Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres

Marie-Paule Brameret

Sur un théorème de I. S. Cohen

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 18, nº 1 (1964-1965), exp. nº 19, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1964-1965__18_1_A15_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
18e année, 1964/65, n° 19

29 mars 1965

SUR UN THÉORÈME DE I. S. COHEN

par Marie-Paule BRAMERET

Tous les anneaux considérés dans cet exposé sont supposés commutatifs et pourvus d'un élément unité. Tous les modules sur ces anneaux sont supposés unitaires. De plus, un homomorphisme d'anneaux envoie l'élément unité sur l'élément unité, et un sous-anneau d'un anneau A contient l'élément unité de A .

1. Introduction.

Un anneau A est de rang fini, s'il existe un entier $n > 0$ tel que tout idéal de A possède un système de générateurs de n éléments, au plus ; le plus petit entier n pous lequel cette condition est vérifiée est appelé le rang de A . Un anneau de rang fini est noethérien. I. S. COHEN a prouvé (cf. [1]) que la dimension (de KRULL) d'un anneau local de rang fini est au plus égale à 1 . Nous nous proposons d'établir la réciproque de ce résultat, c'est-à-dire de prouver le théorème suivant :

THÉORÈME 1. - *Le rang d'un anneau local noethérien de dimension au plus* 1 *est fini.*

Nous verrons sur des exemples que le rang est un invariant des anneaux locaux noethériens, de dimension $\leqslant 1$, distinct de la multiplicité.

2. Résultats auxilaires.

LEMME 2. - *Soient* A *un anneau, et* M *un* A*-module. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Il existe un entier* n *tel que, dans tout système* $M_1 , \ldots , M_{n+1}$ *de* $n + 1$ *sous-modules de* M , *l'un d'entre eux soit contenu dans le sous-module engendré par les* n *autres.*

(ii) *Il existe un entier* n *tel que, dans tout système* $N_1 , \ldots , N_{n+1}$ *de* $n + 1$ *sous-modules de* M , *l'un d'entre eux contienne l'intersection des* n *autres.*

(iii) *Il existe un entier* n *tel que le sous-module de* M , *engendré par une famille finie de sous-modules de* M , *puisse être engendré par* n *éléments de cette famille.*

(iv) Il existe un entier n tel que l'intersection d'une famille finie de sous-modules de M soit l'intersection de n éléments de cette famille.

(v) Il existe un entier n tel que, dans tout système de $n+1$ éléments de M, l'un d'entre eux soit contenu dans le sous-module engendré par les n autres.

Démonstration. - Les équivalences (i) $\Longleftrightarrow$ (iii) et (ii) $\Longleftrightarrow$ (iv) sont évidentes, ainsi que l'implication (i) $\Longrightarrow$ (v).

(i) $\Longleftrightarrow$ (ii). Supposant (i) (resp. (ii)) vérifiée, on prouve (ii) (resp. (i)) en appliquant (i) (resp. (ii)) au système des

$$M_i = \bigcap_{j\neq i} N_i \quad (\text{resp. } N_i = \sum_{j\neq i} M_j) \qquad \text{pour } i = 1, 2, \ldots, n+1 .$$

(v) $\Longleftrightarrow$ (i). Si, pour $i = 1, \ldots, n$, on a

$$M_i \not\subseteq \sum_{j\neq i} M_j ,$$

il existe $x_i \in M_i$, $x_i \notin \sum_{j\neq i} M_j$. Alors, si $y \in M_{n+1}$, on a nécessairement $y \in Ax_1 + \ldots + Ax_n$. D'où $M_{n+1} \subseteq M_1 + \ldots + M_n$.

DÉFINITION 3. - Si un A-module M vérifie les conditions du lemme 2, nous dirons que sa largeur est finie, et le plus petit entier n pour lequel ces conditions sont satisfaites sera appelé la largeur de M. En particulier, nous appellerons largeur de l'anneau A la largeur du A-module A. Nous noterons par $\operatorname{larg} A$ et $\operatorname{larg}_A M$ les largeurs respectives de A et de M.

Puisque le produit de deux idéaux d'un anneau est contenu dans leur intersection, le lemme 2 (ii) entraîne le lemme suivant :

LEMME 4. - Le nombre des idéaux maximaux d'un anneau A de largeur finie est inférieur à $\operatorname{larg} A$; en particulier, A est semi-local.

En général, le rang et la largeur sont deux invariants distincts ; par exemple, la largeur d'un anneau de valuation d'un corps est égale à 1, et cet anneau peut ne pas être noethérien ; le rang d'un anneau de Dedekind est au plus 2 et, s'il possède une infinité d'idéaux maximaux, la largeur d'un tel anneau est infinie. Mais dans le cas des anneaux noethériens locaux, ces deux invariants coïncident, comme le prouve le lemme 5 suivant. On remarquera cependant que, même dans le cas d'un anneau noethérien semi-local, la largeur et le rang peuvent être différents ; en effet, un anneau de Dedekind, dont le nombre des idéaux maximaux est $m > 1$, est principal et donc de rang 1 ; la largeur d'un tel anneau est différente de 1.

LEMME 5. - Soit $(A , m(A))$ un anneau local noethérien. Alors, le rang de A est fini si, et seulement si, sa largeur est finie et ces deux quantités sont égales.

Démonstration. - Il suffit de remarquer que, lorsqu'ils sont finis, la largeur et le rang de A sont égaux à la borne supérieure des dimensions des $(A/m(A))$-espaces vectoriels $I/m(A)I$, lorsque I parcourt le treillis des idéaux de A.

LEMME 6. - Soient A un anneau, M un A-module, et N un sous-module de M. On a les inégalités suivantes :

1° $\mathrm{larg}_A M/N \leqslant \mathrm{larg}_A M$;
2° $\mathrm{larg}_A N \leqslant \mathrm{larg}_A M$;
3° $\mathrm{larg}_A M \leqslant \mathrm{larg}_A M + \mathrm{larg}_A N$.

Démonstration. - Les deux premières inégalités sont évidentes. Démontrons la troisième. Soient $m = \mathrm{larg}_A M/N$, $n = \mathrm{larg}_A N$, et soit $(P_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille finie de sous-modules de M. On suppose que le cardinal de Λ est supérieur à $n + m$. Puisque la largeur du module M/N est m, il existe des éléments

$$P_1 , \dots , P_m$$

de la famille $(P_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ tels que, en posant $P = \sum_{i=1}^{m} P_i$, on ait :

$$P_\lambda \subseteq P + N \qquad \text{quel que soit } \lambda \in \Lambda . \tag{6.1}$$

En raison de la modularité du treillis des sous-modules de M, on a :

$$P_\lambda + P = P + \big((P_\lambda + P) \cap N\big) \qquad \text{quel que soit } \lambda \in \Lambda . \tag{6.2}$$

Posons $P'_\lambda = (P_\lambda + P) \cap N$ pour tout $\lambda \in \Lambda$. Puisque la largeur de N est égale à n, il existe n éléments $P'_{m+1} , \dots , P'_{m+n}$ de la famille $(P'_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ tels que

$$P'_\lambda \subseteq \sum_{i=1}^{n} P'_{m+i} \qquad \text{quel que soit } \lambda \in \Lambda . \tag{6.3}$$

D'où, d'après (6.2),

$$P_\lambda \subseteq \Big(\sum_{i=1}^{n} P_{m+i}\Big) + P \qquad \text{quel que soit } \lambda \in \Lambda ,$$

c'est-à-dire que

$$\sum_{j=1}^{m+n} P_j = \sum_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda .$$

LEMME 7. - Soient $(A, m(A))$ un anneau local noethérien, et $\hat{A}$ le complété de A pour la topologie $m(A)$-adique. Alors, la largeur de A est finie si, et seulement si, celle de $\hat{A}$ est finie, et elles sont égales.

Démonstration. - D'après l'inégalité 1° du lemme 6, et puisque $A/m(A)^m \simeq \hat{A}/m(\hat{A})^m$ pour tout m, il suffit de prouver que la largeur de A est inférieure à la borne supérieure des largeurs des anneaux $A/m(A)^m$. D'après le lemme 5, il suffit de prouver que le rang de A est inférieur à la borne supérieure des rangs des anneaux $A/m(A)^m$. Soit

$$n = \sup_m \left[\operatorname{larg} A/m(A)^m\right] .$$

Si I est un idéal de A, il existe, d'après le lemme d'Artin-Rees, un entier k tel que

$$m(A)^{k+1} \cap I = m(A)\left[m(A)^k \cap I\right] .$$

Le rang de $A/m(A)^{k+2}$ étant inférieur à m, on peut trouver $x_1, \ldots, x_s \in I$, $s \leqslant m$, tels que

$$I = Ax_1 + \ldots + Ax_s + m(A)^{k+1} \cap I .$$

D'où, en appliquant le lemme de Nakayama,

$$I = Ax_1 + \ldots + Ax_s .$$

DÉFINITION 8. - Soient $x_1, \ldots, x_n$ des éléments d'un A-module M. Si l'un d'entre eux est contenu dans le module engendré par les autres, nous dirons qu'ils sont comparables dans leur ensemble. Sinon, nous dirons qu'ils sont incomparables dans leur ensemble.

LEMME 9. - Soient A un anneau de largeur finie, R un sous-anneau de A. On suppose que A est un R-module de largeur n. Alors,

1° Si M est un A-module libre de dimension m, on a

$$\operatorname{larg}_R M = nm .$$

2° Si N est un A-module de type fini, et si m est le nombre minimum de générateurs de N, on a

$$\operatorname{larg}_R N \leqslant nm .$$

Démonstration. - La seconde partie du lemme résulte de la première et du fait que N est le quotient d'un A-module libre de dimension m. Puisque le R-module

M est une somme directe de m sous-modules isomorphes au R-module A, $\operatorname{larg}_R M$ est, d'après le lemme 6, au plus nm. D'autre part, il existe n éléments $a_1, a_2, \dots, a_n$ du R-module A qui sont incomparables dans leur ensemble. Donc, si $x_1, \dots, x_m$ est une base de M sur A, les nm éléments $a_i x_j$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, du R-module M, sont incomparables dans leur ensemble. Par suite,

$$\operatorname{larg}_R M = nm .$$

LEMME 10. - <u>Soient</u> A <u>un anneau, et</u> $I_1, \dots, I_m$ <u>des idéaux de</u> A <u>tels que</u> $I_1 \cap \dots \cap I_m = (0)$. <u>Alors, on a</u>

$$\operatorname{larg} A \leqslant \sum_{i=1}^{m} \operatorname{larg} A/I_i .$$

<u>Démonstration</u>. - Il suffit d'établir le lemme pour $m = 2$. Les A-modules I_1 et $(I_1 + I_2)/I_2$ étant isomorphes, il résulte des inégalités

$$\operatorname{larg} A \leqslant \operatorname{larg}_A(A/I_1) + \operatorname{larg}_A I_1$$

et

$$\operatorname{larg}_A\left[(I_1 + I_2)/I_2\right] \leqslant \operatorname{larg}_A(A/I_2) ,$$

que

$$\operatorname{larg} A \leqslant \operatorname{larg}_A(A/I_1) + \operatorname{larg}_A(A/I_2) .$$

D'où, puisque $\operatorname{larg}_A(A/I_j) = \operatorname{larg}(A/I_j)$ pour $j = 1, 2$, l'inégalité anoncée.

On prouve facilement le lemme suivant :

LEMME 11. - <u>Soient</u> A <u>un anneau,</u> S <u>une partie multiplicative de</u> A. <u>Alors,</u> $\operatorname{larg}_A S^{-1} A$ <u>est inférieure à</u> $\operatorname{larg} A$. <u>En particulier, si la largeur de</u> A <u>est finie, la largeur de l'anneau</u> $S^{-1} A$ <u>est finie</u>.

3. Démonstration du théorème 1.

Soient A un anneau local noethérien de dimension $\leqslant 1$, et $m(A)$ l'idéal maximal de A. Puisque les largeurs de l'anneau A et de l'anneau $\hat{A}$, complété de A pour la topologie $m(A)$-adique, sont égales, et puisque les dimensions de A et de $\hat{A}$ sont les mêmes, on peut supposer l'anneau A complet.

Nous démontrerons successivement le théorème dans les cas suivants :

(I) <u>L'anneau</u> A <u>est de dimension</u> 0.

(II) <u>L'anneau</u> A <u>est de dimension</u> 1, <u>et d'égales caractéristiques</u>.

(III) L'anneau A est de dimension 1, d'inégales caractéristiques, et si p est la caractéristique de son corps résiduel, l'idéal pA n'est contenu dans aucun idéal premier minimal de A.

(IV) L'anneau A est de dimension 1, d'inégales caractéristiques, et si p est la caractéristique de son corps résiduel, l'idéal pA est contenu dans tous les idéaux premiers minimaux de A.

Pour achever la démonstration, il suffira d'examiner le cas où l'idéal (0) admet une décomposition primaire dont le nombre des composants est $\geqslant 2$. On aura

$$Q_1 \cap \ldots \cap Q_s = (0) ,$$

où $s \geqslant 2$, et où les Q_i sont des idéaux primaires de A. Pour $i = 1, \ldots, s$, l'anneau A/Q_i ne possède qu'un seul idéal premier minimal ; il est donc de largeur finie et, d'après le lemme 10, la largeur de l'anneau A est finie.

Démonstration de (I). - Dans ce cas, l'anneau A est artinien, et on procède par récurrence sur l'ordre de nilpotence k de $m(A)$. Si $k = 1$, il n'y a rien à démontrer ; supposons que $k \neq 1$, et que la proposition soit démontrée pour l'ordre de nilpotence $k - 1$. Alors, $\operatorname{larg}_A \left(A/m(A)^{k-1}\right)$ est finie. Il suffit de prouver que $\operatorname{larg}_A \left(m(A)^{k-1}\right)$ est finie. Mais ceci résulte du fait que $m(A)^{k-1}$ est un $\left(\frac{A}{m(A)}\right)$-espace vectoriel de dimension finie.

Démonstration de (II). - Dans ce cas, A contient un sous-corps K isomorphe au corps résiduel, et est un module de type fini sur l'anneau des séries formelles $K[[x]]$, où x est un élément de A qui engendre un idéal primaire pour $m(A)$ (cf. [3], ch. VIII ; § 11 ; corollaire 2 du théorème 24). Puisque la largeur de l'anneau $K[[x]]$ est 1, A est un anneau de largeur finie.

Démonstration de (III). - Dans ce cas, la dimension de l'anneau A/pA est 0. D'après la proposition 1 du chapitre IV de [2], A est un module de type fini sur un anneau B qui est un anneau de valuation. Donc, la largeur de A est finie.

Démonstration de (IV). - Dans ce cas, la caractéristique de A est p^k, k entier > 0. D'après le cas (I), $\operatorname{larg}(A/pA)$ est finie. Donc, $\operatorname{larg}_A (A/pA)$ est finie. Si r est un entier > 0, l'application

$$x + pA \to p^r x + p^{r+1} A$$

détermine un homomorphisme de A-modules, de A/pA sur $(p^r A)/(p^{r+1} A)$. Donc, $\operatorname{larg}_A (p^r A/p^{r+1} A)$ est finie, et, par suite, $\operatorname{larg}_A (A/p^r A) = \operatorname{larg}(A/p^r A)$ est finie.

4. Largeur et multiplicité.

Soit A un anneau local noethérien d'idéal maximal $m(A)$ et de dimension d. Soit $\mathfrak{A}$ un idéal de A ouvert pour la topologie $m(A)$-adique. La longueur du A-module $A/\mathfrak{A}^n$ est, à partir d'un certain n, donnée par la valeur d'un polynôme en n, de degré d, dont les coefficients sont des multiples entiers de $d!$. Le coefficient de n^d est de la forme $e(\mathfrak{A})/d!$, et $e(\mathfrak{A})$ est appelé la multiplicité de $\mathfrak{A}$. La multiplicité de $m(A)$ est appelée la multiplicité de l'anneau A.

Si la dimension de A est 0, la multiplicité de tout idéal ouvert est une constante égale à la longueur de A. Dans ce cas, la multiplicité de A peut être strictement supérieure à la largeur.

Lorsque la dimension de A est 1, la multiplicité mesure, à partir d'un certain n, la dimension du $(A/m(A))$-espace vectoriel $m(A)^n/m(A)^{n+1}$. Donc, dans ce cas, la multiplicité de A est toujours inférieure à la largeur de A.

Mais même dans le cas de largeur 2, les résultats peuvent être très différents.

Soient A un anneau local noethérien de dimension 1, $m(A)$ son idéal maximal. Un élément x de A, non diviseur de zéro dans A, est dit superficiel d'ordre s, si $x \in m(A)^s$ et si, à partir d'un certain n, on a

$$m(A)^n = xm(A)^{n-s} .$$

THÉORÈME 12. - Soient A un anneau local noethérien de dimension 1, $m(A)$ son idéal maximal. Si A possède un élément v superficiel d'ordre 1 non diviseur de 0 dans A, et si la largeur de A est égale à 2, alors la multiplicité de A est égale à 2.

Démonstration. - On a, à partir d'un certain n,

$$m(A)^{n+1} = vm(A)^n \qquad \text{et} \qquad \left[\frac{m(A)^n}{m(A)^{n+1}} : \frac{A}{m(A)}\right] = e ,$$

où e est la multiplicité de A. Il suffit, puisque v n'est pas diviseur de zéro dans A, de prouver que, si $e = 1$, alors $\mathrm{larg}_A\, m(A)^n = 1$. Ceci résultera de la remarque suivante : Si $y \in m(A)^n$, alors $y = v^\alpha z$, où α est un entier $\geqslant 0$ et où $z \in m(A)^n - m(A)^{n+1}$. Puisque $e = 1$, on a

$$m(A)^n = Az .$$

Exemple d'anneau local noethérien de dimension 1, de largeur 2, de multiplicité 1, qui possède un élément superficiel d'ordre 1.

Soient K un corps, $V = K[[Y]]$ l'anneau des séries formelles à une indéterminée Y sur K, et $P = Kx$ un K-espace vectoriel de dimension 1. Soit A l'anneau défini sur le K-espace vectoriel $V \oplus P$, en posant $x^2 = xY = Yx = 0$. Alors, A est un anneau commutatif unitaire dont l'élément unité est l'élément 1 de K. On a $P = Ax$, et P est un idéal premier de A. Un élément $f(Y) + kx \in A$ est inversible si, et seulement si, $f(0) \neq 0$. Donc, A est un anneau local d'idéal maximal

$$m(A) = VY \oplus P = AY + Ax .$$

Les seuls idéaux premiers de A sont P et $m(A)$. Comme A est un V-module de type fini engendré par 1 et x, c'est un anneau noethérien de largeur au plus 2. La largeur de A est égale à 2, car les idéaux AY et Ax ne sont pas comparables. Puisque $m(A)^2 = AY^2$, la multiplicité de A est égale à 1, et Y est un élément superficiel d'ordre 1.

Exemple d'anneau local noethérien de dimension 1, dont l'idéal maximal est un idéal premier de (0), qui possède des éléments superficiels d'ordre 1, et dont la multiplicité et la largeur sont égales à 2.

Soient V_1 et V_2 deux anneaux de valuation qui ont le même corps des restes K. Soient $h_i : V_i \to K$, $i = 1, 2$, les homomorphismes surjectifs. On munit l'ensemble

$$A = \{(a_1, a_2), \; a_i \in V_i, \; h_1(a_1) = h_2(a_2)\}$$

de la structure d'anneau qui en fait un sous-anneau du produit cartésien $V_1 \times V_2$ On vérifie facilement que A est un anneau local d'idéal maximal

$$m(A) = A(x_1, 0) + A(0, x_2),$$

où x_i est un générateur de l'idéal maximal de V_i. Les seuls idéaux premiers de A sont $m(A)$, $A(x_1, 0)$, et $A(0, x_2)$. Par suite, A est un anneau noethérien de dimension 1. La largeur de A est au moins égale à 2, car les idéaux

$$P_1 = A(x_1, 0) \qquad \text{et} \qquad P_2 = A(0, x_2)$$

ne sont pas comparables. La largeur de A est effectivement égale à 2 car $P_1 \cap P_2 = (0)$, et A/P_i est isomorphe à P_i, $i = 1, 2$. L'élément (x_1, x_2) est superficiel d'ordre 1. La multiplicité de A est égale à 2, car

$$m(A)^n = A(x_1^n, 0) + A(0, x_2^n)$$

pour tout n et que les idéaux $A(x_1^n, 0)$ et $A(0, x_2^n)$ ne sont pas comparables.

THÉORÈME 13. - Soient A un anneau local noethérien complet de dimension 1 et d'égales caractéristiques, $m(A)$ son idéal maximal, x un élément superficiel d'ordre 1, K un sous-corps de A isomorphe au corps résiduel $A/m(A)$.

Si aucun élément non nul de $K[[x]]$ n'est diviseur de zéro dans A, alors la multiplicité et la largeur de A sont égales.

Démonstration. - L'élément x n'étant pas diviseur de zéro dans A, et étant superficiel d'ordre 1, la multiplicité de l'idéal Ax est égale à la multiplicité de A (cf. démonstration du théorème 22 ; chap. VIII ; § 10 de [3]). Puisque aucun élément non nul de $K[[x]]$ n'est diviseur de zéro dans A, et que l'idéal Ax est primaire pour $m(A)$, la multiplicité de Ax est, d'après le corollaire 2 du théorème 24, chapitre VIII, § 11, de [3], égale à la dimension de l'anneau total des fractions B de A, considéré comme espace vectoriel sur le corps des quotients de $K[[x]]$. Mais, d'après le lemme 9, la largeur du $K[[x]]$-module B est inférieure à la dimension du $K((x))$-espace vectoriel B. Donc,

$$\operatorname{larg}_{K[[x]]} A \leqslant [B : K((x))] .$$

Par suite,

$$\operatorname{larg} A \leqslant [B : K((x))] = \operatorname{mult} A .$$

D'après une remarque précédente, on a

$$\operatorname{larg} A = \operatorname{mult} A .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] COHEN (I. S.). - Commutative rings with restricted minimum condition, Duke math. J., t. 17, 1950, p. 27-42.

[2] SAMUEL (Pierre). - Algèbre locale. - Paris, Gauthier-Villars, 1953 (Mémorial des Sciences mathématiques, 123).

[3] ZARISKI (O.) and SAMUEL (P.). - Commutative algebra. Vol. 2. - Princeton, D. Van Nostrand, 1960.