Pierre-Antoine Grillet

Sur les extensions idéales d'un demi-groupe

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 18, nº 1 (1964-1965), exp. nº 1, p. 1-27

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1964-1965__18_1_A1_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
18e année, 1964/65, n° 1

9 novembre 1964

SUR LES EXTENSIONS IDÉALES D'UN DEMI-GROUPE

par Pierre-Antoine GRILLET

La notion d'extension idéale a été considérée pour la première fois par A. H. CLIFFORD [1] (voir aussi [2]), avec l'idée d'étudier les extensions idéales d'un demi-groupe donné D par un demi-groupe avec zéro donné Q (c'est-à-dire les demi-groupes D^* tels que D soit un idéal de D^* et que $D^*/D \simeq Q$). Notre point de vue est un peu différent, puisque nous cherchons des propriétés d'un demi-groupe D , relatives à toutes les extensions idéales possibles de D .

Nous utilisons à cet effet la notion (nouvelle) de type d'une extension idéale D^* de D ; ce type fournit l'action globale exercée par D^* sur D . Il est défini au § 3 (les paragraphes 1 et 2 contenant les propriétés fondamentales des translations de D) ; c'est une partie de l'ensemble $\Omega(D)$ des couples de translations liées de D . Les théorèmes d'existence du § 4 permettent en particulier de caractériser les types d'extension parmi les parties de $\Omega(D)$.

La connaissance de tous les types d'extension de D permet alors (§ 5) de trouver les idéaux de D qui sont idéaux de toute extension idéale de D , et que nous appelons idéaux semi-caractéristiques (cette notion paraît liée naturellement à certains foncteurs contravariants dont nous parlons également au § 5) ; et aussi (§ 6) de donner des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un idéal à gauche de D soit un idéal à gauche dual-primal (ou bien : dual-tertiaire, dual-premier, etc.) au sens de L. LESIEUR et R. CROISOT [5] dans toute extension idéale de D , en distinguant les cas où D est sans zéro et avec zéro ; ces conditions deviennent particulièrement naturelles quand D a un élément unité à gauche.

Au point de vue technique, nous utilisons les homomorphismes fournis par l'opération de restriction à D des translations internes de D^* ; de plus, nous introduisons des propriétés de commutation entre translations à gauche et à droite de D . Nous avons jugé commode de distinguer un demi-groupe de l'ensemble qui en est le support, lorsque la loi de composition n'est pas canonique.

1. Translations d'un demi-groupe (rappels, notations).

Soit D un demi-groupe de support E .

DÉFINITION 1 (cf. [2]). - On appelle translation à gauche (resp. à droite) de D toute application φ (resp. ψ) de E dans E telle que

(1) $(\forall\, x\,,\, y \in E) \quad \varphi(xy) = \varphi(x)y \quad$ (resp. $\psi(xy) = x\psi(y)$).

Les notions de translation à gauche et à droite sont duales.

PROPOSITION 1. - Pour tout $a \in E$, l'application γ_a (resp. δ_a) définie par

$$(\forall\, x \in E) \qquad \gamma_a(x) = ax \qquad (\text{resp. } \delta_a(x) = xa\ )$$

est une translation à gauche (resp. à droite).

En effet, pour tous $x\,,\, y \in E$, $a(xy) = (ax)y$, $(xy)a = x(ya)$. On notera que les applications γ_a, δ_a sont les translations que l'on considère habituellement; on les appelle ici translations internes.

On note $\Lambda(D)$ (resp. $P(D)$ ([1])) l'ensemble des translations à gauche (resp. à droite) de D, et $\Gamma(D)$ (resp. $\Delta(D)$) l'ensemble des translations à gauche (resp. à droite) internes de D.

PROPOSITION 2. - $\Lambda(D)$ et $P(D)$ sont stables pour la composition des applications.

Si $\varphi\,,\, \varphi' \in \Lambda(D)$, on a, pour tous $x\,,\, y \in E$:

$$\varphi(\varphi'(xy)) = \varphi(\varphi'(x)y) = \varphi(\varphi(x))y\ ,$$

donc $\varphi \circ \varphi' \in \Lambda(D)$. On procède dualement pour $P(D)$.

DÉFINITION 2. - $\varphi \in \Lambda(D)$ et $\psi \in P(D)$ sont dites liées (linked [2]) si et seulement si

(2) $(\forall\, x\,,\, y \in E) \qquad x\varphi(y) = \psi(x)y$.

PROPOSITION 3. - Pour tout $a \in E$, γ_a et δ_a sont liées.

En effet, pour tous $x\,,\, y \in E$, $x(ay) = (xa)y$.

On note $\Omega(D)$ l'ensemble des couples formés d'une translation à gauche de D et d'une translation à droite de D qui sont liées, et $\Pi(D)$ l'ensemble des couples $\pi_a = (\gamma_a\,,\, \delta_a)$ pour $a \in E$.

([1]) Dans ce texte, les symboles P et T doivent s'énoncer respectivement "rô" majuscule et "tau" majuscule.

PROPOSITION 4. - Si (φ , ψ) , $(\varphi' , \psi') \in \Omega(D)$, $(\varphi \circ \varphi' , \psi' \bullet \psi) \in \Omega(D)$.

En effet, pour tous $x , y \in E$:

$$x\varphi(\varphi'(y)) = \psi(x)\ \varphi'(y) = \psi'(\psi(x))y \ .$$

Les ensembles $\Lambda(D)$, $P(D)$, $\Omega(D)$ peuvent être structurés canoniquement en demi-groupes, désignés par les mêmes symboles, avec les lois suivantes : pour $\Lambda(D)$, la composition des applications ; pour $P(D)$, la loi duale de la composition des applications ; pour $\Omega(D)$, qui est alors (prop. 4) une partie stable de $\Lambda(D)\times P(D)$, la loi induite par celle de $\Lambda(D) \times P(D)$.

PROPOSITION 5. - Pour tout $a \in E$ et tout $(\varphi , \psi) \in \Omega(D)$:

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \varphi \bullet \gamma_a = \gamma_{\varphi(a)} , & \gamma_a \circ \varphi = \gamma_{\psi(a)} , \\ \delta_a \bullet \psi = \delta_{\varphi(a)} , & \psi \circ \delta_a = \delta_{\psi(a)} . \end{array} \right.$$

et $\Pi(D)$ est un idéal de $\Omega(D)$.

En effet, pour tout $x \in E$:

$$\varphi(\gamma_a(x)) = \varphi(ax) = \varphi(a)x = \gamma_{\varphi(a)}(x) \ ,$$

$$\gamma_a(\varphi(x)) = a\varphi(x) = \psi(a)x = \gamma_{\psi(a)}(x) \ ,$$

d'après (1) et (2). La seconde ligne se démontre dualement. L'écriture des formules (3) sous la forme

$$(3') \qquad (\varphi , \psi).\pi_a = \pi_{\varphi(a)} , \qquad \pi_a.(\varphi , \psi) = \pi_{\psi(a)}$$

qui utilise le produit dans $\Omega(D)$, met en évidence que $\Pi(D)$ est un idéal de $\Omega(D)$.

Les demi-groupes D , $\Lambda(D)$, $P(D)$, $\Omega(D)$ sont reliés par des homomorphismes canoniques. L'application γ (resp. δ , π) qui, à tout $a \in E$, fait correspondre γ_a (resp. δ_a , π_a) est un homomorphisme de D vers $\Lambda(D)$ (resp. $P(D)$, $\Omega(D)$ (prop. 3)), dont l'image est $\Gamma(D)$ (resp. $\Delta(D)$, $\Pi(D)$). Et les projections $\varkappa_g$, $\varkappa_d$ définies par $\varkappa_g(\varphi , \psi) = \varphi$, $\varkappa_d(\varphi , \psi) = \psi$ pour tout $(\varphi , \psi) \in \Omega(D)$ sont des homomorphismes de $\Omega(D)$ vers $\Lambda(D)$ et $P(D)$ respectivement. Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} & D \arrow[dl, "\gamma"'] \arrow[dr, "\delta"] \arrow[dd, "\pi"] & \\ \Lambda(D) & & P(D) \\ & \Omega(D) \arrow[ul, "\varkappa_g"] \arrow[ur, "\varkappa_d"'] & \end{tikzcd}$$

PROPOSITION 6. - Pour que π soit injectif, il faut et il suffit que, pour tous a , $b \in E$:

$$((\forall\, x \in E) \quad (ax = bx \quad \text{et} \quad xa = xb)) \implies a = b\ .$$

π est injectif si et seulement si, pour tous a , $b \in E$, $\gamma_a = \gamma_b$ et $\delta_a = \delta_b$ entraîne $a = b$, d'où la condition ci-dessus.

DÉFINITION 3. - D est dit <u>faiblement réductif</u> si et seulement si π est injectif.

2. Translations associées. Commutation. Restriction. Isomorphisme.

Soit D un demi-groupe de support E .

DÉFINITION 4. - $\varphi \in \Lambda(D)$ et $\psi \in P(D)$ sont dites <u>associées</u> si et seulement si elles sont liées et commutent.

Notons d'abord que les translations à gauche et à droite commutent assez volontiers. Ainsi, la formule (1) exprime que les translations à gauche sont les applications de E dans E qui commutent avec toutes les translations à droite internes (et vice versa). D'autre part,

PROPOSITION 7. - Si D est globalement idempotent, toute translation à gauche commute avec toute translation à droite [1].

En effet, si $\varphi \in \Lambda(D)$, $\psi \in P(D)$, $a \in E$, il existe x , $y \in E$ tels que $a = xy$; et on a, d'après la formule (1) :

$$\varphi(\psi(a)) = \varphi(\psi(xy)) = \varphi(x\psi(y)) = \varphi(x)\ \psi(y) = \psi(\varphi(x)y) = \psi(\varphi(xy)) = \psi(\varphi(a))\ .$$

PROPOSITION 8. - Si D est faiblement réductif, deux translations liées commutent ; et même, pour tous $(\varphi\ ,\ \psi)$, $(\varphi'\ ,\ \psi') \in \Omega(D)$, φ commute avec ψ' .

En effet, les formules (3) entraînent, pour tout $x \in E$,

$$\gamma_{\varphi(\psi'(x))} = \varphi \circ \gamma_{\psi'(x)} = \varphi \circ \gamma_x \circ \varphi' = \gamma_{\varphi(x)} \circ \varphi' = \gamma_{\psi'(\varphi(x))}\ ;$$

dualement $\delta_{\varphi(\psi'(x))} = \delta_{\psi'(\varphi(x))}$; d'où, pour tout $x \in E$, $\varphi(\psi'(x)) = \psi'(\varphi(x))$.

Toutefois, deux translations peuvent être liées sans commuter. Si par exemple D est le zéro-demi-groupe d'ordre 3 de support $E = \{a\ ,\ b\ ,\ c\}$, dont la loi est définie par $xy = a$ pour tous x , $y \in E$, on a $\Lambda(D) = P(D)$, et les éléments de cet ensemble sont les applications θ de E dans E telles que $\theta(a) = a$; toute translation à gauche est liée à toute translation à droite ; mais les translations φ et ψ définies par

$$\varphi : \frac{a\ b\ c}{a\ c\ b} \qquad \psi : \frac{a\ b\ c}{a\ b\ a}$$

ne commutent pas, car

$$\varphi(\psi(b)) = \varphi(b) = c , \qquad \psi(\varphi(b)) = \psi(c) = a .$$

L'ensemble des couples formés d'une translation à gauche et d'une translation à droite de D, qui sont associées, peut donc être strictement inclus dans $\Omega(D)$; on le note $\tilde{\Omega}(D)$. On pose aussi $\tilde{\Lambda}(D) = \varkappa_g(\tilde{\Omega}(D))$ (resp. $\tilde{P}(D) = \varkappa_d(\tilde{\Omega}(D))$), c'est l'ensemble des translations à gauche de D ayant au moins une associée. On a les inclusions suivantes :

$$\Pi(D) \subseteq \tilde{\Omega}(D) \subseteq \Omega(D) , \qquad \Gamma(D) \subseteq \tilde{\Lambda}(D) \subseteq \Lambda(D) , \qquad \Delta(D) \subseteq \tilde{P}(D) \subseteq P(D) .$$

PROPOSITION 9. - Si (φ , ψ) , $(\varphi' , \psi') \in \tilde{\Omega}(D)$, $(\varphi \circ \varphi' , \psi' \circ \psi) \in \tilde{\Omega}(D)$ dès que φ commute avec ψ' et φ' avec ψ.

En ce cas, $\varphi \circ \varphi'$ commute avec $\psi' \circ \psi$.

$\tilde{\Omega}(D)$ est donc une partie stable de $\Omega(D)$ dès que D est globalement idempotent (prop. 7) ou faiblement réductif (prop. 8). $\tilde{\Omega}(D)$ peut être une partie non stable de $\Omega(D)$; par exemple, avec les notations de l'exemple ci-dessus,

$$(\varphi , \varphi) , (\psi , \psi) \in \tilde{\Omega}(D) \qquad \text{et} \qquad (\varphi \circ \psi , \psi \circ \varphi) \notin \tilde{\Omega}(D) ;$$

en effet, $\psi \circ \psi = \psi$, $\varphi \circ \varphi$ est l'application identique de E , et l'égalité $\varphi \circ \psi \circ \psi \circ \varphi = \psi \circ \varphi \circ \varphi \circ \psi$ entraînerait $\varphi \circ \psi \circ \varphi = \psi$ et $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$.

D'autre part, les propriétés suivantes seront directement utiles au paragraphe 3.

PROPOSITION 10 (propriétés de restriction). - Soient D' un sous-demi-groupe de D, de support E', et $\varphi \in \Lambda(D)$, $\psi \in P(D)$:

(a) si $\varphi_{|E'}$ existe, $\varphi_{|E'} \in \Lambda(D')$; si $\psi_{|E'}$ existe, $\psi_{|E'} \in P(D')$;

(b) si $\varphi_{|E'}$ et $\psi_{|E'}$ existent, et si φ et ψ sont liées ou associées, il en est de même de $\varphi_{|E'}$ et $\psi_{|E'}$.

Par malheur, je ne retrouve plus la démonstration.

Avec les mêmes notations, si $\varphi_{|E'}$ et $\psi_{|E'}$ existent, $(\varphi , \psi)_{|E'}$ désigne le couple $(\varphi_{|E'} , \psi_{|E'})$.

PROPOSITION 11 (isomorphisme). - A tout isomorphisme ι de D vers un demi-groupe D', de support E', sont canoniquement associés trois isomorphismes ι_Λ , ι_P , ι_Ω tels que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & D \arrow[dl, "\gamma"'] \arrow[dr, "\delta"] \arrow[dd, "\pi"] \arrow[rrrr, "\iota"] & & & D' \arrow[dl, "\gamma'"'] \arrow[dr, "\delta'"] \arrow[dd, "\pi'"] & \\
\Lambda(D) \arrow[rrr, "\iota_\Lambda"] & & P(D) \arrow[rrr, "\iota_P"] & \Lambda(D') & & P(D') \\
 & \Omega(D) \arrow[ul, "\varkappa_g"] \arrow[ur, "\varkappa_d"'] \arrow[rrrr, "\iota_\Omega"] & & & \Omega(D') \arrow[ul, "\varkappa'_g"] \arrow[ur, "\varkappa'_d"'] &
\end{tikzcd}$$

soit commutatif, et que l'on ait, pour tous $\varphi \in \Lambda(D)$, $\psi \in P(D)$, $x \in E$:

(4) $$(\iota_\Lambda(\varphi))(\iota(x)) = \iota(\varphi(x)) , \qquad (\iota_P(\psi))(\iota(x)) = \iota(\psi(x)) ;$$

ces propriétés déterminent d'ailleurs ι_Λ , ι_P , ι_Ω de manière unique ; et on a de plus $\iota_\Omega(\widetilde{\Omega}(D)) = \widetilde{\Omega}(D')$.

Les formules (4) entraînent que, pour tout $\varphi \in \Lambda(D)$, $\iota_\Lambda(\varphi) = \iota \circ \varphi \circ \iota^{-1}$, et que, pour tout $\psi \in P(D)$, $\iota_P(\psi) = \iota \circ \psi \circ \iota^{-1}$; la commutativité du diagramme entraîne alors, pour tout $(\varphi , \psi) \in \Omega(D)$, $\iota_\Omega((\varphi , \psi)) = (\iota_\Lambda(\varphi) , \iota_P(\psi))$; ceci démohtre l'unicité de ι_Λ , ι_P , ι_Ω (s'ils existent). Réciproquement, on vérifie sans peine que les applications ι_Λ , ι_P , ι_Ω définies de cette façon ont les propriétés suivantes : si $\varphi \in \Lambda(D)$, $\iota_\Lambda(\varphi) \in \Lambda(D')$; si $\psi \in P(D)$, $\iota_P(\psi) \in P(D')$; si φ et ψ sont liées, ou associées, il en est de même de $\iota_\Lambda(\varphi)$ et $\iota_P(\psi)$; ι_Λ , ι_P , ι_Ω sont des isomorphismes de $\Lambda(D)$ vers $\Lambda(D')$, etc. (les applications inverses étant $(\iota^{-1})_\Lambda$, $(\iota^{-1})_P$, $(\iota^{-1})_\Omega$ respectivement) ; enfin, on a les formules (4) et le diagramme de l'énoncé est commutatif.

3. Type d'une extension idéale ou d'un monomorphisme idéal.

DÉFINITION 5. - Un demi-groupe D^* est dit extension idéale d'un demi-groupe D si et seulement si D est un idéal de D^* .

THÉORÈME 1. - Soient D^* une extension idéale de D , E et E^* les supports respectifs de D et D^* . Il existe un homomorphisme canonique τ de $\Pi(D^*)$ vers $\Omega(D)$, tel que

(5) $$(\forall\ a \in E^*) \quad (\forall\ x \in E) \qquad \varkappa_g(\tau(\pi_a^*))(x) = ax , \qquad \varkappa_d(\tau(\pi_a^*))(x) = xa .$$

Le diagramme

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\pi"'] & D^* \arrow[d, "\pi^*"] \\
\Omega(D) & \Pi(D^*) \arrow[l, "\tau"']
\end{tikzcd}$$

où ι est l'injection canonique est commutatif ; si D est faiblement réductif, τ est aussi le seul homomorphisme de $\Pi(D^*)$ vers $\Omega(D)$ tel que ce diagramme soit commutatif.

Tout d'abord, dire que D est idéal de D^* équivaut à dire que toute translation interne de D^* a une restriction à E .

Par suite, pour tout $a \in E^*$, $\pi^*_{a|E}$ existe ; et $\pi^*_{a|E} \in \Omega(D)$ (prop. 10). L'application τ qui, à $\pi^*_a \in \Pi(D^*)$, fait correspondre $\pi^*_{a|E}$ est évidemment un homomorphisme de $\Pi(D^*)$ vers $\Omega(D)$; on a

$$\varkappa_g(\tau(\pi^*_a)) = \gamma^*_{a|E} , \qquad \varkappa_d(\tau(\pi^*_a)) = \delta^*_{a|E} \qquad \text{pour tout } a \in E ,$$

d'où les formules (5). Les formules (5) déterminent d'ailleurs complètement τ . Enfin, si $a \in E$,

$$\tau(\pi^*_a) = \pi^*_{a|E} = \pi_a ;$$

et le diagramme de l'énoncé est commutatif.

Si τ' est un autre homomorphisme de $\Pi(D^*)$ vers $\Omega(D)$ tel que ce diagramme soit commutatif, on a, pour tous $a \in E^*$ et $x \in E$:

$$\tau'(\pi^*_a).\pi_x = \tau'(\pi^*_a).\tau'(\pi^*_x) = \tau'(\pi^*_a.\pi^*_x) = \tau'(\pi^*_{ax}) = \pi_{ax} ,$$

et de même $\pi_x.\tau'(\pi^*_a) = \pi_{xa}$. Comme τ possède aussi cette propriété, la dernière assertion du théorème résulte du lemme suivant.

LEMME 1. - Soient D un demi-groupe faiblement réductif de support E et (φ , ψ) , $(\varphi' , \psi') \in \Omega(D)$. On a l'implication :

$$\big((\forall\, x \in E) \qquad (\varphi , \psi).\pi_x = (\varphi' , \psi').\pi_x \quad \text{et} \quad \pi_x.(\varphi , \psi) = \pi_x.(\varphi' , \psi') \big)$$

$$\Longrightarrow \ (\varphi , \psi) = (\varphi' , \psi') .$$

(En particulier, $\Omega(D)$ est faiblement réductif.)

Il résulte des formules (3) que le premier membre de l'implication peut s'écrire :

$$(\forall\, x \in E) \quad \gamma_{\varphi(x)} = \gamma_{\varphi'(x)} , \quad \delta_{\varphi(x)} = \delta_{\varphi'(x)} , \quad \gamma_{\psi(x)} = \gamma_{\psi'(x)} , \quad \delta_{\psi(x)} = \delta_{\psi'(x)} .$$

Ceci implique, puisque D est faiblement réductif, $\varphi(x) = \varphi'(x)$ et $\psi(x) = \psi'(x)$ pour tout $x \in E$, donc $(\varphi , \psi) = (\varphi' , \psi')$. $\Omega(D)$ est alors faiblement réductif, d'après la proposition 6.

Cette propriété d'unicité de τ , établie sous l'hypothèse que D est faiblement réductif, n'est pas valable pour un demi-groupe D quelconque. Ce serait pourtant bien agréable ! Mais, soient D et D^* les demi-groupes suivants, de supports $E = \{a , b , c\}$, $E^* = \{a , b , c , u , v\}$, dont les tables de multiplication sont

D	a	b	c
a	a	a	a
b	a	a	a
c	a	a	a

D^*	a	b	c	u	v
a	a	a	a	a	a
b	a	a	a	b	a
c	a	a	a	a	c
u	a	b	a	u	a
v	a	a	c	a	v

D est un zéro-demi-groupe d'ordre 3 , et D^* est isomorphe au demi-groupe n° 693 du catalogue de TAMURA [6]. D^* est extension idéale de D ; si α , β , γ sont les applications de E dans E définies par

$$\alpha : \frac{a\ b\ c}{a\ a\ a}, \qquad \beta : \frac{a\ b\ c}{a\ b\ a}, \qquad \gamma : \frac{a\ b\ c}{a\ a\ c},$$

l'homomorphisme canonique τ envoie π^*_a , π^*_b , π^*_c sur (α , α) , π^*_u sur (β , β) , π^*_v sur (γ , γ) (noter que D^* est faiblement réductif). On vérifie que l'application τ_1 , qui envoie π^*_a , π^*_b , π^*_c sur (α , α) , π^*_u sur (γ , γ) , et π^*_v sur (β , β) , est aussi un homomorphisme de $\Pi(D^*)$ vers $\Omega(D)$ tel que

$$\pi = \tau_1 \circ \pi^* \circ \iota ;$$

et $\tau_1 \neq \tau$.

PROPOSITION 12. - Avec les notations du théorème 1, l'image T [2] de τ a les propriétés suivantes :

(a) T est une partie stable de $\Omega(D)$ et $\Pi(D) \subseteq T$;

(b) pour tous (φ , ψ) , $(\varphi' , \psi') \in T$, φ commute avec ψ' .

T est donc l'ensemble des $\pi^*_{a|E}$ pour $a \in E$. La propriété (a) est immédiate ; et, pour tous $a , b \in E^*$, γ^*_a commute avec δ^*_b , et il en est de même de leurs restrictions à E , d'où la propriété (b).

DÉFINITION 6. - Avec les notations du théorème 1, l'image T de τ s'appelle le <u>type</u> de l'extension idéale considérée. On appelle de même <u>type à gauche</u> (resp. <u>à droite</u>) de l'extension idéale considérée l'image de $\varkappa_g \circ \tau$ (resp. $\varkappa_d \circ \tau$).

Par abus de langage, on appellera <u>type d'extension</u> de D , toute partie de $\Omega(D)$ qui est type d'une extension idéale de D ; de même, <u>type à gauche</u> (resp. <u>à droite</u>) <u>d'extension</u> de D , toute partie de $\Lambda(D)$ (resp. $P(D)$) qui est type à gauche (resp. à droite) d'une extension idéale de D .

Le théorème 1 admet enfin l'extension suivante :

DÉFINITION 7. - Un homomorphisme de demi-groupes est dit <u>idéal</u> quand son image

---

[2] cf. note [1].

est un idéal du demi-groupe arrivée.

THÉORÈME 1'. – Soient D et D^* des demi-groupes de supports respectifs E et E^*. A tout monomorphisme idéal μ de D vers D^* est canoniquement associé un homomorphisme τ de $\Pi(D^*)$ vers $\Omega(D)$, tel que

$$(5') \quad (\forall a \in E^*) \quad (\forall x \in E) \qquad \varkappa_g(\tau(\pi_a^*))(x) = \mu^{-1}(a\mu(x)) \, , \; \varkappa_d(\tau(\pi_a^*))(x) = \mu^{-1}(\mu(x)a) \, .$$

Le diagramme

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\pi"'] & D^* \arrow[d, "\pi^*"] \\ \Omega(D) & \Pi(D^*) \arrow[l, "\tau"'] \end{tikzcd}$$

est commutatif ; si D est faiblement réductif, τ est aussi le seul homomorphisme de $\Pi(D^*)$ vers $\Omega(D)$ tel que ce diagramme soit commutatif. Enfin, l'image T de τ a les propriétés (a) et (b) de la proposition 12.

Soient D' l'image de μ et ι l'injection canonique de D' vers D^*. La proposition 11 et le théorème 1 donnent alors des homomorphismes μ_Ω et τ' tels que le diagramme

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\pi"] & D' \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\pi'"] & D^* \arrow[d, "\pi^*"] \\ \Omega(D) & \Omega(D') \arrow[l, "\mu_\Omega^{-1}"'] & \Pi(D^*) \arrow[l, "\tau'"'] \end{tikzcd}$$

soit commutatif. $\tau = \mu_\Omega^{-1} \circ \tau'$ rend alors commutatif le diagramme de l'énoncé. Les formules (5') résultent des formules (4) et (5) ; en effet, pour tous $a \in E^*$ et $x \in E$:

$$\varkappa_g(\tau(\pi_a^*))(x) = \varkappa_g(\mu_\Omega^{-1}(\tau'(\pi_a^*)))(x) = \mu_\Lambda^{-1}(\varkappa_g(\tau'(\pi_a^*)))(x)$$

$$= \mu^{-1}(\varkappa_g(\tau'(\pi_a^*))(\mu(x))) = \mu^{-1}(a\mu(x)) \; ;$$

la seconde formule se démontre dualement. Les formules (5') déterminent d'ailleurs complètement τ.

Si τ_1 est un autre homomorphisme de $\Pi(D^*)$ vers $\Omega(D)$ tel que le diagramme de l'énoncé soit commutatif, le diagramme

$$\begin{tikzcd} D' \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\pi'"] & D^* \arrow[d, "\pi^*"] \\ \Omega(D') & \Pi(D^*) \arrow[l, "\mu_\Omega \circ \tau_1"'] \end{tikzcd}$$

est commutatif. Si D est faiblement réductif, D' est faiblement réductif (π' est alors injectif, d'après la prop. 11), et, d'après le théorème 1, $\mu_\Omega \circ \tau_1 = \tau'$, d'où $\tau_1 = \tau$.

Enfin, l'image T' de τ' a les propriétés (a) et (b) de la proposition 12 ; il en est donc de même de l'image $T = \mu_\Omega^{-1}(T')$ de τ .

DÉFINITION 8. - Avec les notations du théorème 1', l'image T de τ s'appelle le <u>type</u> du monomorphisme idéal μ . On appelle de même <u>type à gauche</u> (resp. <u>à droite</u>) de μ l'image de $\varkappa_g \circ \tau$ (resp. $\varkappa_d \circ \tau$).

4. Théorèmes d'existence.

Il s'agit de l'existence d'extensions idéales d'un demi-groupe donné, de type donné. Soit donc D un demi-groupe, de support E .

THÉORÈME 2. - Si T est une partie de $\Omega(D)$, stable, contenant $\Pi(D)$, et telle que, pour tous (φ , ψ) , $(\varphi' , \psi') \in T$, φ commute avec ψ' , il existe une extension idéale de D de type T .

Les éléments de T sont des couples d'applications de E dans E , en sorte que T est disjoint de E . Sur l'ensemble $E^* = E \cup T$, il existe une loi de composition interne $\star$ (partout définie) et une seule, telle que, pour tous $x , y \in E$, (φ , ψ) , $(\varphi' , \psi') \in T$:

$$x\star y = xy , \quad (\varphi , \psi)\star(\varphi' , \psi') = (\varphi \circ \varphi' , \psi' \circ \psi) , \quad (\varphi , \psi)\star x = \varphi(x) ,$$
$$x\star(\varphi , \psi) = \psi(x) .$$

Soit D^* le groupoïde $(E^* , \star)$. D et T sont des sous-groupoïdes de D^* .

La loi $\star$ est associative ; soient en effet $a , b , c \in E \cup T$. Si $a , b , c \in E$, ou si $a , b , c \in T$, on a $(a\star b)\star c = a\star(b\star c)$. Si $a , b \in E$ et $c = (\varphi , \psi) \in T$,

$$(a\star b)\star c = \psi(ab) = a\psi(b) = a\star(b\star c) \qquad \text{d'après (1) ;}$$

de même si $a \in T$ et $b , c \in E$; si $a , c \in E$ et $b = (\varphi , \psi) \in T$,

$$(a\star b)\star c = \psi(a)c = a\varphi(c) = a\star(b\star c) \qquad \text{d'après (2).}$$

Si $a = (\varphi , \psi) \in T$, $b = (\varphi' , \psi') \in T$, $c \in E$,

$$(a\star b)\star c = (\varphi \circ \varphi')(c) = \varphi(\varphi'(c)) = a\star(b\star c) \ ;$$

de même si $a \in E$, b , $c \in T$; enfin, si $a = (\varphi, \psi) \in T$, $b \in E$, $c = (\varphi', \psi') \in T$,

$$(a\star b)\star c = \psi'(\varphi(b)) = \varphi(\psi'(b)) = a\star(b\star c)$$

d'après l'hypothèse faite sur T .

D^* est donc un demi-groupe, évidemment extension idéale de D . Soit τ l'homomorphisme canonique de $\Pi(D^*)$ vers $\Omega(D)$ fournie par le théorème 1. La restriction de $\tau \circ \pi^*$ à E est π (théorème 1) ; la restriction de $\tau \circ \pi^*$ à T est déterminée par les formules (5), qui donnent, pour tous $x \in E$ et $a = (\varphi, \psi) \in T$,

$$\varkappa_g(\tau(\pi_a^*))(x) = a\star x = \varphi(x) \ , \qquad \varkappa_d(\tau(\pi_a^*))(x) = x\star a = \psi(x) \ ,$$

d'où $\tau(\pi_a^*) = a$. L'image de τ est donc $\Pi(D) \cup T = T$, et T est le type de l'extension idéale considérée, ce qui achève la démonstration.

Ce théorème est la réciproque de la proposition 12 ; en les combinant, il vient :

COROLLAIRE. - Une partie T de $\Omega(D)$ est un type d'extension de D si, et seulement si, elle vérifie les conditions (a) et (b) de la proposition 12.

(Du théorème 1' résulte aussi qu'il y a identité entre les types d'extension de D et les types des monomorphismes idéaux issus de D .)

Comme première application, on a la solution du problème suivant ([2], p. 12) : trouver un demi-groupe D^* , extension idéale de D , tel que toute translation de D soit restriction d'une translation interne de D^* .

PROPOSITION 13. - Un tel demi-groupe existe si, et seulement si :

(a) toute translation à gauche de D est liée à une translation à droite au moins, et vice versa ;

(b) toute translation à gauche commute avec toute translation à droite.

Une condition nécessaire et suffisante est l'existence d'un type d'extension T de D tel que $\varkappa_g(T) = \Lambda(D)$ et que $\varkappa_d(T) = P(D)$. Les conditions ci-dessus sont alors nécessaires, d'après la proposition 12. Et, si elles sont remplies, $\Omega(D)$ est le type cherché, d'après le corollaire du théorème 2.

Si D est globalement idempotent, on peut supprimer la condition (b) (prop. 7) ; de même, si D est faiblement réductif (prop. 8), on obtient alors le théorème 1.3 de [2].

Comme seconde application, on a le

THÉORÈME 3. - La réunion des types d'extension de D est $\widetilde{\Omega}(D)$.

Il résulte de la proposition 12 que tout type d'extension de D est contenu dans $\widetilde{\Omega}(D)$. Réciproquement, si $(\varphi , \psi) \in \widetilde{\Omega}(D)$, il existe un type d'extension de D contenant (φ , ψ) ; considérons en effet

$$T = \Pi(D) \cup \{(\varphi , \psi)^n\}_{n\in \underset{\sim}{N}}$$

(où $\underset{\sim}{N}$ est l'ensemble des entiers strictement positifs). T est réunion d'une partie stable de $\Omega(D)$ et d'un idéal de $\Omega(D)$ (prop. 5), donc est une partie stable de $\Omega(D)$; et T contient $\Pi(D)$. D'autre part, toute puissance de φ et toute translation à gauche interne commutent avec toute puissance de ψ et toute translation à droite interne, puisque φ commute avec ψ ; T est donc un type d'extension (corollaire du théorème 2). T est d'ailleurs le plus petit type d'extension contenant (φ , ψ) .

Ce théorème peut aussi être énoncé comme suit :

COROLLAIRE. - Soient φ , ψ deux applications de E dans E . Pour qu'il existe une extension idéale D^* de D et un élément a du support tel que $\pi^*_{a|E} = (\varphi , \psi)$ (resp. $\gamma^*_{a|E} = \varphi$, $\delta^*_{a|E} = \psi$), il faut et il suffit que $(\varphi , \psi) \in \widetilde{\Omega}(D)$ (resp. $\varphi \in \widetilde{\Lambda}(D)$, $\psi \in \widetilde{P}(D)$).

Avant de passer aux autres applications, exposées aux paragraphes 5 et 6, nous faisons un retour sur le théorème 2 et donnons quelques propriétés de la classe des extensions idéales de D de type donné.

PROPOSITION 14. - Soient D' une extension idéale de D de type T , et D'' une extension idéale de D' de type $\Pi(D')$. Alors, D'' est une extension idéale de D , de type T .

Soient E' et E'' les supports respectifs de D' et D'' . Pour tout $a \in E''$, $\pi''_{a|E'} \in \Pi(D')$, donc a une restriction à E ; π''_a a donc une restriction à E ; et D est un idéal de D'' . D'' est donc une extension idéale de D ; son type est l'ensemble des $\pi''_{a|E}$ pour $a \in E''$; donc aussi l'ensemble des $(\pi''_{a|E'})_{|E}$ pour $a \in E''$; comme l'ensemble des $\pi''_{a|E'}$ pour $a \in E''$ n'est autre que $\Pi(D')$, le type cherché est T .

Cette proposition prouve qu'il n'existe pas d'extension idéale de D de type T , "maximale" ; la construction du théorème 2 permet en effet de choisir $D' \subset D''$ (strictement). La classe des extensions idéales de D de type T est donc infinie.

On ne sait pas s'il existe une extension idéale de D de type T qui soit "minimum" à quelque point de vue. Toutefois :

THÉORÈME 4. - **Si** D est faiblement réductif, et si T est un type d'extension de D, il existe un demi-groupe D_0^* et un monomorphisme idéal μ_0 de D vers D_0^* tels que T soit le type de μ_0, et que, si μ est un autre monomorphisme idéal de type T de D vers un demi-groupe D^*, il existe un homomorphisme et un seul de D^* vers D_0^* tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} D^* \arrow[rr, dashed] & & D_0^* \\ & D \arrow[ul, "\mu"] \arrow[ur, "\mu_0"'] & \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

On peut prendre $D_0^* = T$ et $\mu_0 = \pi$. En effet, puisque D est faiblement réductif, π est un monomorphisme, idéal d'après la proposition 5. D'autre part, si μ est un monomorphisme idéal de D vers D^*, de type T, le théorème 1' fournit un homomorphisme τ de $\Pi(D^*)$ vers T, tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\pi"'] & D^* \arrow[d, "\pi^*"] \\ T & \Pi(D^*) \arrow[l, "\tau"'] \end{tikzcd}$$

soit commutatif ; et $\nu = \tau \circ \pi^*$ est un homomorphisme de D^* vers T tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\pi"'] & D^* \arrow[dl, "\nu"] \\ T & \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

L'unicité d'un homomorphisme ν ayant ces propriétés ne résulte pas de celle de τ, mais se démontre de manière analogue. Si ν' est un homomorphisme de D^* vers T tel que $\pi = \nu' \circ \mu$, on a, E^* étant le support de D^*, pour tous $a \in E^*$ et $x \in E$:

$$\nu'(a).\pi_x = \nu'(a).\nu'(\mu(x)) = \nu'(a\mu(x)) = \pi_{\mu^{-1}(a\mu(x))} ,$$

et de même $\pi_x.\nu'(a) = \pi_{\mu^{-1}(\mu(x)a)}$. Comme ν a **aussi** cette propriété, il résulte **du lemme** 1, puisque D est faiblement réductif, que $\nu'(a) = \nu(a)$ pour tout $a \in E^*$, c'est-à-dire $\nu' = \nu$.

On notera que le problème, dont le théorème 4 donne une solution, est un problème universel ordinaire. Les autres solutions sont les couples (D_0^* , μ_0) tels qu'il existe un isomorphisme ι (alors unique) de T vers D_0^* tel que $\mu_0 = \iota \circ \pi$. En particulier, il existe des solutions où D_0^* est extension idéale de D et μ_0 l'injection canonique.

On notera aussi que, si D est faiblement réductif, la condition (b) de la proposition 12 est trivialement vérifiée (prop. 8).

5. Idéaux semi-caractéristiques. Composition des monomorphismes idéaux.

La proposition suivante étend partiellement la proposition 14.

PROPOSITION 15. - Soient D un demi-groupe de support E , D' une extension idéale de D , D" une extension idéale de D' de type T' . D est un idéal de D" si et seulement si, pour tout $(\varphi , \psi) \in T'$, $\varphi(E) \subseteq E$ et $\psi(E) \subseteq E$.

Soient E' et E" les supports respectifs de D' et D" . D est un idéal de D" si et seulement si $\pi''_{a|E}$ existe pour tout $a \in E''$; donc si et seulement si $(\pi''_{a|E'})_{|E}$ existe pour tout $a \in E''$, puisque $\pi''_{a|E'}$ existe et que $E \subseteq E'$. Comme on a précisément $T' = \{\pi''_{a|E'}\}_{a\in E''}$, ceci équivaut à la condition de l'énoncé.

Ce résultat conduit aux définitions suivantes.

DÉFINITION 9. Si D est un demi-groupe de support E , on appelle <u>idéal à gauche</u> (resp. <u>à droite</u>) <u>caractéristique</u> toute partie A de E telle que, pour tout $\varphi \in \Lambda(D)$ (resp. $\psi \in P(D)$), on ait $\varphi(A) \subseteq A$ (resp. $\psi(A) \subseteq A$) ; et <u>idéal caractéristique</u> toute partie A de E qui est à la fois un idéal à gauche caractéristique et un idéal à droite caractéristique.

Un idéal à gauche (resp. à droite) caractéristique est un idéal à gauche (resp. à droite) (prop. 1). Un idéal caractéristique est un idéal. Par contre, si D est le demi-groupe du § 2, $\{a , b\}$ est un idéal, et n'est pas un idéal à droite ou à gauche caractéristique, car, si φ est la translation définie au § 2,

$$\varphi(\{a , b\}) = \{a , c\} .$$

PROPOSITION 16. - Si A est un idéal caractéristique de D , A est un idéal de toute extension idéale de D (et de même pour les idéaux à gauche, ou à droite).

Ceci résulte de la proposition 15.

PROPOSITION 17. - Si A est un idéal caractéristique de D, et si B est un idéal caractéristique de A, B est un idéal caractéristique de D (et de même pour les idéaux à gauche, ou à droite).

En effet, si $\varphi \in \Lambda(D)$, $\varphi_{|A}$ existe, et $\varphi_{|A} \in \Lambda(A)$ (prop. 10) ; donc $\varphi(B) \subseteq B$. De même, si $\psi \in P(D)$, $\psi(B) \subseteq B$ (3).

DÉFINITION 10. - Si D est un demi-groupe de support E, on appelle <u>idéal à gauche</u> (resp. <u>à droite</u>) <u>semi-caractéristique</u> de D toute partie A de E telle que, pour tout $\varphi \in \tilde{\Lambda}(D)$ (resp. $\psi \in \tilde{P}(D)$), on ait $\varphi(A) \subseteq A$ (resp. $\psi(A) \subseteq A$) ; et <u>idéal semi-caractéristique</u> toute partie A de E qui est à la fois un idéal à gauche semi-caractéristique et un idéal à droite semi-caractéristique.

Tout idéal caractéristique est un idéal semi-caractéristique, et tout idéal semi-caractéristique est un idéal (et de même pour les idéaux à gauche, ou à droite). L'idéal $\{a , b\}$ ci-dessus n'est pas un idéal à gauche ou à droite semi-caractéristique du demi-groupe du § 2.

PROPOSITION 18. - Soit D un demi-groupe de support E. Une partie A de E est un idéal dans toute extension idéale de D si et seulement si c'est un idéal semi-caractéristique (et de même pour les idéaux à gauche, ou à droite).

A est un idéal dans toute extension idéale de D si et seulement si, pour tout type d'extension T de D, et tout $(\varphi , \psi) \in T$, on a $\varphi(A) \subseteq A$ et $\psi(A) \subseteq A$ (prop. 15) ; la proposition résulte alors du théorème 3.

PROPOSITION 19. - Si A est un idéal semi-caractéristique de D et si B est un idéal semi-caractéristique de A, B est un idéal semi-caractéristique de D.

Ceci se démontre comme la proposition 17.

PROPOSITION 20. - Si ι est un isomorphisme de D vers D', et si A est un idéal caractéristique (resp. semi-caractéristique) de D, $\iota(A)$ est un idéal caractéristique (resp. semi-caractéristique) de D'.

La proposition 11 fournit des applications ι_Λ, ι_P adéquates ; le lecteur pas satisfait (il n'a pas tort !) emploiera les formules (4).

La proposition 15 peut être étendue en une condition nécessaire et suffisante pour que le composé de deux monomorphismes idéaux soit un monomorphisme idéal. Ce point de vue conduit aux propriétés suivantes.

---

(3) Noter l'analogie avec la notion d'idéal caractéristique dans les algèbres de Lie (cf. par exemple [3]).

DÉFINITION 11. - Un monomorphisme de demi-groupes est dit être un monomorphisme idéal caractéristique, ou m. i. c. (resp. monomorphisme idéal semi-caractéristique, ou m. i. s.) si et seulement si son image est un idéal caractéristique (resp. semi-caractéristique) du demi-groupe arrivée.

PROPOSITION 21. - Un monomorphisme μ de D vers D' est un m. i. s. si et seulement si, pour tout monomorphisme idéal μ' issu de D', $\mu' \circ \mu$ est un monomorphisme idéal.

Si μ a cette propriété, $\iota' \circ \mu$ est un monomorphisme idéal pour toute injection canonique ι' de D' dans une extension idéale de D' ; c'est-à-dire que $\mu(D)$ est un idéal dans toute extension idéale de D' ; μ est donc un m. i. s. d'après la proposition 18. Réciproquement, si μ est un m. i. s. et si μ' est un monomorphisme idéal de D' vers D'', μ' est un isomorphisme de D' vers $\mu'(D')$, donc, puisque $\mu(D)$ est un idéal semi-caractéristique de D', $\mu'(\mu(D))$ est un idéal semi-caractéristique de $\mu'(D')$ (prop. 20), donc un idéal de D'' (prop. 18), et $\mu' \circ \mu$ est un monomorphisme idéal.

PROPOSITION 22. - Le composé de deux m. i. c. (resp. m. i. s.) est un m. i. c. (resp. m. i. s.).

Soient μ, μ' deux m. i. c. (resp. m. i. s.) de D vers D' et de D' vers D'' respectivement. μ' étant un isomorphisme de D' vers $\mu'(D')$, $\mu'(\mu(D))$ est un idéal caractéristique (resp. semi-caractéristique) de $\mu'(D')$ (prop. 20), donc un idéal caractéristique (resp. semi-caractéristique) de D'' (prop. 17 (resp. 19)).

La proposition résulte aussi, pour les m. i. s., de la proposition 21.

Il résulte de la proposition 22 que l'on obtient une catégorie en prenant, pour objets, les demi-groupes, et, pour morphismes, les m. i. c. (resp. m. i. s.) ; on appellera cette catégorie catégorie des demi-groupes avec m. i. c. (resp. m. i. s.).

Le théorème 1' s'étend de la manière suivante aux m. i. c. :

THÉORÈME 5.

(a) Soient D et D' des demi-groupes de supports respectifs E et E'. A tout m. i. c. μ de D vers D' est canoniquement associé un homomorphisme τ de $\Omega(D')$ vers $\Omega(D)$, prolongeant l'homomorphisme canonique de $\Pi(D')$ vers $\Omega(D)$, tel que, pour tous $\omega \in \Omega(D')$ et $x \in E$:

$$(6) \quad \varkappa_g(\tau(\omega))(x) = \mu^{-1}(\varkappa_g(\omega)(\mu(x))) , \qquad \varkappa_d(\tau(\omega))(x) = \mu^{-1}(\varkappa_d(\omega)(\mu(x))) ,$$

et que le diagramme

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\pi"'] & D' \arrow[d, "\pi'"] \\ \Omega(D) & \Omega(D') \arrow[l, "\tau"'] \end{tikzcd}$$

soit commutatif ;

(b) si D est faiblement réductif, τ est le seul homomorphisme de $\Omega(D')$ vers $\Omega(D)$ tel que ce diagramme soit commutatif ;

(c) on définit un foncteur contravariant de la catégorie des demi-groupes avec m. i. c. vers la catégorie des demi-groupes, en faisant correspondre à tout demi-groupe D le demi-groupe $\Omega(D)$, et à tout m. i. c. de D vers D' , l'homomorphisme défini ci-dessus de $\Omega(D')$ vers $\Omega(D)$.

Soient D_1 l'image de μ , E_1 son support, ι l'injection canonique de E_1 dans E' . E_1 est un idéal caractéristique de D' ; donc, pour tout $\omega \in \Omega(D')$, $\omega_{|E_1}$ existe ; et $\omega_{|E_1} \in \Omega(D_1)$ (prop. 10). L'application τ_1 qui, à tout $\omega \in \Omega(D')$, fait correspondre $\omega_{|E_1}$ est évidemment un homomorphisme de $\Omega(D')$ vers $\Omega(D_1)$, qui prolonge l'homomorphisme canonique τ_1' de $\Pi(D')$ vers $\Omega(D_1)$, et est donc tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} D_1 \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\pi_1"'] & D' \arrow[d, "\pi'"] \\ \Omega(D_1) & \Omega(D') \arrow[l, "\tau_1"'] \end{tikzcd}$$

soit commutatif ; enfin, on a, pour tous $\omega \in \Omega(D')$ et $x_1 \in E_1$:

$$\varkappa_g(\tau_1(\omega))(x_1) = \varkappa_g(\omega)(x_1) \ , \qquad \varkappa_d(\tau_1(\omega))(x_1) = \varkappa_d(\omega)(x_1) \ .$$

La proposition 11 fournit alors, puisque μ est un isomorphisme de D vers D_1 , un isomorphisme μ_Ω tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\pi"'] & D_1 \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\pi_1"] & D' \arrow[d, "\pi'"] \\ \Omega(D) & \Omega(D_1) \arrow[l, "\mu_\Omega^{-1}"'] & \Omega(D') \arrow[l, "\tau_1"'] \end{tikzcd}$$

soit commutatif. L'homomorphisme $\tau = \mu_\Omega^{-1} \circ \tau_1$ rend alors commutatif le diagramme de l'énoncé, et vérifie les formules (6) (qui d'ailleurs le déterminent complètement) car, par exemple, pour tous $x \in E$ et $\omega \in \Omega(D')$, on a, d'après les formules (4) :

$$\varkappa_g(\tau(\omega))(x) = \varkappa_g(\mu_\Omega^{-1}(\tau_1(\omega)))(x) = \mu_\Lambda^{-1}(\varkappa_g(\tau_1(\omega)))(x)$$

$$= \mu^{-1}(\varkappa_g(\tau_1(\omega))(\mu(x))) = \mu^{-1}(\varkappa_g(\omega)(\mu(x))) \ ;$$

la seconde formule se démontre dualement. Enfin τ prolonge l'homomorphisme canonique de $\Pi(D')$ vers $\Omega(D)$, puisque τ_1 prolonge τ_1', et que cet homomorphisme est $\mu_\Omega^{-1} \circ \tau_1'$ (voir démonstration du théorème 1'). D'où (a).

Si τ' est un autre homomorphisme de $\Omega(D')$ vers $\Omega(D)$, tel que le diagramme de l'énoncé soit commutatif, on a, pour tous $x \in E$ et $\omega \in \Omega(D')$:

$$\tau'(\omega) \circ \pi_x = \tau'(\omega) \circ \tau'(\pi'_{\mu(x)}) = \tau'(\omega \circ \pi'_{\mu(x)}) = \tau'(\pi'_{\varkappa_g(\omega)(\mu(x))}) = \pi'_{\mu^{-1}(\varkappa_g(\omega)(\mu(x)))}$$

d'après les formules (3') ; de même,

$$\pi_x \circ \tau'(\omega) = \pi'_{\mu^{-1}(\varkappa_d(\omega)(\mu(x)))} \ ;$$

comme τ a aussi cette propriété, il résulte du lemme 1 que, si D est faiblement réductif, $\tau' = \tau$.

Enfin, pour démontrer le (c), il suffit de vérifier que, si μ' est un autre m. i. c. de D' vers D'', et τ' l'homomorphisme correspondant de $\Omega(D'')$ vers $\Omega(D')$, alors l'homomorphisme correspondant à $\mu' \circ \mu$ est précisément $\tau \circ \tau'$. Il suffit d'appliquer les formules (6) qui donnent, pour tous $x \in E$ et $\omega \in \Omega(D'')$:

$$\varkappa_g(\tau(\tau'(\omega)))(x) = \mu^{-1}(\varkappa_g(\tau'(\omega))(\mu(x))) = \mu^{-1}(\mu'^{-1}(\varkappa_g(\omega)(\mu'(\mu(x))))) \ ,$$

et de même pour $\varkappa_d$.

Remarques.

1° Si μ est un isomorphisme, l'homomorphisme τ correspondant n'est autre que l'isomorphisme μ_Ω^{-1} fourni par la proposition 11.

2° L'homomorphisme τ s'étend de même canoniquement à $\Lambda(D) \times P(D)$; on obtient ainsi, avec seulement des modifications de détail à la démonstration précédente, un foncteur "plus grand", qui, à tout demi-groupe D, fait correspondre $\Lambda(D) \times P(D)$, etc.

Si maintenant on essaie d'étendre le théorème 1' aux m. i. s., on se heurte à la difficulté suivante : l'opération (fondamentale) de restriction n'est plus applicable qu'aux éléments de $\tilde{\Omega}(D')$, lequel n'est pas en général muni d'une structure canonique de demi-groupe.

On peut alors considérer seulement des demi-groupes faiblement réductifs, ou globalement idempotents, pour lesquels $\tilde{\Omega}(D)$ est un demi-groupe (prop. 7 et 8). Mais la considération de demi-groupes partiels permet de donner un théorème qui ne comporte aucune condition restrictive sur les demi-groupes considérés. Nous appelons <u>demi-groupe partiel</u> tout couple P d'un ensemble E (le <u>support</u> du demi-groupe partiel) et d'une loi de composition incomplète, que nous notons multiplicativement, telle que, pour tous a , b , $c \in E$, si $a(bc)$ et $(ab)c$ sont définis, ils sont égaux. Un <u>homomorphisme de demi-groupes partiels</u> de P vers P' est une application f de E dans le support de P' , telle que, pour tous a , $b \in E$, si ab est défini, $f(a)\, f(b)$ est défini et égal à $f(ab)$. Les demi-groupes partiels, et les homomorphismes de demi-groupes partiels, sont respectivement les objets et les morphismes d'une catégorie, que nous appelons <u>catégorie des demi-groupes partiels</u>.

Si D est un demi-groupe, $\tilde{\Omega}(D)$ est un sous-ensemble de $\Omega(D)$ et est par suite structurable canoniquement en demi-groupe partiel, le produit de deux éléments de $\tilde{\Omega}(D)$ étant défini (dans $\tilde{\Omega}(D)$) si et seulement si leur produit (dans $\Omega(D)$) appartient à $\tilde{\Omega}(D)$, les deux produits étant alors égaux. Ce demi-groupe partiel est noté $\tilde{\Omega}(D)$. (On notera que $\tilde{\Omega}(D)$ "n'a pas trop de trous" ; le produit d'un élément quelconque et d'un élément de $\Pi(D)$ est toujours défini (par les formules (3')), et $\tilde{\Omega}(D)$ est recouvert par de véritables demi-groupes (les types d'extension).)

On a alors le

THÉORÈME 6. - Dans l'énoncé du théorème 5, on peut remplacer au (a) les m. i. c. par des m. i. s. et Ω par $\tilde{\Omega}$, et on obtient au (c) un foncteur contravariant de la catégorie des demi-groupes avec m. i. s. vers celle des demi-groupes partiels.

La démonstration est laissée au lecteur, sous prétexte qu'elle ne diffère de celle du théorème 5 que par des points de détail.

6. Transfert de propriétés des idéaux semi-caractéristiques.

Soit D un demi-groupe de support E . $\mathfrak{L}(D)$ désigne l'ensemble des idéaux à gauche de D et $\mathfrak{I}(D)$ l'ensemble des idéaux de D . On ne suppose pas pour l'instant que D ait un zéro, et on considère la partie vide comme un idéal. $\mathfrak{L}(D)$ est alors muni d'une structure canonique de treillis complet, $\mathfrak{I}(D)$ d'une structure canonique de demi-groupe réticulé quasi-entier complet et $\mathfrak{L}(D)$ d'une structure canonique de $\mathfrak{I}(D)$-algèbre (voir [4]).

LEMME 2. Si D^* est une extension idéale de D, de type à gauche T_g, il existe un épimorphisme (de demi-groupes) canonique θ de $\mathfrak{I}(D^*)$ vers $\mathfrak{I}(T_g)$, $\cup$-distributif, et tel que

$$(\forall\ \mathfrak{a} \in \mathfrak{I}(D^*)) \quad (\forall\ X \in \mathfrak{L}(D)) \qquad \theta(\mathfrak{a}).X = \mathfrak{a}X$$

($\theta(\mathfrak{a}).X$ est l'ensemble des $\varphi(x)$ tels que $\varphi \in \theta(\mathfrak{a})$ et $x \in X$).

Soit τ l'homomorphisme canonique de $\Pi(D^*)$ vers $\Omega(D)$. $\varkappa_g \circ \tau \circ \pi^*$ est un épimorphisme de D^* vers T_g ; si $\mathfrak{a}$ est un idéal de D^*, $\theta(\mathfrak{a}) = \varkappa_g(\tau(\pi^*(\mathfrak{a})))$ est donc un idéal de T_g, et l'application θ ainsi définie est un homomorphisme $\cup$-distributif de $\mathfrak{I}(D^*)$ vers $\mathfrak{I}(T_g)$. θ est surjective, car, si $\mathfrak{a}' \in \mathfrak{I}(T_g)$, $\theta^{-1}(\mathfrak{a}') \in \mathfrak{I}(D^*)$, et $\mathfrak{a}' = \theta(\theta^{-1}(\mathfrak{a}'))$. Il résulte enfin des formules (5) que

$$(\forall\ \mathfrak{a} \in \mathfrak{I}(D^*)) \quad (\forall\ X \in \mathfrak{L}(D)) \qquad \theta(\mathfrak{a}).X = \varkappa_g(\tau(\pi^*(\mathfrak{a}))).X = \mathfrak{a}X .$$

Dans la $\mathfrak{I}(D)$-algèbre $\mathfrak{L}(D)$, on définit (cf. [5]) un idéal à gauche X <u>dual-primal</u> par

$$(\forall\ \mathfrak{a}\ ,\ \mathfrak{b} \in \mathfrak{I}(D)) \quad (\mathfrak{a}X \subset X \quad \text{et} \quad \mathfrak{b}X \subset X \implies \mathfrak{a}X \cup \mathfrak{b}X \subset X) ,$$

<u>dual-tertiaire</u> par

$$(\forall\ \mathfrak{a} \in \mathfrak{I}(D)) \quad (\forall\ Y \in \mathfrak{L}(D)) \qquad (\mathfrak{a}X \subset X \quad \text{et} \quad Y \subset X \implies \mathfrak{a}X \cup Y \subset X) ,$$

<u>dual-premier</u> par

$$(\forall\ \mathfrak{a} \in \mathfrak{I}(D)) \quad (\mathfrak{a}X \subset X \implies \mathfrak{a} = \emptyset) ,$$

les notions d'idéal à gauche dual-premier, dual-primaire et dual-secondaire coïncident alors trivialement.

THÉORÈME 7. - Soit X un idéal à gauche semi-caractéristique de D. Notons $\mathfrak{K}(D)$ l'ensemble des parties de $\mathfrak{I}(D)$, qui sont idéal d'un type à gauche d'extension de D. Alors X est dual-premier dans toute extension idéale de D si et seulement si

$$(\forall\ \mathfrak{a} \in \mathfrak{K}(D)) \quad (\mathfrak{a}.X \subset X \implies \mathfrak{a} = \emptyset) ,$$

dual-tertiaire dans toute extension idéale de D si et seulement si

$$(\forall\ \mathfrak{a} \in \mathfrak{K}(D)) \quad (\forall\ Y \in \mathfrak{L}(D)) \qquad (\mathfrak{a}X \subset X,\ Y \subset X \ \text{ et } \ \mathfrak{a}.Y \subsetneq Y \implies \mathfrak{a}.X \cup Y \subset X) ,$$

dual-primal dans toute extension idéale de D si et seulement si

$$(\forall \mathfrak{a}\ ,\mathfrak{b} \in \mathfrak{K}(D)) \quad (\mathfrak{a}.X \subset X,\ \mathfrak{b}.X \subset X,\ \mathfrak{a} \cup \mathfrak{b} \in \mathfrak{K}(D) \ \text{ et } \ \mathfrak{a}\mathfrak{b} \cup \mathfrak{b}\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \implies \mathfrak{a}.X \cup \mathfrak{b}.X \subset X) .$$

Tout d'abord, X est un idéal à gauche de toute extension idéale de D (prop. 18).

D'après le lemme 2, X est dual-premier dans toute extension idéale de D si et seulement si, pour tout type à gauche d'extension T_g, et tout idéal $\mathfrak{a}$ de T_g, $\mathfrak{a}.X \subset X$ entraîne $\mathfrak{a} = \emptyset$; ceci équivaut à l'implication de l'énoncé par définition de $\mathcal{K}(D)$.

Pour les deux autres conditions, la démonstration est plus compliquée. Tout d'abord, si X vérifie la première, il est dual-tertiaire dans toute extension idéale D^* de D ; car, soient $\mathfrak{a}' \in \mathfrak{J}(D^*)$ et $Y \in \mathcal{L}(D^*)$, tels que $\mathfrak{a}'X \subset X$ et $Y \subset X$; on a, d'après le lemme 2,

$$\theta(\mathfrak{a}') \in \mathcal{K}(D) \ , \quad Y \in \mathcal{L}(D) \ , \quad \theta(\mathfrak{a}').X = \mathfrak{a}'X \subset X \quad \text{et} \quad \theta(\mathfrak{a}').Y = \mathfrak{a}'Y \subseteq Y \ ;$$

d'où

$$\mathfrak{a}'X \cup Y = (\theta(\mathfrak{a}').X) \cup Y \subset X \ .$$

Supposons réciproquement que X soit dual-tertiaire dans toute extension idéale de D, et soient $\mathfrak{a} \in \mathcal{K}(D)$, $Y \in \mathcal{L}(D)$ tels que $\mathfrak{a}.X \subset X$, $Y \subset X$ et $\mathfrak{a}.Y \subseteq Y$. Puisque $\mathfrak{a} \in \mathcal{K}(D)$, il existe un type à gauche T_g dont $\mathfrak{a}$ soit un idéal ; soit D^* une extension idéale de D de type à gauche T_g ; soit τ l'homomorphisme canonique de $\Pi(D^*)$ vers $\Omega(D)$; $\nu = \varkappa_g \circ \tau \circ \pi^*$ est un épimorphisme de D^* vers T_g.

$\mathfrak{a} \cup \Gamma(D)$ est une partie stable de T_g, contenant $\Gamma(D)$, donc $\nu^{-1}(\mathfrak{a} \cup \Gamma(D))$ est le support d'un sous-demi-groupe D' de D^*, et contient E, donc D' est extension idéale de D, de type à gauche $\nu(\nu^{-1}(\mathfrak{a} \cup \Gamma(D))) = \mathfrak{a} \cup \Gamma(D)$ puisque ν est surjectif. $\mathfrak{a}$ est un idéal de $\mathfrak{a} \cup \Gamma(D)$, donc (lemme 2) il existe un idéal $\mathfrak{a}'$ de D' tel que $\theta(\mathfrak{a}') = \mathfrak{a}$. Enfin $Y \in \mathcal{L}(D')$ car

$$(\mathfrak{a} \cup \Gamma(D)).Y = \mathfrak{a}.Y \cup \Gamma(D).Y \subseteq Y \ .$$

X étant dual-tertiaire dans D', $\mathfrak{a}'X = \mathfrak{a}.X \subset X$ et $Y \subset X$ entraînent

$$\mathfrak{a}.X \cup Y = \mathfrak{a}'X \cup Y \subset X \ :$$

ce qu'il fallait démontrer.

Enfin, supposons que X vérifie la dernière condition de l'énoncé, et soit D^* une extension idéale de D ; X est dual-primal dans D^* car, si $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}' \in \mathfrak{J}(D^*)$ sont tels que $\mathfrak{a}'X \subset X$ et $\mathfrak{b}'X \subset X$, on a, d'après le lemme 2, en posant $\mathfrak{a} = \theta(\mathfrak{a}')$, $\mathfrak{b} = \theta(\mathfrak{b}')$: $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b} \in \mathcal{K}(D)$, $\mathfrak{a}X = \mathfrak{a}'X \subset X$, $\mathfrak{b}.X = \mathfrak{b}'X \subset X$, $\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b} = \theta(\mathfrak{a}' \cup \mathfrak{b}') \in \mathcal{K}(D)$,

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \theta(\mathfrak{a}'\mathfrak{b}') \subseteq \theta(\mathfrak{a}') \cap \theta(\mathfrak{b}') = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \ ,$$

et enfin, de même, $\mathfrak{b}\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$; par suite $\mathfrak{a}'X \cup \mathfrak{b}'X = \mathfrak{a}.X \cup \mathfrak{b}.X \subset X$.

Supposons réciproquement, pour finir, que X soit dual-primal dans toute extension idéale de D, et soient $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B} \in \mathcal{K}(D)$ tels que $\mathfrak{A}.X \subset X$, $\mathfrak{B}.X \subset X$, $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B} \in \mathcal{K}(D)$ et $\mathfrak{A}\mathfrak{B} \cup \mathfrak{B}\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$. Puisque $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B} \in \mathcal{K}(D)$, le raisonnement fait sur $\mathfrak{A}$ dans la réciproque précédente fournit un demi-groupe D', extension idéale de D de type à gauche $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B} \cup \Gamma(D) = T_g$. Montrons que $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ sont des idéaux de T_g ; puisque $\mathfrak{A}$ est idéal d'un type à gauche, qui contient $\Gamma(D)$, on a

$$\Gamma(D)\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A} \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{A}\Gamma(D) \subseteq \mathfrak{A} \ ;$$

par suite

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B} \cup \Gamma(D)) \subseteq \mathfrak{A} \qquad \text{et} \qquad (\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B} \cup \Gamma(D))\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A} \ ;$$

de même pour $\mathfrak{B}$. Il existe alors (lemme 2) deux idéaux $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$ de D' tels que $\theta(\mathfrak{A}') = \mathfrak{A}$, $\theta(\mathfrak{B}') = \mathfrak{B}$. X étant dual-primal dans D',

$$\mathfrak{A}'X = \mathfrak{A}.X \subset X \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{B}'X = \mathfrak{B}.X \subset X$$

entraînent

$$\mathfrak{A}.X \cup \mathfrak{B}.X = \mathfrak{A}'X \cup \mathfrak{B}'X \subset X \ ,$$

ce qui achève la démonstration.

On notera que la démonstration de ce théorème utilise seulement la notion de type à gauche d'extension, et non les théorèmes d'existence du § 4. L'emploi de ces théorèmes va augmenter l'intérêt du résultat précédent, en caractérisant les éléments de $\mathcal{K}(D)$ parmi les parties de $\Lambda(D)$.

PROPOSITION 23. - Une partie $\mathfrak{A}$ de $\Lambda(D)$ est idéal d'un type à gauche d'extension de D si et seulement si

(a) $\mathfrak{A}$ est stable ;

(b) $\Gamma(D)\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}\Gamma(D) \subseteq \mathfrak{A}$;

(c) tout élément de $\mathfrak{A}$ a une associée qui commute avec tous les éléments de $\mathfrak{A}$.

Les conditions (a), (b), (c) sont nécessaires, puisqu'un idéal est une partie stable, qu'un type à gauche contient $\Gamma(D)$ et est l'image par $\varkappa_g$ d'un type d'extension qui vérifie la condition (b) de la proposition 12.

Réciproquement, si une partie $\mathfrak{A}$ de $\Lambda(D)$ vérifie (a), (b), (c), soit

$$T_1 = \{ (\varphi \, , \psi) \in \Omega(D) \ ; \ \varphi \in \mathfrak{A} \qquad \text{et} \qquad (\forall \varphi' \in \mathfrak{A}) \ \ \psi \circ \varphi' = \varphi' \circ \psi \} \ ;$$

T_1 est une partie stable de $\Omega(D)$; en effet, si (φ , ψ), $(\varphi' , \psi') \in T_1$, $\varphi \circ \varphi' \in \mathfrak{A}$ d'après (a) et $\psi' \circ \psi$ commute avec tout élément de $\mathfrak{A}$, donc

$$(\varphi \, , \psi).(\varphi' \, , \psi') \in T_1 \ .$$

$T = T_1 \cup \Pi(D)$ est donc une partie stable de $\Omega(D)$, contenant $\Pi(D)$; et, si (φ , ψ) , $(\varphi' , \psi') \in T$, φ commute avec ψ' , car, ou bien l'une des deux est interne, ou bien cela résulte de la définition de T_1 . T est donc un type d'extension (corollaire du théorème 2) ; $\varkappa_g(T)$ est un type à gauche d'extension. Or, d'après (c), $\varkappa_g(T_1) = \mathfrak{A}$; donc $\varkappa_g(T) = \mathfrak{A} \cup \Gamma(D)$ est un type à gauche d'extension, et $\mathfrak{A}$ est un idéal de $\mathfrak{A} \cup \Gamma(D)$ d'après (a) et (b).

Les conditions du théorème 7 peuvent-elles être comparées aux conditions analogues dans une algèbre d'idéaux adéquate ? On peut penser d'abord à munir l'ensemble des idéaux à gauche semi-caractéristiques d'une structure de $\mathcal{K}(D)$-algèbre ; mais il semble bien que cette opération soit impossible si D est quelconque. On a une exception lorsque $\widetilde{\Lambda}(D) = \Gamma(D)$.

PROPOSITION 24. - On a $\widetilde{\Lambda}(D) = \Gamma(D)$ si et seulement si D a un élément unité à gauche ; et en ce cas, $\Lambda(D) = \Gamma(D)$.

On a toujours $(I_E , I_E) \in \widetilde{\Omega}(D)$ (I_E étant l'application identique de E) ; donc, si $\widetilde{\Lambda}(D) = \Gamma(D)$, $I_E \in \Gamma(D)$, et il existe $e \in E$ tel que $\gamma_e = I_E$, donc qui est élément unité à gauche.

Réciproquement, si D a un élément unité à gauche e , on a $\Lambda(D) = \widetilde{\Lambda}(D) = \Gamma(D)$; car, si $\varphi \in \Lambda(D)$, on a, pour tout $x \in E$:

$$\varphi(x) = \varphi(ex) = \varphi(e)x = \gamma_{\varphi(e)}(x) ,$$

d'où $\varphi \in \Gamma(D)$.

COROLLAIRE 1 (du théorème 7) (on peut aussi donner une démonstration directe). - Si D a un élément unité à gauche, et si X est un idéal à gauche de D , X est dual-premier (resp. dual-tertiaire, dual-primal) dans toute extension idéale de D si et seulement si X est dual-premier (resp. dual-tertiaire, dual-primal) dans D .

Tout d'abord, X est un idéal à gauche caractéristique (puisque $\Lambda(D) = \Gamma(D)$). Comme tout type à gauche d'extension de D est égal à $\Gamma(D)$, on a $\mathcal{K}(D) = \mathfrak{I}(\Gamma(D))$; et les conditions du théorème 7 expriment alors que X est dual-premier (resp. dual-tertiaire, dual-primal) dans la $\mathfrak{I}(\Gamma(D))$-algèbre $\mathfrak{L}(D)$ (les conditions $\mathfrak{A}.Y \subseteq Y$, $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B} \in \mathcal{K}(D)$, $\mathfrak{A}\mathfrak{B} \cup \mathfrak{B}\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$, qui figurent dans les membres de gauche des implications étant alors trivialement vérifiées) ; on sait bien que ces conditions sont équivalentes aux conditions correspondantes dans la $\mathfrak{I}(D)$-algèbre $\mathfrak{L}(D)$.

D'autre part, si D est globalement idempotent, ou faiblement réductif, il résulte de la proposition 7, ou 8, que $\widetilde{\Omega}(D) = \Omega(D)$ et que $\widetilde{\Omega}(D)$ est un type d'extension (corollaire du théorème 2) ; par suite, $\widetilde{\Lambda}(D)$ est un type à gauche d'extension. L'ensemble des idéaux à gauche semi-caractéristiques de D est alors structurable canoniquement en $\mathfrak{J}(\widetilde{\Lambda}(D))$-algèbre, qu'on appellera <u>algèbre des idéaux à gauche ~~semi-~~caractéristiques</u> ; on a $\mathfrak{J}(\widetilde{\Lambda}(D)) \subseteq \mathfrak{K}(D)$.

COROLLAIRE 2. - Si D est un demi-groupe faiblement réductif, ou globalement idempotent, et si X est un idéal à gauche semi-caractéristique de D qui est dual-premier (resp. dual-tertiaire, dual-primal) dans toute extension idéale de D , alors X est dual-premier (resp. dual-tertiaire, dual-primal) dans l'algèbre des idéaux à gauche semi-caractéristiques.

En effet, les conditions $\mathfrak{A}.Y \subseteq Y$, $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B} \in \mathfrak{K}(D)$, $\mathfrak{A}\mathfrak{B} \cup \mathfrak{B}\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$, qui figurent dans les membres de gauche des implications du théorème 7, sont trivialement vérifiées lorsque $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B} \in \mathfrak{J}(\widetilde{\Lambda}(D))$ et que Y est semi-caractéristique.

Dans toute la fin, on suppose maintenant que D a un zéro z . Alors l'ensemble $\mathfrak{L}^*(D) = \mathfrak{L}(D) - \{\emptyset\}$ est muni d'une structure canonique de treillis complet, d'élément minimum $Z = \{z\}$, l'ensemble $\mathfrak{J}^*(D) = \mathfrak{J}(D) - \{\emptyset\}$ est muni d'une structure canonique de demi-groupe réticulé quasi-entier complet, d'élément minimum Z , et $\mathfrak{L}^*(D)$ est muni d'une structure canonique de $\mathfrak{J}^*(D)$-algèbre (voir [4]). On ne considère plus maintenant que des idéaux à gauche non vides, et toutes les conditions qu'on étudiera sont prises dans des algèbres d'idéaux non vides.

PROPOSITION 25. - Z est un idéal caractéristique.

Si $\varphi \in \Lambda(D)$, $\varphi(z) = \varphi(zz) = \varphi(z)z = z$; de même, si $\psi \in P(D)$, $\psi(z) = z$.

z est donc zéro de toute extension idéale de D .

PROPOSITION 26. - $\zeta = \gamma_z = \delta_z$ est un zéro de $\Lambda(D)$ et de $P(D)$.

Si $\varphi \in \Lambda(D)$, on a, pour tout $x \in E$:

$$\zeta(\varphi(x)) = z = \zeta(x) , \qquad \varphi(\zeta(x)) = \varphi(z) = z = \zeta(x) ,$$

donc ζ est un zéro de $\Lambda(D)$; et, de même, de $P(D)$.

Dans la $\mathfrak{J}^*(D)$-algèbre $\mathfrak{L}^*(D)$, on définit (cf. [5]) un idéal à gauche non vide X <u>dual-primal</u> par

$$(\forall\ \mathfrak{A} , \mathfrak{B} \in \mathfrak{J}^*(D)) \quad (\mathfrak{A}X \not\subset X \quad \text{et} \quad \mathfrak{B}X \not\subset X \Longrightarrow \mathfrak{A}X \cap \mathfrak{B}X \not\subset X) ,$$

<u>dual-tertiaire</u> par

$$(\forall\ \mathfrak{A} \in \mathfrak{J}^*(D)) \quad (\forall\ Y \in \mathfrak{L}^*(D)) \qquad (\mathfrak{A}X \subset X \quad \text{et} \quad Y \subset X \Longrightarrow \mathfrak{A}X \cup Y \subset X) ,$$

dual-secondaire par

$$(\forall\ \mathfrak{A} \in \mathfrak{I}^*(D))(\mathfrak{A}X \subset X \Longrightarrow ((\exists\ n \in \underset{\sim}{N} \cup \{0\})(\exists\ \mathfrak{L}_1,\dots,\mathfrak{L}_n \in \mathfrak{I}^*(D))(\exists\ k_0,k_1,\dots,k_n \in \underset{\sim}{N})$$

$$\mathfrak{L}_1 X = X\ ,\ \dots\ ,\ \mathfrak{L}_n X = X\ ,\ \mathfrak{A}^{k_0}\,\mathfrak{L}_1\,\mathfrak{A}^{k_1}\,\mathfrak{L}_2\,\mathfrak{A}^{k_2}\ \dots\ \mathfrak{L}_n\,\mathfrak{A}^{k_n}\,X = Z))\ ,$$

dual-primaire par

$$(\forall\ \mathfrak{A} \in \mathfrak{I}^*(D))\quad (\mathfrak{A}X \subset X \quad\Longrightarrow\quad ((\exists\ k \in \underset{\sim}{N})\ \mathfrak{A}^k\,X = Z)\ ,$$

dual-premier par

$$(\forall\ \mathfrak{A} \in \mathfrak{I}^*(D))\quad (\mathfrak{A}X \subset X \quad\Longrightarrow\quad \mathfrak{A}X = Z)\ .$$

THÉOREME 8. - Soit X un idéal à gauche semi-caractéristique non vide de D. Notons $\mathcal{K}^*(D) = \mathcal{K}(D) - \{\emptyset\}$. Alors X est dual-premier dans toute extension idéale de D si et seulement si

$$(\forall\ \mathfrak{A} \in \mathcal{K}^*(D))\quad (\mathfrak{A}.X \subset X \quad\Longrightarrow\quad \mathfrak{A}.X = Z)\ ,$$

dual-primaire dans toute extension idéale de D si et seulement si

$$(\forall\ \mathfrak{A} \in \mathcal{K}^*(D))\quad (\mathfrak{A}X \subset X \quad\Longrightarrow\quad ((\exists\ k \in \underset{\sim}{N})\ \mathfrak{A}^k.X = Z)\ ,$$

dual-secondaire dans toute extension idéale de D si et seulement si

$$(\forall\ \mathfrak{A} \in \mathcal{K}^*(D))(\mathfrak{A}.X \subset X \Longrightarrow ((\exists\ n \in \underset{\sim}{N} \cup \{0\})(\exists\ \mathfrak{L}_1,\dots,\mathfrak{L}_n \in \mathcal{K}^*(D))(\exists\ k_0,k_1,\dots,k_n \in \underset{\sim}{N})$$

$$\mathfrak{L}_1 \cup \dots \cup \mathfrak{L}_n \subseteq \mathfrak{A} \cup \Gamma(D)\ ,\quad \mathfrak{L}_1.X = X,\dots,\mathfrak{L}_n.X = X\ ,\quad \mathfrak{A}^{k_0}\mathfrak{L}_1\mathfrak{A}^{k_1}\mathfrak{L}_2\mathfrak{A}^{k_2}\dots\mathfrak{L}_n\mathfrak{A}^{k_n}.X = Z))\ ,$$

dual-tertiaire dans toute extension idéale de D si et seulement si

$$(\forall\ \mathfrak{A} \in \mathcal{K}^*(D))(\forall\ Y \in \mathcal{L}^*(D))\quad (\mathfrak{A}.X \subset X\ ,\quad Y \subset X \quad \text{et} \quad \mathfrak{A}.Y \subseteq Y \quad\Longrightarrow\quad \mathfrak{A}.X \cup Y \subset X)\ ,$$

dual-primal dans toute extension idéale de D si et seulement si

$$(\forall\ \mathfrak{A},\mathfrak{B} \in \mathcal{K}^*(D))\quad (\mathfrak{A}.X \subset X\ ,\quad \mathfrak{B}.X \subset X\ ,\quad \mathfrak{A} \cup \mathfrak{B} \in \mathcal{K}^*(D) \quad \text{et} \quad \mathfrak{A}\mathfrak{B} \cup \mathfrak{B}\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$$

$$\Longrightarrow\quad \mathfrak{A}.X \cup \mathfrak{B}.X \subset X)\ .$$

La démonstration ne sera pas donnée en détail car elle est analogue à celle du théorème 7 ; si on se donne une extension idéale de D, l'homomorphisme θ du lemme 2 envoie un idéal non vide sur un idéal non vide, et l'image réciproque par θ d'un idéal non vide est un idéal non vide quelle que soit la manière dont on la choisit ; dans les démonstrations du théorème 7 on passe donc d'un idéal non vide à un idéal non vide, ce qui permet de les étendre au théorème 8. La condition "dual-primaire" se traite, d'autre part, comme la condition "dual-premier". Enfin, pour la condition "dual-secondaire", les propriétés supplémentaires imposées aux $\mathfrak{L}_i$, dans la condition de l'énoncé, expriment qu'ils sont contenus dans $\mathfrak{A} \cup \Gamma(D)$; si X est dual-secondaire dans toute extension idéale de D , on peut, puisque $\mathfrak{A} \cup \Gamma(D)$ est un type à gauche d'extension, choisir ainsi les $\mathfrak{L}_i$; réciproquement, si X vérifie la condition de l'énoncé, on peut, si D^* est une extension idéale de D et si $\mathfrak{A} \in \mathfrak{J}^*(D^*)$ est tel que $\mathfrak{A}X \subset X$, trouver des <u>parties</u> $\mathfrak{L}_i$ de E^* telles que $\mathfrak{L}_i X = X$, etc. ; or les idéaux $\bar{\mathfrak{L}}_i$ engendrés dans D^* par les $\mathfrak{L}_i$ sont aussi tels que $\bar{\mathfrak{L}}_i X = X$, etc., et X est dual-secondaire dans D^* .

On a de même les corollaires suivants.

COROLLAIRE 1. - Si D a un élément unité à gauche, et si X est un idéal à gauche non vide de D , X est dual-premier (resp. dual-primaire, dual-secondaire, dual-tertiaire, dual-primal) dans toute extension idéale de D si, et seulement si, il est dual-premier (resp. dual-primaire, dual-secondaire, dual-tertiaire, dual-primal) dans D .

COROLLAIRE 2. - Si D est un demi-groupe faiblement réductif, ou globalement idempotent, tout idéal à gauche semi-caractéristique non vide de D qui est dual-premier (resp. dual-primaire, dual-secondaire, dual-tertiaire, dual-primal) dans toute extension idéale de D est aussi dual-premier (resp. dual-primaire, dual-secondaire, dual-tertiaire, dual-primal) dans l'algèbre des idéaux à gauche semi-caractéristiques non vides.

$\tilde{\Lambda}(D)$ est alors un demi-groupe avec zéro, et l'ensemble des idéaux à gauche semi-caractéristiques non vides est structurable canoniquement en $\mathfrak{J}^*(\tilde{\Lambda}(D))$-algèbre. La démonstration est analogue à celle du corollaire 2 du théorème 7 ; pour la condition "dual-secondaire", on a de plus besoin de remplacer les $\mathfrak{L}_i$ par les idéaux engendrés dans $\tilde{\Lambda}(D)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CLIFFORD (A. H.). - Extensions of semigroups, Trans. Amer. math. Soc., t. 68, 1950, p. 165-173.

[2] CLIFFORD (A. H.) and PRESTON (G. B.). - The algebraic theory of semigroups, Vol. 1. - Providence, American mathematical Society, 1961 (Mathematical Surveys, 7).

[3] DIXMIER (Jacques). - Algèbres de Lie. - Paris, Centre de Documentation universitaire, 1959 (Les Cours de Sorbonne).

[4] LESIEUR (L.) et CROISOT (R.). - Algèbre noethérienne non commutative. - Paris, Gauthier-Villars, 1963 (Mémorial des Sciences mathématiques, 154).

[5] LESIEUR (L.) et CROISOT (R.). - Sur la dualité dans les $(\mathcal{T})$-algèbres, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 3e série, t. 77, 1960, p. 175-195.

[6] TETSUYA (K.), HASHIMOTO (T.), AKAZAWA (T.), SHIBATA (R.), INUI (T.) and TAMURA (T.). - All semigroups of order at most 5, J. Gakugei Tokushima Univ., t. 6, 1955, p. 19-39.