$$

S'il existe un élément x de (a) tel que le produit bx ne soit pas dans (b , efe) , alors x n'appartient pas à (b , e , bx) . En effet, x n'appartient pas à (b , e) , car $b.(b , e)$ est inclus dans (b , efe) ; donc, si x est dans (b , e , bx) , dans l'écriture de x figure au moins une fois le facteur bx . Posons $x = uxy$, où y est un élément de D^* , u un monôme en b et e seulement ; u appartient au complexe $(b , e).b$ qui est inclus dans (b , efe) . Il existe un entier p avec $u^p = f$, fe , ef , ou efe , car (b,efe) ne contient que ces idempotents. La relation $x = u^p xy^p$ donne alors l'un des cas suivants :

1° $x = fx$,

2° $x = fex$,

3° $x = efx$,

4° $x = efex$;

1° et 2° donnent $x = fx$, d'où $x^q = fx^q$ et $e = fe$; 3° et 4° donnent $x = ex$, puis $x = efex$, d'où $e = efe$; les quatre cas sont donc impossibles.

Soit x un élément de $[a]$; le sous-demi-groupe (b , e , bx) contient e , b , bx , donc également $ex = x$. Nous en déduisons

$$b \in (b , efe) , \quad ba^3 \in (b , efe) , \quad ba^4 \in (b , efe) , \quad \text{et} \quad ba \in (b , efe) .$$

En particulier, fa appartient au demi-groupe rectangulaire

$$(f , efe) = \{f , fe , ef , efe\} ,$$

et par suite, fa est égal à f ou fe ; $fa = f$ donne $fe = f$, donc on a

$$fa = fe , \quad faf = fef = f , \quad (af)^2 = af .$$

De même, pour tout entier n , $a^n f$ est un idempotent. Posons $a^n f = g_n$; la relation $g_n f = g_n$ montre que g_n est un élément de B ; nous écrirons

$$g_n = (\ell_n , r_n) .$$

Si $a^n \in [a]$, les relations $eg_n = g_n$, $g_n f = g_n$ donnent

$$(\ell_e , r_n) = (\ell_n , r_n) , \qquad (\ell_n , r_f) = (\ell_n , r_n) ,$$

c'est-à-dire $g_n = (\ell_n , r_n) = ef$. Le sous-demi-groupe (a , ef) , contenant a , e , ef , contient également af ; mais d'après ce qui précède, (a , ef) est égal à $(a) \cup (ef) \cup (efe)$; af étant un élément de B, est égal à ef . Si $b^n \in [b]$, la relation $fb^n = b^n$ donne $ab^n = a.fb^n = efb^n = eb^n$. De $eb \in [b] \vee (efe)$, résulte

$$eb = efe ,$$

d'où

$$eb^2 = efefe = efe \qquad \text{et} \qquad eb = eb^m ,$$

ou

$$eb = eb^m u \qquad \text{avec} \quad b^m \in [b] , \quad u \in D^* ,$$

ou

$$eb = efeb^m u ,$$

d'où

$$eb = efefb^m u = eb^m u ;$$

si $a^n \in [a]$, dans chacun des cas on a

$$a^n b = a^n eb = a^n eb^m u = ea^n fb^m u = eb^m u = eb .$$

Le sous-demi-groupe (a , eb) , contenant a , $a^3 b$, a^3 , contient également ab; ab ne peut appartenir à (a) , car ce sous-demi-groupe contiendrait alors eb ; or eb appartient à $[b] \vee (efe)$ qui est contenu dans $\Gamma_f \cup \Gamma_{fe} \cup \Gamma_{ef} \cup \Gamma_{efe}$, par suite on a

$$ab = ebu \quad \text{ou} \quad ab = a^k ebu \qquad (u \in D^* , \quad a^k \in [a]) ,$$

d'où

$$ab = ea.b = eb .$$

Considérons l'élément eb ; cet élément appartient à $\Gamma_f \cup \Gamma_{fe} \cup \Gamma_{ef} \cup \Gamma_{efe}$, Il existe un entier n tel que $(eb)^n$ appartienne à $\{f , ef , fe , efe\}$; comme $e.(eb)^n = (eb)^n$, $(eb)^n$ appartient à $\{ef , efe\}$.

$$(eb)^n = efe \implies eb \in \Gamma_{efe} \implies eb = ebefe \implies eb = ebe \implies eb^3 = (eb)^3 ,$$

mais $eb^3 = eb^3 f$, d'où $(eb)^3 = (eb)^3 f \in \Gamma_{efef} = \Gamma_{ef}$, on a toujours

$$eb \in \Gamma_{ef} \cap \left\{[b] \vee (efe)\right\} ;$$

cette relation entraîne l'un des cas suivants :

- $eb = efe$, d'où $ef = efe$, $eb = ef$, et $efb = efeb = ef = eb$,
- $eb = ub^n$, d'où $eb = ebf = efb$, car $b^n \in [b]$,
- $eb = ub^n efe$, d'où $eb = ebfe = efbe$, mais $eb = ebef$ donne alors

$$eb = efbef = efb \qquad \text{car} \quad efb \in \Gamma_{ef} ,$$

il en résulte bien la relation $eb = efb = efe.fb$; ce dernier élément est bien déterminé quand on connaît Γ_f , car (f , efe) est un demi-groupe rectangulaire.

COROLLAIRE 3.4. - <u>Avec les notations du théorème, si de plus</u> fe <u>est égal à</u> f, ba <u>appartient à</u> (b) .

D'après le théorème, fa appartient à (f , efe) qui, ici, est égal à $\{f,ef\}$; la relation $f.fa = fa$ implique $fa \in f.\{f , ef\} = \{f\}$. On a

$$b^3 a = b^3 fa = b^3 f = b^3 ;$$

le sous-demi-groupe (b) , contenant b , b^3 , $b^3 a$, contient également ba .

COROLLAIRE 3.5. - <u>Si</u> fe <u>est différent de</u> f , ba <u>est égal à</u> bf.efe .

(f , efe) est un demi-groupe rectangulaire ; d'après le théorème 3.1, b.efe est égal à bf.efe . La relation $be \in (b , efe)$ entraîne l'un des cas suivants :
- $be \in (b)$, d'où $fe \in (b)$ et $fe = f$, ce qui est impossible,
- $be = u.efe$, d'où $be = befe = bf.efe$,
- $be = u.efe.b^n$, d'où $be = u.efe.fb^n = u.efe.b^n f$, $be = bef$, $be=befe=bf.efe$.

On en déduit que (b , efe) est inclus dans $(b) \cup \Gamma_f \cup \Gamma_{ef} \cup \Gamma_{fe} \cup \Gamma_{efe}$.

De $ba \in (b , efe)$, résulte :
- soit $ba \in (b)$, d'où $fa \in (b)$, mais $fa = fe$ montre que ceci est impossible,
- soit $ba \in \Gamma_f$, d'où $ba = fba = bfa = bfe = bf.efe \in \Gamma_{fe}$, contradiction,
- soit $ba \in \Gamma_{efe}$, d'où $ba = baefe = beafe = befe = bf.efe$, contradiction,
- soit $ba \in \Gamma_{ef}$, d'où $ba = baef = beaf = bef$, (f , ef) étant rectangulaire.

Le théorème 3.1 donne $bef = bfef = bf \in \Gamma_f$, d'où encore une contradiction. Il reste seulement le cas $ba \in \Gamma_{fe}$, et on a alors

$$ba = bafe = befe = bf.efe .$$

THÉORÈME 3.3. - <u>Soient</u> e <u>et</u> f <u>deux éléments de</u> $B_1 + \bigcup_{\alpha\in\Delta} B_\alpha$, a <u>un élément de</u> F_e , b <u>un élément de</u> F_f ;
- <u>si</u> ef <u>est égal à</u> e , ab <u>appartient à</u> (a) ,
- <u>si</u> ef <u>est différent de</u> e , ab <u>est égal à</u> ef .

<u>1er cas</u>. - Soit g un élément de B ; d'après le théorème 3.2 et les corollaires 3.4 et 3.5, on a

$$ge = gf = ga = gb , \qquad ag = eg .$$

Le sous-demi-groupe S engendré par g et a , contenant a , g , gb , contient également ab ; mais, d'après le théorème 3.1, ab appartient à F_e , on a donc

$$ab \in S \cap F_e = (a) .$$

Ceci montre, en particulier, que le produit ea est égal à e ; Γ_e est donc réduit au seul élément e .

<u>2e cas</u>. - Posons $g = ef$; d'après la loi de multiplication vérifiée par I , g appartient à B . Si n est un entier supérieur ou égal à 3 , d'après le corollaire 3.4, on a

$$eb^n = efb^n = gb^n = g .$$

Le sous-demi-groupe $(e , g) = \{e , g , ge\}$, contenant e , $eb^3 = g$, $eb^4 = g$, contient également eb ; il en résulte l'un des cas suivants :

- $eb = e$, mais on aurait alors $ef = e$, ce qui est impossible,
- $eb = ge$, d'où $eb^2 = geb = ge$ et $g = ef = ge$,
- $eb = g$.

Nous avons donc $eb = g$, nous en déduisons

$$a^3\, b = a^3\, eb = a^3\, g .$$

Le sous-demi-groupe (a , g) contient a , a^3 , et $a^3\, b$; il contient aussi ab . En tenant compte du théorème 3.2, (a , g) contient seulement des éléments de la forme a^k ou gu $(u \in D^*)$; ab ne peut appartenir à (a) car autrement ce sous-demi-groupe contiendrait $eb = g$, il reste donc

$$ab = gu ,$$

d'où

$$ab = eab = eb = g .$$

THÉORÈME 3.4. - <u>Si</u> D <u>est un demi-groupe vérifiant la condition</u> (A_d) , D <u>est bande sur</u> I <u>de ses fuseaux</u>.

En effet, compte tenu du théorème 2.2, tous les cas possibles de multiplication des fuseaux ont été examinés dans les théorèmes 3.1 , 3.2 , 3.3 , et leurs corollaires.

THÉORÈME 3.5. - <u>L'ensemble des conditions nécessaires rencontrées est équivalent au système suivant</u> :

(1) D <u>est périodique</u> ;

(2) <u>L'ensemble</u> I <u>des idempotents de</u> D <u>est stable et a la structure indiquée au théorème</u> 2.2 ;

(3) <u>Soient</u> e <u>et</u> f <u>deux éléments de</u> I , a <u>un élément de</u> F_e , b <u>un élément de</u> F_f , <u>alors</u> :

- <u>si</u> $e \in B$, $f \in B$, ab <u>est élément de</u> $\{[a] \vee [b]\} \cup (a)$,
- <u>si</u> $e \notin B$, $f \notin B$, <u>et si</u> $ef = e$, ab <u>est élément de</u> (a) ,
- <u>si</u> $e \notin B$, $f \notin B$, <u>et si</u> $ef \neq e$, ab <u>est égal à</u> ef ,
- <u>si</u> $e \notin B$, $f \in B$, <u>et si</u> $fe = f$, ab <u>est égal à</u> $efe.fb$, ba <u>est élément de</u> (b) ,
- <u>si</u> $e \notin B$, $f \in B$, <u>et si</u> $fe \neq f$, ab <u>est égal à</u> $efe.fb$, ba <u>est égal à</u> $bf.efe$.

Il reste à vérifier que la période d'un élément quelconque a de D commence à un rang inférieur ou égal à 3 ; a et a^2 appartenant au même fuseau, on a, soit

$$a^2 a \in \{[a^2] \vee [a]\} \cup (a^2) ,$$

soit

$$a^2 a \in (a^2) ,$$

ce qui montre bien que a^3 appartient à $[a]$.

Nous avons vu quelques conséquences directes des propriétés énoncées dans le théorème, à savoir :

D est bande sur I de ses fuseaux .

- Si $\{e , f\}$ est un zéro-demi-groupe à gauche, $ab = ae.fb$ ou $ab = a^2$.
- Si (e , f) est un zéro-demi-groupe à droite, ou un demi-groupe rectangulaire propre, $ab = ae.fb$.
- Si e est un élément de $I - B$, $\Gamma_e = \{e\}$.

En tenant compte du théorème de Miller-Clifford, le produit de deux éléments quelconques de D est en général bien déterminé.

THÉORÈME 3.6. - <u>Inversement, si un demi-groupe</u> D <u>vérifie les conditions énoncées dans le théorème</u> 3.5, D <u>satisfait à la condition</u> (A_d) .

Soient S un sous-demi-groupe de D , s et s' des éléments de S , x un élément de D tel que le produit sx appartienne à S ; il faut montrer que $s'x$ appartient à S . Les sous-demi-groupes (s) , (s') , (x) contiennent respectivement e , e' , f comme idempotents. $S \cap I$ est un sous-demi-groupe homomorphique à droite de I , puisque I vérifie la condition (A_d) (théorème 2.2).

Les relations $s \in F_e \cap S$, $s' \in F_{e'} \cap S$, $sx \in F_{ef} \cap S$, donnent $e \in S \cap I$, $e' \in S \cap I$, $ef \in S \cap I$, d'où $e'f \in S \cap I$. De plus, e étant de la forme s^k, ex appartient à S ; d'autre part, on a toujours

$$efx = ex .$$

Considérons les divers cas possibles pour e' et f :

- $e' \in B$, $f \in B$, alors $s'x = s'^2 \in S$ ou $s'x = s'e'fx$, $e'ef = e'f$, $efx \in S$ implique $e'efx \in S$, $e'fx \in S$, $s'e'fx \in S$;
- $e' \notin B$, $f \in B$, alors $s'x = e'fx \in S$, cas analogue au précédent ;
- $e' \in B$, $f \notin B$, alors $s'x \in (s') \subseteq S$ ou $s'x = s'ef \in S$;
- $e' \notin B$, $f \notin B$, $e'f = e'$, alors $s'x \in (s') \subseteq S$;
- $e' \notin B$, $f \notin B$, $e'f \neq e'$, alors $s'x = e'f \in S$.

THÉORÈME 3.7. - Un demi-groupe D vérifie la condition (A) si, et seulement si, il satisfait aux propriétés suivantes :

(1) D est périodique et les sous-groupes maximaux de D sont abéliens ou hamiltoniens ;

(2) L'ensemble I des idempotents de D est stable et a la structure indiquée au corollaire 2.1 ;

(3) Soient e et f deux éléments de I, a un élément de F_e, b un élément de F_f, alors,

- si $e \in B$, $f \in B$, ab est égal à $ae.fb$,
- si $e = f \notin B$, on a $ab = e$ ou $ab = a^2 = b^2$,
- si $e \notin B$, $f \in B$, ab est égal à $efe.fb$, ba est égal à $bf.efe$,
- si $e \notin B$, $f \notin B$, $e \neq f$, ab est égal à ef.

Un demi-groupe qui vérifie la condition (A) vérifie, en particulier, (A_d) et (A_g) ; il en résulte les conditions nécessaires du théorème, si l'on remarque de plus que le groupe Γ_e doit avoir tous ses sous-groupes distingués pour vérifier (A). Pour un groupe périodique, la condition (A) est équivalente au fait d'être abélien ou hamiltonien.

Inversement, si D vérifie ces conditions, d'après le théorème 3.6 et le théorème symétrique, les sous-demi-groupes de D sont à la fois homomorphiques à droite et homomorphiques à gauche ; il reste donc à démontrer que, si S est un sous-demi-groupe de D, les relations

$$s \in S, \quad s' \in S, \quad x \in D, \quad x' \in D, \quad xsx' \in S \quad \text{entraînent} \quad xs'x' \in S.$$

Soient F_e, $F_{e'}$, F_f, $F_{f'}$ les faisceaux qui contiennent respectivement s, s', x, x'. D'après la structure de I, les cas possibles pour les idempotents e, e', f, f' sont les suivants (nous posons $fef' = g$) :

$e \in B$, $e' \in B$, $f \in B$, $f' \in B$,

alors on a $xsx' = xf.es.f'x' = xg.es.gx' \in \Gamma_g \cap S$, on en déduit $g \in S$, d'où il résulte

$$gesg \in \Gamma_g \cap S, \qquad ge's'g \in \Gamma_g \cap S ;$$

d'autre part on a $xg \in \Gamma_g$, $gx' \in \Gamma_g$, et comme Γ_g vérifie (A) , ceci entraîne

$$xg.ge's'g.gx' = xs'x' \in \Gamma_g \cap S .$$

$\underline{e \in B\ ,\ e' \in B\ ,\ f \in B\ ,\ f' \notin B}$ (ou $e \in B, e' \in B, f \notin B, f' \in B$) ,

$xsx' = xf.esf' \in \Gamma_g \cap S$, on en déduit $gesg \in \Gamma_g \cap S$, $ge's'g \in \Gamma_g \cap S$; comme dans le cas précédent, ces relations impliquent

$$xs'x' \in \Gamma_g \cap S .$$

$\underline{e \in B\ ,\ e' \in B\ ,\ f \notin B\ ,\ f' \notin B}$,

$xsx' = fsf' = fesf' \in \Gamma_g \cap S$; de plus, $g \in B$, $e's' \in \Gamma_{e'} \cap S$ impliquent $ge's'g = fe's'f' = xs'x' \in S$.

$\underline{e \in B\ ,\ e' \notin B\ ,\ f \in B\ ,\ f' \in B}$,

$xsx' = xfesf'x' = xg.fesf'.gx' \in \Gamma_g \cap S$; un raisonnement analogue à celui du premier cas montre que $xs'x' = xfe'f'x' = xg.g.gx'$ appartient à $\Gamma_g \cap S$.

$\underline{e \in B\ ,\ e' \notin B\ ,\ f \in B\ ,\ f' \notin B}$ (ou $e \in B, e' \notin B, f' \in B, f \notin B$) ,

$xsx' = xf.es.f' \in \Gamma_g \cap S \implies fesf' \in \Gamma_g \cap S$ et $xg \in S$; d'autre part, on a $xs'x' = xfe'f' = xg$; on en déduit bien $xs'x' \in S$.

$\underline{e' = f = f' \notin B}$,

alors $xs'x' = e' \in S$.

$\underline{e \in B\ ,\ e' \notin B\ ,\ f \notin B\ ,\ f' \notin B}$,

e' , f , f' n'étant pas égaux, $xsx' = fesf' \in \Gamma_g \cap S$ et $xs'x' = fe'f' = g \in S$.

$\underline{e \notin B\ ,\ e' \in B\ ,\ f \in B\ ,\ f' \in B}$,

$xsx' = xfef'x' = xg.g.gx' \in \Gamma_g \cap S$, $xs'x' = xfe's'f'x' = xg.ge's'g.gx'$, $xg \in \Gamma_g$, $gx' \in \Gamma_g$, $g \in \Gamma_g \cap S$, $ge's'g \in \Gamma_g \cap S$, $xg.g.gx' \in \Gamma_g \cap S \implies$ $xs'x' \in S$.

$\underline{e \notin B\ ,\ e' \in B\ ,\ f \in B\ ,\ f' \notin B}$ (ou $e \notin B, e' \in B, f \notin B, f' \in B$) ,

$xsx' = xfef' = xg \in \Gamma_g \cap S$, $xs'x' = xfe's'f' = xg.e's'.g$, $g \in S$; $xg \in S$, $e's' \in S \implies xs'x' \in S$.

$\underline{e \notin B\ ,\ e' \in B\ ,\ f \notin B\ ,\ f' \notin B}$,

$xsx' = fef' = g \in S$, $xs'x' = fe's'f' = g.e's'.g \in S$.

$\underline{e \notin B\ ,\ e' \notin B\ ,\ f \in B\ ,\ f' \in B}$,

$xs'x' = xfe'f'x' = xfef'x' = xsx' \in S$.

$\underline{e \notin B\ ,\ e' \notin B\ ,\ f \in B\ ,\ f' \notin B}$ (ou $e \notin B$, $e' \notin B$, $f \notin B$, $f' \in B$) ,

si $f' \neq e$ et si $f' \neq e'$, on a

$$xs'x' = xfe'f' = xfef' = xsx' \in S\ ;$$

si $e \neq e'$, $f' = e$, on a

$$xsx' = xfex' = xff'\ ,$$

$$xs'x' = xfe'x' = xfe'f' = xff' = xsx' \in S\ ;$$

on a un calcul analogue, si $e \neq e'$ et si $f' = e'$;
enfin, si $e = e' = f'$,

$$xs'x' = xfe = xsx' \in S\ .$$

$\underline{e \notin B\ ,\ e' \notin B\ ,\ f \notin B\ ,\ f' \notin B}$,

on a toujours $xsx' = fef'$, $xs'x' = fe'f' = fef' = xsx' \in S$.

COROLLAIRE 3.6. - <u>Un demi-groupe abélien</u> D <u>vérifie la condition</u> (A) , <u>si et seulement s'il satisfait aux propriétés suivantes</u> :

(1) D <u>est périodique</u> ;

(2) <u>L'ensemble</u> I <u>des idempotents de</u> D <u>a la structure suivante</u> :

$$I = \{o\} \cup A\ , \qquad \forall\ e\ ,\ f \in I\ ,\ e \neq f\ ,\ \underline{\text{on a}}\ ef = 0\ ;$$

(3) <u>Soient</u> e <u>et</u> f <u>deux éléments de</u> I , a <u>un élément de</u> F_e , b <u>un élément de</u> F_f , <u>alors</u>,

- <u>si</u> $e = f = o$, <u>on a</u> $ab = ao.ob$,
- <u>si</u> $e = f \neq o$, <u>on a</u> $ab = e$ <u>ou</u> $ab = a^2 = b^2$,
- <u>si</u> $e = o$, $f \neq o$, <u>on a</u> $ab = ao$,
- <u>si</u> $e \neq o$, $f \neq o$, $e \neq f$, <u>on a</u> $ab = o$.

Ce corollaire est une conséquence directe du théorème précédent et du corollaire 2.3.

<u>Conclusion</u>. - Le théorème 3.7 fournit une généralisation convenable des groupes hamiltoniens, car ces groupes sont périodiques ; mais il n'en est pas de même pour les groupes abéliens qui, en général, ne vérifient pas ce théorème. La méthode suivie, étude des idempotents, décomposition de D en fuseaux, est à rapprocher de celle de M. EGO dans sa thèse [6].

BIBLIOGRAPHIE

[1] CLIFFORD (A. H.). - Bands of semi-groups, Proc. Amer. math. Soc., t. 5, 1954, p. 499-504.

[2] CLIFFORD (A. H.) and PRESTON (G. B.). - The algebraic theory of semi-groups, vol. 1. - Providence, American mathematical Society, 1961 (Mathematical Surveys, 7).

[3] DESQ (Roger). - Relations d'équivalences principales en théorie des demi-groupes, Thèse Sc. math. Paris, 1964.

[4] DUBREIL (Paul). - Contribution à la théorie des demi-groupes. - Paris, Gauthier-Villars, 1941 (Mém. Acad. Sc. Inst. France, 2e série, t. 63, n° 3, 52 p.).

[5] DUBREIL (Paul). - Algèbre, t. 1 : Equivalences, opérations, groupes, anneaux, corps, 2e édition. - Paris, Gauthier-Villars, 1954 (Cahiers scientifiques, 20).

[6] EGO (Michel). - Structure des demi-groupes dont le treillis des sous-demi-groupes satisfait à certaines conditions, Bull. Soc. math. France, t. 91, 1963, p. 137-201 (Thèse Sc. math. Paris, 1963).

[7] LJAPIN (E. S.). - Demi-groupes [en russe]. - Moskova, 1960.

[8] MAC LEAN (David). - Idempotent semi-groups, Amer. math. Monthly, t. 61, 1954, p. 110-113.

[9] MILLER (Donald W.). - Hamiltonian semi-groups, Portugaliae Mathematica, t.21, 1962, p. 171-187.

[10] MILLER (D. D.) and CLIFFORD (A. H.). - Regular $\mathcal{D}$-classes in semi-groups, Trans. Amer. math. Soc., t. 82, 1956, p. 270-280.

[11] TEISSIER (Marianne). - Sur les équivalences régulières dans les demi-groupes, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 232, 1951, p. 1987-1989.