Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Pierre-Antoine Grillet

Extensions idéales strictes et pures d'un demi-groupe

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 18, nº 1 (1964-1965), exp. nº 11, p. 1-21

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1964-1965__18_1_A10_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
18e année, 1964/65, n° 11

1er février 1965

EXTENSIONS IDÉALES STRICTES ET PURES D'UN DEMI-GROUPE

par Pierre-Antoine GRILLET

On peut considérer que la théorie des extensions idéales des demi-groupes a pour origine un problème non résolu : Etant donnés un demi-groupe D et un demi-groupe Q ayant un zéro, trouver toutes les extensions idéales de D par Q (c'est-à-dire tous les demi-groupes D^* tels que D soit un idéal de D^* et que $D^*/D = Q$), et, en particulier, donner des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il en existe. Une solution de ce problème permettrait, par exemple, de connaître la structure de tous les demi-groupes finis et de les construire effectivement, de proche en proche, à partir des groupes.

La considération d'extensions idéales d'une nature particulière (les extensions idéales strictes et les extensions idéales pures) nous permet de donner une solution partielle de ce problème. On peut en effet, sous réserve que D soit faiblement réductif, construire toutes les extensions idéales strictes, ou pures, de D par Q, en utilisant certains homomorphismes ou homomorphismes partiels (et sans utiliser de ramification).

Comme toute extension idéale de D par un demi-groupe 0-simple est stricte ou pure, nous pouvons alors résoudre le problème ci-dessus, lorsque D est faiblement réductif et Q 0-simple. Ceci permet, par exemple, de construire effectivement (à partir des groupes), de proche en proche, tous les demi-groupes semi-simples finis (ces demi-groupes étant faiblement réductifs).

Comme, d'autre part, toute extension idéale de D est extension idéale pure d'une extension idéale stricte de D, nous pouvons résoudre le problème ci-dessus dans un cas sensiblement plus général, lorsque D est faiblement réductif et que tout idéal propre de Q est faiblement réductif (cette condition étant réalisée par exemple quand Q est 0-simple, ou semi-simple fini).

Nous renvoyons le lecteur à [1] pour les éléments de base de théorie des demi-groupes nécessaires à la compréhension de ce qui suit (quotient de Rees, extensions idéales, séries principales, demi-groupes semi-simples). D'autre part, cet exposé fait suite à celui du 9 novembre 1964 [2], auquel nous empruntons des résultats et notations, dont voici d'ailleurs l'essentiel.

0. Rappel de notations et de résultats.

Nous jugeons commode de distinguer un demi-groupe de l'ensemble qui en est le support, lorsque la loi de composition n'est pas canonique. Soit donc D un demi-groupe de support E .

Si $a \in E$, γ_a et δ_a sont les translations internes à gauche et à droite de D définies par a ; $\pi_a = (\gamma_a , \delta_a)$. $\Gamma(D)$ (resp. $\Delta(D)$, $\Pi(D)$) est l'ensemble des γ_a (resp. δ_a , π_a) lorsque $a \in E$. $\Lambda(D)$ (resp. $P(D)$ [1], $\Omega(D)$) est l'ensemble des translations à gauche (resp. translations à droite, couples de translations liées) de D . On pose

$$\varkappa_g(\varphi , \psi) = \varphi , \quad \varkappa_d(\varphi , \psi) = \psi \qquad \text{pour tout} \quad (\varphi , \psi) \in \Omega(D) .$$

$\Omega(D)$ est canoniquement structurable en demi-groupe, par la loi

$$(\varphi , \psi).(\varphi' , \psi') = (\varphi \circ \varphi' , \psi' \circ \psi) ;$$

$\Pi(D)$ est un idéal de $\Omega(D)$, et $\pi : a \rightsquigarrow \pi_a$ est un épimorphisme canonique de D vers $\Pi(D)$.

Soient $(\varphi , \psi) \in \Omega(D)$ et $A \in \mathfrak{P}(E)$; si φ et ψ admettent des restrictions $\varphi_{|A}$ et $\psi_{|A}$ à A , on note

$$(\varphi , \psi)_{|A} = (\varphi_{|A} , \psi_{|A}) .$$

Si D^* est une extension idéale de D , de support E^* , $\pi^*_{a|E}$ existe pour tout $a \in E^*$; $\tau : \pi^*_a \rightsquigarrow \pi^*_{a|E}$ est un homomorphisme canonique de $\Pi(D^*)$ vers $\Omega(D)$, et $\upsilon = \tau \circ \pi^*$ un homomorphisme canonique de D^* vers $\Omega(D)$, tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\pi"'] & D^* \arrow[d, "\pi^*"] \arrow[dl, "\upsilon"'] \\ \Omega(D) & \Pi(D^*) \arrow[l, "\tau"] \end{tikzcd}$$

où ι est l'injection canonique, soit commutatif (cf. [2], théorème 1). On a, pour tous $a \in E^*$ et $x \in E$ ([2], formules (5)) :

$$\varkappa_g(\upsilon(a))(x) = \varkappa_g(\tau(\pi^*_a))(x) = ax , \qquad \varkappa_d(\upsilon(a))(x) = \varkappa_d(\tau(\pi^*_a))(x) = xa .$$

L'image commune T [1] de τ et υ est le type de l'extension idéale considé-

---

[1] Dans ce texte, les symboles P et T s'énoncent respectivement "rô" et "tau" majuscule.

rée ; c'est l'ensemble des $\pi^*_{a|E}$ lorsque $a \in E^*$. T se structure canoniquement en demi-groupe, et τ (resp. υ) est alors un épimorphisme canonique de $\Pi(D^*)$ (resp. D^*) vers T.

Le zéro d'un demi-groupe Q ayant un zéro, et de tout quotient de Rees, sera toujours noté 0. Quand on considérera une extension idéale de D par Q, on fera toujours l'hypothèse que les supports de D et Q sont disjoints, et que le support de Q n'est pas réduit à $\{0\}$; D et Q sont toujours notés multiplicativement, mais pour les extensions on pourra user de symboles divers ($*$, $\circ$, ...).

1. Extensions idéales strictes et extensions idéales pures.

Soit D un demi-groupe de support E.

DÉFINITION 1. - Une extension idéale D^* de D, de support E^*, est dite stricte si et seulement si

$$(\forall\ a \in E^*) \qquad \pi^*_{a|E} \in \Pi(D) .$$

Le type d'une telle extension est donc $\Pi(D)$, et réciproquement.

Si D a un élément unité, toute extension idéale de D est stricte. On peut démontrer la réciproque.

DÉFINITION 2. - Une extension idéale D^* de D, de support E^*, est dite pure si et seulement si

$$(\forall\ a \in E^*) \qquad (\pi^*_{a|E} \in \Pi(D) \implies a \in E) .$$

D est donc la seule extension stricte et pure de lui-même.

2. Homomorphismes purs.

DÉFINITION 3. - Soient Q et Q' deux demi-groupes ayant un zéro. Un homomorphisme f de Q vers Q' est dit pur si et seulement si $f^{-1}(0) = \{0\}$.

Cette notion est liée à celle d'extension idéale pure de la manière suivante.

PROPOSITION 1. - Soient D^* une extension idéale de D, de support E, de type T, et υ l'épimorphisme canonique de D^* vers T ; il existe un épimorphisme et un seul υ_1 de D^*/D vers $T/\Pi(D)$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} T & D^* \arrow[l, "\upsilon"'] \arrow[d] \\ T/\Pi(D) \arrow[u, leftarrow] & D^*/D \arrow[l, "\upsilon_1"'] \end{tikzcd}$$

soit commutatif (les flèches verticales étant les épimorphismes canoniques de passage au quotient).

Un homomorphisme υ_1 ayant ces propriétés est nécessairement tel que, pour tout $a \in E^* - E$, $\upsilon_1(a) = \upsilon(a)$ si $\upsilon(a) \notin \Pi(D)$, $\upsilon_1(a) = 0$ si $\upsilon(a) \in \Pi(D)$; d'où l'unicité de υ_1. Réciproquement, ces formules définissent une application de D^*/D vers $T/\Pi(D)$ dont on vérifie immédiatement que c'est un homomorphisme, surjectif parce que υ est surjectif.

PROPOSITION 2. - Une extension idéale D^* de D est pure si et seulement si l'homomorphisme canonique υ_1 de la proposition 1 est pur.

Ceci résulte immédiatement des formules ci-dessus définissant υ_1.

Remarques sur les homomorphismes purs.

1° Soit Q un demi-groupe ayant un zéro ; un homomorphisme f issu de Q est pur si et seulement si $\{0\}$ est saturé pour l'équivalence nucléaire de f. Il existe une plus grande équivalence compatible de Q pour laquelle $\{0\}$ soit saturé ; il existe donc une "image homomorphe pure" de Q, minimum (image homomorphe de tout autre "image homomorphe pure" de Q.

2° Si cette équivalence est l'égalité, tout épimorphisme pur issu de Q est un isomorphisme. C'est le cas par exemple d'un demi-groupe de support F quelconque, ayant un zéro, dont la loi est définie par $xy = x$ si $x = y$, $xy = 0$ si $x \neq y$, pour tous $x, y \in E$ (comme on le vérifie immédiatement).

3° Si F est choisi de sorte que $\mathrm{Card}\, F > \mathrm{Card}\, \Omega(D)$, il n'existe aucune extension idéale pure de D par Q ; car si T était le type d'une telle extension, la proposition 1 fournirait un épimorphisme de Q vers $T/\Pi(D)$, pur d'après la proposition 2, donc bijectif, alors que

$$\mathrm{Card}\, ((T - \Pi(D)) \cup \{0\}) \leqslant \mathrm{Card}\, \Omega(D) < \mathrm{Card}\, F .$$

Pour tout demi-groupe D, il existe donc un demi-groupe Q ayant un zéro, tel qu'il n'existe aucune extension idéale pure de D par Q.

3. Deux théorèmes sur les extensions idéales strictes ou pures.

THÉORÈME 1. - Soient D un demi-groupe de support E, et D^* une extension idéale de D de support E^*. L'ensemble des sous-demi-groupes de D^* qui sont extension idéale stricte de D admet un élément maximum S ; et D^* est extension idéale pure de S.

Soit E' le support d'un tel sous-demi-groupe ; si υ est l'homomorphisme canonique de D^* vers $\Omega(D)$, on a $\upsilon(E') \subseteq \Pi(D)$, donc $E' \subseteq \upsilon^{-1}(\Pi(D))$. Réciproquement, $\upsilon^{-1}(\Pi(D))$ est un idéal de D^* , contenant E , et le sous-demi-groupe S de D^* qui a ce support est extension idéale stricte de D , et contient tout autre sous-demi-groupe de D^* ayant cette propriété.

De plus, D^* est extension idéale de S ; montrons que cette extension est pure; soit $F = \upsilon^{-1}(\Pi(D))$ le support de S . Si $a \in E^*$ est tel que $\pi^*_{a|F} \in \Pi(S)$, on a, puisque S est extension idéale stricte de D ,

$$(\pi^*_{a|F})_{|E} \in \Pi(D) ,$$

donc

$$\pi^*_{a|E} = (\pi^*_{a|F})_{|E} \in \Pi(D) , \quad \text{et} \quad a \in F .$$

THÉORÈME 2. - Soit D un demi-groupe. Toute extension idéale de D par un demi-groupe Q 0-simple, ou nul d'ordre 2 , est stricte ou pure.

Soient D^* une telle extension et S la sous-extension stricte maximum. On a $D^*/D = Q$; S étant un idéal de D^* , S/D est un idéal de Q . Comme les seuls idéaux de Q sont Q et $\{0\}$, on a, soit $S/D = Q$ et alors $D^* = S$ est extension idéale stricte de D , soit $S/D = 0$ et alors D^* est extension idéale pure de $S = D$.

4. Construction d'extensions idéales strictes.

Soient D un demi-groupe de support E , Q un demi-groupe ayant un zéro, de support F disjoint de E , Q' le sous-demi-groupe partiel canonique de Q de support $F' = F - \{0\}$. Un homomorphisme de demi-groupes partiels (au sens de [2]) de Q' vers D sera aussi appelé, suivant [1], homomorphisme partiel de Q' vers D .

THÉORÈME 3. - Un homomorphisme partiel f de Q' vers D détermine une extension idéale D^* de D par Q , dont la loi $\star$ est définie par

$$(\forall\, a , b \in E \cup F') \qquad a \star b = \begin{cases} ab & \text{si } a , b \in E \\ ab & \text{si } a , b \in F' \text{ et } ab \neq 0 \\ f(a)\, f(b) & \text{si } a , b \in F' \text{ et } ab = 0 \\ af(b) & \text{si } a \in E , \ b \in F' \\ f(a)b & \text{si } a \in F' , \ b \in E \end{cases} .$$

Une telle extension idéale est stricte. Si D est faiblement réductif, toute extension idéale stricte de D par Q peut être construite de cette manière.

Cette construction d'extensions idéales est exactement la même que celle du théorème 4.19 de [1]. Le théorème qui précède peut d'ailleurs être considéré comme une extension du théorème 4.19, puisqu'un demi-groupe ayant un élément unité est faiblement réductif et que toutes ses extensions idéales sont strictes.

La première assertion du théorème à établir est donc démontrée dans [1]. La seconde est évidente. Supposons alors que D soit faiblement réductif, et soit D^* une extension idéale stricte de D, de support E, telle que $D^*/D = Q$; alors $E^* - E = F'$, et le demi-groupe partiel Q' est identique au sous-demi-groupe partiel canonique de D^* de support $E^* - E$.

Soit υ l'épimorphisme canonique de D^* vers le type $\Pi(D)$ de l'extension. Comme π est un isomorphisme de D vers $\Pi(D)$, il existe un homomorphisme et un seul ρ de D^* vers D tel que $\pi \bullet \rho = \upsilon$. (Si $x \in E$, on a

$$\pi_{\rho(x)} = \upsilon(x) = \pi_x \qquad \text{et} \qquad \rho(x) = x \ ;$$

ρ est donc un épimorphisme idempotent de D^* vers D, et D un rétracté de D^*). La restriction ρ_1 de ρ à F' est donc un homomorphisme partiel de Q' vers D.

La première assertion du théorème fournit, à partir de ρ_1, une extension idéale de D par Q, dont on va montrer qu'elle coïncide avec D^*. Soient donc $a, b \in E \cup F'$, et montrons que leur produit ab dans D^* coïncide avec le produit $a \star b$ défini par les formules de l'énoncé. C'est évident si $a, b \in E$, ou si $a, b \in F'$ sont tels que $ab \neq 0$ dans Q, c'est-à-dire $ab \notin E$. Si $a, b \in F'$ sont tels que $ab \in E$,

$$ab = \rho(ab) = \rho(a)\ \rho(b) = \rho_1(a)\ \rho_1(b) = a \star b\ .$$

Si $a \in E$, $b \in F'$,

$$ab = \varkappa_d(\upsilon(b))(a) = \varkappa_d(\pi_{\rho(b)})(a) = a\rho(b) = a\rho_1(b) = a \star b\ ;$$

dualement, si $a \in F'$, $b \in E$, $ab = a \star b$. Ceci achève la démonstration.

5. Construction d'extensions idéales pures.

Les notations suivantes sont employées pour le théorème 4 : D est un demi-groupe de support E ; Q, Q_1 sont des demi-groupes ayant un zéro, de supports F, F_1 disjoints de E ; on pose $F' = F - \{0\}$, $F_1' = F_1 - \{0\}$. Enfin D^* est une extension idéale de D par Q, de support $E^* = E \cup F'$. Q', Q'_1 sont les demi-groupes partiels de supports F', F'_1.

THÉORÈME 4. - Tout homomorphisme pur f de Q_1 vers Q détermine, à partir d'une extension idéale D^* de D par Q, une extension idéale D_1^* de D par Q_1, dont la loi $\star$ est définie, à partir de la loi $\circ$ de D^*, par les formules

$$(\forall\ a\ , b \in E \cup F'_1) \qquad a \star b = \begin{cases} ab & \text{si } a\ , b \in E \\ ab & \text{si } a\ , b \in F'_1 \text{ et } ab \neq 0 \\ f(a) \circ f(b) & \text{si } a\ , b \in F'_1 \text{ et } ab = 0 \\ f(a) \circ b & \text{si } a \in F'_1 \text{ et } b \in E \\ a \circ f(b) & \text{si } a \in E \text{ et } b \in F'_1 \end{cases}$$

Si D^* est extension idéale pure de D, il en est de même de D_1^*.

Notons d'abord que, f étant pur, $f(F'_1) \subseteq F'$, de sorte que les formules définissant la loi $\star$ ne sont pas dénuées de sens ; il n'en serait pas de même si f n'était pas pur, de sorte que cette hypothèse est indispensable.

f est un homomorphisme pur de Q_1 vers Q, et sa restriction à F'_1 est donc un homomorphisme de demi-groupes partiels de Q'_1 vers Q', et aussi de Q'_1 vers D^* puisque Q' est un sous-demi-groupe partiel de D^*. Le théorème 4.19 de [1], ou le théorème 3, fournissent alors une extension idéale D_2^* de D^* par Q'_1 dont la loi $\star$ est définie par les formules

$$(\forall\ a\ , b \in E^* \cup F'_1) \qquad a \star b = \begin{cases} a \circ b & \text{si } a\ , b \in E^* \\ ab & \text{si } a\ , b \in F'_1 \text{ et } ab \neq 0 \\ f(a) \circ f(b) & \text{si } a\ , b \in F'_1 \text{ et } ab = 0 \\ f(a) \circ b & \text{si } a \in F'_1 \text{ et } b \in E^* \\ a \circ f(b) & \text{si } a \in E^* \text{ et } b \in F'_1\ . \end{cases}$$

Or $E \cup F'_1$ est une partie stable de D_2 ; en effet, si a, $b \in E \cup F'_1$, a, b sont dans l'un des cinq cas de ces formules ; dans le premier cas, $a \star b \in E$; dans le second, $a \star b \in F'_1$; dans le troisième, $f(a)\ f(b) = f(ab) = 0$, donc $a \star b = f(a) \circ f(b) \in E$; dans les deux derniers, $a \star b \in E$, car D est un idéal de D^*. Le sous-demi-groupe D_1^* de D_2^*, de support $E \cup F'_1$, a pour loi la restriction de la loi $\star$ et sa loi est donc définie par les formules de l'énoncé. Il est clair sur ces formules que D_1^* est une extension idéale de D par Q_1.

Si maintenant D^* est extension idéale pure de D , $\pi^*_{a|E} \notin \Pi(D)$ pour tout $a \in F'$; par suite, pour tout $a \in F'_1$,

$$\pi^*_{1a|E} = \pi^*_{f(a)|E} \notin \Pi(D) \ ,$$

et D^*_1 est extension idéale pure de D . Ceci achève la démonstration.

Ce théorème va permettre de construire toutes les extensions idéales pures de D par un demi-groupe ayant un zéro Q , lorsque D est un demi-groupe faiblement réductif. Remarquons que, pour tout type d'extension T de D , il existe une extension idéale canonique de $\Pi(D)$ par $T/\Pi(D)$, à savoir T ; l'isomorphisme canonique π de D vers $\Pi(D)$ permet d'en déduire, en remplaçant chaque élément de $\Pi(D)$ par l'élément correspondant de E , une <u>extension idéale canonique de</u> D <u>par</u> $T/\Pi(D)$, dont la loi $\circ$ est telle que, pour tous a , $b \in E \cup (T - \Pi(D))$,

$$a \circ b = \begin{cases} ab & \text{si } a\,,\, b \in E \\ a.b & \text{si } a\,,\, b \in T - \Pi(D) \text{ et } a.b \notin \Pi(D) \\ c \in E \text{ tel que } \pi_c = a.b & \text{si } a\,,\, b \in T - \Pi(D) \text{ et } a.b \in \Pi(D) \\ \varkappa_g(a)(b) & \text{si } a \in T - \Pi(D) \text{ et } b \in E \\ \varkappa_d(b)(a) & \text{si } a \in E \text{ et } b \in T - \Pi(D) \ ; \end{cases}$$

c'est une extension idéale pure de D , de type T . Nous ne la définissons que si D est faiblement réductif. On a alors le théorème suivant :

THÉORÈME 5. - Soient D un demi-groupe faiblement réductif et Q un demi-groupe ayant un zéro, dont les supports sont disjoints. Si T est un type d'extension de D , tout épimorphisme pur θ de Q vers $T/\Pi(D)$ détermine, à partir de l'extension idéale canonique de D par $T/\Pi(D)$, une extension idéale pure de D par Q , dont la loi est définie par les formules du théorème 4 (donc, en fin de compte, par

$$a \star b = \begin{cases} ab & \text{si } a\,,\, b \in E \\ ab & \text{si } a\,,\, b \in F'\,,\; ab \neq 0 \\ c \in E \text{ tels que } \theta(a).\theta(b) = \pi_c & \text{si } a\,,\, b \in F'\,,\; ab = 0 \\ \varkappa_g(\theta(a))(b) & \text{si } a \in F'\,,\; b \in E \\ \varkappa_d(\theta(b))(a) & \text{si } a \in E\,,\; b \in F'\,, \end{cases}$$

où $\star$ est la loi étudiée, E le support de D , F celui de Q , et $F' = F - \{0\}$); et toute extension idéale pure de D par Q peut être construite de cette manière.

La première partie de l'énoncé résulte immédiatement du théorème 4, appliqué à D , Q , $T/\Pi(D)$ et à l'extension idéale canonique de D par $T/\Pi(D)$, qui est pure. Pour démontrer la seconde, soit D^* une extension idéale pure de D par Q ; soient E^* le support de D^* , T le type de l'extension, et υ l'homomorphisme canonique de D^* vers T ; on a $D^*/D = Q$. La proposition 1 fournit alors un épimorphisme canonique υ_1 de Q vers $T/\Pi(D)$, qui est pur d'après la proposition 2.

Cet épimorphisme pur détermine, d'après la première partie de l'énoncé, une extension idéale pure de D par Q , dont la loi $\star$ est définie par les formules de l'énoncé, et dont on va montrer qu'elle coïncide avec D^* (que l'on note ici multiplicativement). Comme les deux extensions sont des extensions idéales de D par Q , il suffit de montrer que $a\star b = ab$ lorsque $a \in E$ et $b \in E^* - E$, ou $a \in E^* - E$ et $b \in E$, ou enfin $a , b \in E^* - E$ et $ab = 0$.

Si $b \in E^* - E$, $\upsilon(b) = \pi^*_{b|E} \notin \Pi(D)$, puisque D^* est extension idéale pure de D ; alors $\upsilon_1(b) = \upsilon(b)$; et, si $a \in E$,

$$a\star b = \varkappa_d(\upsilon_1(b))(a) = \varkappa_d(\upsilon(b))(a) = ab \ .$$

Il en est de même, dualement, si $a \in E$ et $b \in E^* - E$.

Si maintenant $a , b \in E^* - E$, $ab \in E$ équivaut à $a\star b \in E$, puisque l'on a deux extensions idéales de D par Q ; en ce cas, $a\star b$ est égal à l'unique élément $c \in E$ tel que $\pi_c = \upsilon_1(a).\upsilon_1(b)$; or,

$$\upsilon_1(a).\upsilon_1(b) = \upsilon(a).\upsilon(b) = \upsilon(ab) = \pi_{ab} \ ,$$

puisque $ab \in E$; par suite $a\star b = c = ab$.

On connaît ([2], corollaire du théorème 2) tous les types d'extension de D . Ici, D est faiblement réductif et, d'après le résultat cité et la proposition 8 de [2], les types d'extension de D sont les parties stables de $\Omega(D)$ contenant $\Pi(D)$. On peut alors améliorer l'emploi du théorème 5 à l'aide de la proposition suivante :

PROPOSITION 3. - Soient D un demi-groupe faiblement réductif et Q un demi-groupe ayant un zéro ; il y a identité entre les épimorphismes purs de Q vers un demi-groupe de la forme $T/\Pi(D)$, où T est un type d'extension de D , et les homomorphismes purs de Q vers $\Omega(D)/\Pi(D)$.

6. La classe des demi-groupes faiblement réductifs.

L'hypothèse que D soit faiblement réductif figurant dans les théorèmes 3 et 5, il est utile, pour faire des extensions idéales successives, de connaître des conditions impliquant qu'une extension idéale est un demi-groupe faiblement réductif.

PROPOSITION 4. - Toute extension idéale d'un demi-groupe faiblement réductif par un demi-groupe faiblement réductif est un demi-groupe faiblement réductif.

Soient D un demi-groupe de support E, Q un demi-groupe ayant un zéro, de support F disjoint de E, $F' = F - \{0\}$, et D^* une extension idéale de D par Q. Supposons de plus que D et Q sont faiblement réductifs, et soient $a, b \in E \cup F'$ tels que $\pi_a^* = \pi_b^*$.

Si $a, b \in E$, on a $\pi_a = \pi_{a|E}^* = \pi_{b|E}^* = \pi_b$, et $a = b$. Si $a, b \in F'$, l'égalité $\pi_a^* = \pi_b^*$ entraîne, si π' est l'épimorphisme canonique de Q vers $\Pi(Q)$, $\pi'_a = \pi'_b$, et $a = b$. Enfin, si $a \in E$ et $b \in F'$, on n'a jamais $\pi_a^* = \pi_b^*$; en effet $b \neq 0$ entraîne $\pi'_b \neq \pi'_0$, et il existe $c \in F'$ tel que $bc \neq 0$ ou $cb \neq 0$ (dans Q) ; par suite, $bc \notin E$ ou $cb \notin E$ (dans D^*) et comme $ac, ca \in E$, $\pi_a^* \neq \pi_b^*$.

PROPOSITION 5. - Tout demi-groupe semi-simple fini, et tout idéal d'un tel demi-groupe, est faiblement réductif (2).

Soit $\emptyset \subset I_1 \subset \ldots \subset I_{n-1} \subset I_n = D$ une série principale du demi-groupe semi-simple fini D, I_1 étant simple ou réduit à 0, et, si $i > 0$, chaque facteur I_{i+1}/I_i de la série étant 0-simple. Un demi-groupe simple, ou 0-simple, fini est complètement simple, ou complètement 0-simple ; on sait qu'un tel demi-groupe est faiblement réductif (3). La proposition 4 permet alors de montrer, par récurrence sur i, que I_i est un demi-groupe faiblement réductif pour tout $i > 0$; il en est de même de $I_n = D$. Comme tout idéal d'un demi-groupe semi-simple fini est semi-simple fini, il en est de même également pour tout idéal de D.

---

(2) Ce résultat a été obtenu indépendamment par G. LALLEMENT (communication orale).

(3) Cette propriété ne se trouvant pas dans [1], nous en donnons ici une démonstration. Soit D un demi-groupe complètement 0-simple, représenté comme demi-groupe régulier de matrices sur un groupe avec zéro $\mathfrak{M}^0(G ; I, \Lambda ; P)$. Soient $\alpha = (a)_{i\lambda}$, $\beta = (b)_{j\mu}$ tels que $\pi_\alpha = \pi_\beta$; multipliant à droite et à gauche par $\xi = (x)_{k\nu}$, on obtient $i = j$ et $\lambda = \mu$, puis $ap_{\lambda k} x = bp_{\lambda k} x$; si on choisit $x \neq 0$, et k tel que $p_{\lambda k} \neq 0$ (le demi-groupe de matrices étant régulier), on obtient $a = b$, d'où $\alpha = \beta$. Si maintenant D est complètement simple (sans zéro), on peut lui adjoindre un zéro et on est ramené au cas précédent (on peut aussi faire une démonstration directe analogue).

PROPOSITION 6. - Une extension idéale d'un demi-groupe faiblement réductif par un zéro-demi-groupe d'ordre 2 est un demi-groupe faiblement réductif si et seulement si l'extension est pure.

Q étant un zéro-demi-groupe d'ordre 2 , gardons les notations de la proposition 4. F' est alors réduit à un élément, soit u , de sorte que $\pi_a^* = \pi_b^*$ entraîne $a = b$ chaque fois que a , $b \in F'$ et chaque fois que a , $b \in E$ (comme ci-dessus). Si l'extension est pure, l'égalité $\pi_a^* = \pi_u^*$ est impossible pour $a \in E$, puisqu'alors $\pi_{u|E}^* \notin \Pi(D)$; D^* est alors un demi-groupe faiblement réductif. Si l'extension n'est pas pure, elle est stricte (théorème 2) ; soient f l'homomorphisme partiel qui la détermine (théorème 3) et $v = f(u) \in E$; les formules du théorème 3 entraînent que $\pi_u^* = \pi_v^*$, et D^* n'est pas un demi-groupe faiblement réductif.

7. Problème général d'existence et de construction.

Il s'agit du problème rappelé dans l'introduction : Construire toutes les extentions idéales d'un demi-groupe donné D par un demi-groupe donné Q ayant un zéro, et, en particulier, donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il en existe.

Les théorèmes 2 , 3 , 5 résolvent ce problème lorsque D est faiblement réductif et Q 0-simple. Alors toute extension idéale de D par Q est stricte ou pure, et est donc obtenue, soit à partir d'un homomorphisme partiel de Q' vers D (théorème 3, mêmes notations), soit à partir d'un homomorphisme pur de Q vers $\Omega(D)/\Pi(D)$ (théorème 5, et proposition 3). L'existence d'une extension idéale de D par Q équivaut à l'existence de l'une de ces applications.

Il en est de même si Q est nul d'ordre 2 .

Cette solution partielle du problème permet de construire tous les demi-groupes semi-simples finis. Montrons d'abord la proposition suivante :

PROPOSITION 7. - Tout extension idéale d'un demi-groupe semi-simple fini par un demi-groupe semi-simple fini est un demi-groupe semi-simple fini.

Soient D , Q deux demi-groupes semi-simples finis, Q ayant un zéro, et D^* une extension idéale de D par Q . D^* , étant un demi-groupe fini, contient une série principale contenant D ,

$$\emptyset \subset I_1 \subset \ldots \subset I_k = D \subset I_{k+1} \subset \ldots \subset I_n = D^* .$$

Alors,

$$\emptyset \subset \{0\} \subset I_{k+1}/D \subset \ldots \subset I_{n-1}/D \subset I_n/D = Q$$

est une série principale de Q ; et

$$I_{i+1}/I_i = (I_{i+1}/D)/(I_i/D) \qquad (i \geqslant k)$$

est 0-simple. D'autre part, si $i \leqslant k$, I_i est un idéal de D^* , donc de D , et le début de la série peut être plongé dans une série principale de D :

$$\emptyset \subset \ldots \subset I_1 \subset \ldots \subset I_i \subset \ldots \subset I_{i+1} \subset \ldots \subset I_k = D \,;$$

alors, si on a, pour $i < k$, un facteur nul I_{i+1}/I_i , tous les facteurs de la série principale de D compris entre I_i et I_{i+1} sont nuls, ce qui est contraire à l'hypothèse. On procède de même si I_1 n'est ni simple ni réduit à 0 . D^* est donc semi-simple. (Il en résulte que, en fait, $\emptyset \subset I_1 \subset \ldots \subset I_k = D$ est une série principale de D , cf. [1], théorème 2.41.)

Si maintenant D est un demi-groupe semi-simple fini et I un idéal maximal de D , D est extension idéale de I , qui est un demi-groupe semi-simple fini, par D/I qui est un demi-groupe 0-simple fini. Réciproquement, tout extension idéale d'un demi-groupe semi-simple fini par un demi-groupe 0-simple fini est un demi-groupe semi-simple fini (proposition 7). On peut donc construire de proche en proche tous les demi-groupes semi-simples finis par des extensions idéales successives par demi-groupes 0-simples finis. Or on sait construire ces extensions qui, d'après la proposition 5, entrent dans le cas particulier exposé au début de ce paragraphe. On sait donc construire effectivement, de proche en proche, tous les demi-groupes semi-simples finis à partir des demi-groupes 0-simples finis, c'est-à-dire en fin de compte à partir des groupes finis.

L'intérêt d'une telle construction peut être mesuré par un recensement. Sur les 4 demi-groupes d'ordre 2 , 3 sont simples ou 0-simples, donc semi-simples (dont 2 idempotents). Sur les 18 demi-groupes d'ordre 3 , 9 sont semi-simples (dont 6 idempotents, 4 simples ou semi-simples). Sur les 126 demi-groupes d'ordre 4 , 41 sont semi-simples (dont 27 idempotents, 7 simples ou 0-simples). Enfin (la maison ne recule devant aucun sacrifice) sur les 1160 demi-groupes d'ordre 5 , 205 sont semi-simples (dont 135 idempotents, 8 simples ou 0-simples). (Evidemment, tous les demi-groupes idempotents finis sont semi-simples, et tous les demi-groupes semi-simples sont globalement idempotents.)

La construction précédente s'étend aux demi-groupes finis dont une suite de composition, au moins, est telle que, si l'un des facteurs est nul d'ordre 2 , il est facteur d'une extension idéale pure (proposition 6). Il se trouve, curieusement, que les demi-groupes d'ordre 2 , 3 , 4 ayant cette propriété sont semi-simples, de sorte que cette extension est sans intérêt pour les petites valeurs de l'ordre.

8. Problème général d'existence et de construction (suite).

Puisque l'on connaît les extensions idéales strictes ou pures d'un demi-groupe faiblement réductif, le théorème 1 permet de résoudre ce problème dans un cas sensiblement plus général que celui du paragraphe précédent.

Si D est un demi-groupe quelconque, et Q un demi-groupe ayant un zéro, soient D^* une extension idéale de D par Q , et S la sous-extension stricte maximum; S est extension idéale stricte de D par $S/D = I$ qui est un idéal de $D^*/D = Q$, et D^* est extension idéale pure de S par $D^*/S = (D^*/D)/(S/D) = Q/I$. Réciproquement, si I est un idéal de Q , S une extension idéale stricte de D par I , et D^* une extension idéale pure de S par Q/I telle que D soit un idéal de D^* et que $D^*/D = Q$, alors D^* est extension idéale de D par Q .

Si D est faiblement réductif, la structure de S est connue par le théorème 3 à partir d'un homomorphisme partiel de I' vers D ; si I est faiblement réductif, S l'est (proposition 4), et une extension idéale pure de S par Q/I est déterminée par un homomorphisme pur de Q/I vers $\Omega(S)/\Pi(S)$ (théorème 5 et proposition 3). Comme on connaît la structure de S , il est théoriquement possible de construire cet homomorphisme avec des applications faisant intervenir uniquement D , I , Q .

Cette construction est effectivement possible ; elle fait l'objet des lemmes suivants, et le théorème qui la résume donne toutes les extensions idéales de D par Q lorsque D est faiblement réductif ainsi que tout idéal propre de Q (en effet, si $I = Q$, il est inutile de supposer I faiblement réductif). Parmi les demi-groupes Q vérifiant cette dernière condition, on peut citer les demi-groupes semi-simples finis (proposition 5) et les demi-groupes 0-simples.

On note E le support de D , F celui de Q , G celui de I , $F' = F - \{0\}$, $G' = G - \{0\}$. θ désigne une application qui, à tout $u \in F - G$, fait correspondre deux applications λ_u , ρ_u de $E \cup G'$ vers $E \cup G'$; on note $\theta_u = (\lambda_u , \rho_u)$. Enfin π' , γ' , δ' sont les épimorphismes canoniques de S vers $\Pi(S)$, $\Gamma(S)$, $\Delta(S)$ respectivement.

LEMME 1. - Pour que θ définisse un homomorphisme pur de Q/I vers $\Omega(S)/\Pi(S)$ tel que l'extension idéale pure D^* de S par Q/I déterminée par cet homomorphisme admette D comme idéal, S comme sous-extension stricte maximum, et que $D^*/D = Q$, il faut et il suffit que

(1.1) $(\forall\ u \in F - G)\quad \theta_u \in \Omega(S)$

(1.2) $(\forall\ u \in F - G)\quad \theta_{u|E}$ existe

(1.3) $(\forall\ u \in F - G)(\forall\ a \in G')\quad (ua \neq 0 \implies \lambda_u(a) = ua\ ;\ ua = 0 \implies \lambda_u(a) \in E)$

(1.4) $(\forall\ u \in F - G)(\forall\ a \in G')\quad (au \neq 0 \implies \rho_u(a) = au\ ;\ au = 0 \implies \rho_u(a) \in E)$

(1.5) $(\forall\ u\ ,\ v \in F - G)\quad (uv \notin G \implies \theta_u \cdot \theta_v = \theta_{uv})$

(1.6) $(\forall\ u\ ,\ v \in F - G)\quad (uv \in G' \implies \theta_u \cdot \theta_v = \pi'_{uv})$

(1.7) $(\forall\ u\ ,\ v \in F - G)\quad (uv = 0 \implies (\exists\ c \in E)\ \ \theta_u \cdot \theta_v = \pi'_c)$

(1.8) $(\forall\ u \in F - G)\quad \theta_{u|E} \notin \Pi(D)$.

Les conditions imposées à θ par l'énoncé sont que, pour tous $u\ ,\ v \in F - G$,

$\theta_u \in \Omega(S) - \Pi(S)$,

$\theta_u \cdot \theta_v = \theta_{uv}$ si $uv \notin G$,

$\theta_u \cdot \theta_v \in \Pi(S)$ si $uv \in G$,

la condition (1.2) ([2], proposition 15) pour que D soit un idéal de D^* ,

la condition (1.8) pour que S soit sous-extension stricte maximum (voir démonstration du théorème 1),

et enfin, $\star$ étant la loi de composition de D^* (définie par le théorème 5),

$a \star b = ab$ pour tous $a\ ,\ b \in F'$ tels que $ab \neq 0$,

$a \star b \in E$ si $ab = 0$.

Par définition de $\star$, cette dernière condition équivaut à (1.3) , (1.4) , (1.6), et (1.7) ; en effet, elle est remplie automatiquement si $ab \notin G$; si $a, b \in F - G$ et $ab \in G'$, elle équivaut à (1.6) ; si $a\ ,\ b \in F - G$ et $ab = 0$, à (1.7) ; si $a \in F - G$, $b \in G'$, à (1.3) ; si $a \in G'$, $b \in F - G$, à (1.4) ; enfin elle est remplie automatiquement si $a\ ,\ b \in G'$.

Moyennant ces conditions, les autres conditions imposées à θ sont équivalentes à (1.1) , (1.8) , (1.5) et (1.2).

La loi de composition de S est notée $\circ$; elle est définie par le théorème 3 à partir d'un homomorphisme partiel f de I' vers D (I' étant le sous-demi-groupe-partiel de I de support G').

LEMME 2. - Pour que θ vérifie les conditions (1.1) à (1.4), il faut et il suffit qu'existe, pour tout $u \in F - G$,

$$\omega_u = (\varphi_u , \psi_u) \in \Omega(D)$$

tel que

(2.1) $(\forall\ u \in F - G)(\forall\ a \in G')\quad (ua \neq 0 \implies \varphi_u(f(a)) = f(ua))$

(2.2) $(\forall\ u \in F - G)(\forall\ a \in G')\quad (au \neq 0 \implies \psi_u(f(a)) = f(au))$

à partir duquel θ_u est défini par

$$\lambda_u \begin{cases} \lambda_u(x) = \varphi_u(x) & \text{si} \quad x \in E \\ \lambda_u(a) = \varphi_u(f(a)) & \text{si} \quad a \in G' \ , \quad ua = 0 \\ \lambda_u(a) = ua & \text{si} \quad a \in G' \ , \quad ua \neq 0 \end{cases}$$

$$\rho_u \begin{cases} \rho_u(x) = \psi_u(x) & \text{si} \quad x \in E \\ \rho_u(a) = \psi_u(f(a)) & \text{si} \quad a \in G' \ , \quad au = 0 \\ \rho_u(a) = au & \text{si} \quad a \in G' \ , \quad au \neq 0 \ . \end{cases}$$

Une application θ définie de cette manière vérifie évidemment (1.2) (avec $\theta_{u|E} = \omega_u$), (1.3) et (1.4). On démontrera plus tard (1.1) ; prouvons maintenant que la condition ci-dessus est nécessaire.

D'après (1.2), il existe

$$\theta_{u|E} = \omega_u \in \Omega(D) \qquad ([2], \text{ proposition } 10) \ ;$$

pour tout $x \in E$,

$$\lambda_u(x) = \varphi_u(x) \ , \qquad \rho_u(x) = \psi_u(x) \ .$$

Soit, d'autre part, $a \in G'$ tel que $ua = 0$; alors $\lambda_u(a) \in E$ (1.3) ; et on a, pour tout $x \in E$,

$$\lambda_u(a)x = \lambda_u(a) \circ x = \lambda_u(a \circ x) = \lambda_u(f(a)x) = \lambda_u(f(a))x$$

$$x\lambda_u(a) = x \circ \lambda_u(a) = \rho_u(x) \circ a = \rho_u(x)\ f(a) = x\lambda_u(f(a)) \ ;$$

il en résulte, puisque D est faiblement réductif, $\lambda_u(a) = \lambda_u(f(a))$, d'où les formules définissant λ_u à partir de φ_u ; et, dualement, les formules définissant ρ_u à partir de ψ_u .

Montrons enfin (2.1) et (2.2). Soit $a \in G'$ tel que $ua \neq 0$; on a alors, pour tout $x \in E$,

$$f(ua)x = ua \circ x = \lambda_u(a) \circ x = \lambda_u(a \circ x) = \varphi_u(f(a)x) = \varphi_u(f(a))x$$

$$xf(ua) = x \circ ua = x \circ \lambda_u(a) = \rho_u(x) \circ a = \psi_u(x)\ f(a) = x\varphi_u(f(a)) \ ;$$

D étant faiblement réductif, la formule (2.1) en résulte. (2.2) se démontre dualement.

Montrons réciproquement que, si θ est définie de cette façon, elle vérifie (1.1) ; cela achèvera la démonstration. Tout d'abord, $\lambda_u \in \Lambda(S)$:

si $x , y \in E$,

$$\lambda_u(x \circ y) = \varphi_u(xy) = \varphi_u(x)y = \varphi_u(x) \circ y \ ;$$

si $x \in E$, $a \in G'$,

$$\lambda_u(x \circ a) = \varphi_u(xf(a)) = \varphi_u(x)\ f(a) = \lambda_u(x) \circ a \ ;$$

si, de plus, $ua \neq 0$,

$$\lambda_u(a \circ x) = \varphi_u(f(a)x) = \varphi_u(f(a))x = f(ua)x = ua \circ x = \lambda_u(a) \circ x \ ;$$

si $ua = 0$, on a, comme ci-dessus,

$$\lambda_u(a \circ x) = \varphi_u(f(a))x = \lambda_u(a)x = \lambda_u(a) \circ x \ ;$$

si $a , b \in G'$, $uab \neq 0$,

$$\lambda_u(a \circ b) = \lambda_u(ab) = u(ab) = (ua)b = \lambda_u(a)b = \lambda_u(a) \circ b \ ;$$

si $uab = 0$, $ab \neq 0$, $ua \neq 0$,

$$\lambda_u(a \circ b) = \lambda_u(ab) = \varphi_u(f(ab)) = \varphi_u(f(a)\ f(b)) = \varphi_u(f(a))\ f(b)$$

$$= f(ua)\ f(b) = ua \circ b = \lambda_u(a) \circ b \ ;$$

si $ab \neq 0$, $ua = 0$,

$$\lambda_u(a \circ b) = \ldots = \varphi_u(f(a))\ f(b) = \lambda_u(a)\ f(b) = \lambda_u(a) \circ b \ ;$$

si $ab = 0$, $ua \neq 0$,

$$\lambda_u(a \circ b) = \varphi_u(f(a)\ f(b)) = \varphi_u(f(a))\ f(b) = f(ua)\ f(b) = ua \circ b = \lambda_u(a) \circ b \ ;$$

enfin, si $ab = ua = 0$,

$$\lambda_u(a \circ b) = \varphi_u(f(a))\ f(b) = \lambda_u(a)\ f(b) = \lambda_u(a) \circ b \ ;$$

par suite, $\lambda_u \in \Lambda(S)$. Dualement, $\rho_u \in P(S)$. Montrons enfin que $\theta_u \in \Omega(S)$:
si $x , y \in E$,

$$x \circ \lambda_u(y) = x\varphi_u(y) = \psi_u(x)y = \rho_u(x) \circ y ;$$

si $x \in E$, $a \in G'$, $ua \neq 0$,

$$x \circ \lambda_u(a) = x \circ ua = xf(ua) = x\varphi_u(f(a)) = \psi_u(x)\ f(a) = \rho_u(x) \circ a ;$$

et si $ua = 0$,

$$x \circ \lambda_u(a) = x\varphi_u(f(a)) = \psi_u(x)\ f(a) = \rho_u(x) \circ a ;$$

dualement, $a \circ \lambda_u(x) = \rho_u(a) \circ x$; si $a , b \in G'$ et si $aub \neq 0$,

$$a \circ \lambda_u(b) = a(ub) = (au)b = \rho_u(a) \circ b ;$$

si $au \neq 0$, $ub \neq 0$, $aub = 0$,

$$\begin{aligned} a \circ \lambda_u(b) &= a \circ ub = f(a)\ f(ub) = f(a)\ \varphi_u(f(b)) = \psi_u(f(a))\ f(b) \\ &= f(au)\ f(b) = au \circ b = \rho_u(a) \circ b ; \end{aligned}$$

si $au = 0$, $ub \neq 0$,

$$a \circ \lambda_u(b) = \dots = \psi_u(f(a))\ f(b) = \rho_u(a)\ f(b) = \rho_u(a) \circ b ;$$

dualement, si $au \neq 0$, $ub = 0$, on a $a \circ \lambda_u(b) = \rho_u(a) \circ b$; enfin, si
$au = ub = 0$,

$$a \circ \lambda_u(b) = a \circ \varphi_u(f(b)) = f(a)\ \varphi_u(f(b)) = \psi_u(f(a))\ f(b) = \rho_u(a) \circ b .$$

LEMME 3. - Pour que θ , définie comme au lemme 2, vérifie les conditions (1.5), (1.6) , (1.7), il faut et il suffit que

(3.1) $(\forall\ u , v \in F - G)$ $(uv \notin G \implies \omega_u . \omega_v = \omega_{uv})$

(3.2) $(\forall\ u , v \in F - G)$ $(uv \in G' \implies \omega_u . \omega_v = \pi_{f(uv)})$

(3.3) $(\forall\ u , v \in F - G)$ $(uv = 0 \implies \omega_u . \omega_v \in \Pi(D))$.

Ces conditions sont évidemment nécessaires, puisque $\omega_u = \theta_{u|E}$, et, si $a \in E \cup G'$, $\pi_a = \pi'_{a|E}$.

Pour démontrer qu'elles sont suffisantes, on va vérifier que $\lambda_u \cdot \lambda_v = \lambda_{uv}$, ou γ'_{uv} , ou γ'_c avec $\pi_c = \omega_u . \omega_v$, selon le cas, et sous l'hypothèse correspondante sur $\omega_u . \omega_v$; le résultat s'ensuivra par dualité.

Tout d'abord, si $x \in E$, $\lambda_u(\lambda_v(x)) = \varphi_u(\varphi_v(x))$; si $a \in G'$ et si $uva \neq 0$, $\lambda_u(\lambda_v(a)) = uva$; si $uva = 0$ et $va \neq 0$,

$$\lambda_u(\lambda_v(a)) = \lambda_u(va) = \varphi_u(f(va)) = \varphi_u(\varphi_v(f(a)))$$

et, si $va = 0$,

$$\lambda_u(\lambda_v(a)) = \varphi_u(\varphi_v(f(a)))$$

comme dans le cas précédent.

Soient maintenant $u , v \in F - G$; on suppose $uv \notin G$ et $\varphi_u \circ \varphi_v = \varphi_{uv}$ (d'après 3.1). Alors, si $x \in E$,

$$\lambda_u(\lambda_v(x)) = \varphi_u(\varphi_v(x)) = \varphi_{uv}(x) = \lambda_{uv}(x) \ ;$$

si $a \in G'$, $uva \neq 0$,

$$\lambda_u(\lambda_v(a)) = uva = \lambda_{uv}(a) \ ;$$

si $uva = 0$,

$$\lambda_u(\lambda_v(a)) = \varphi_u(\varphi_v(f(a))) = \varphi_{uv}(f(a)) = \lambda_{uv}(a) \ ;$$

donc $\lambda_u \circ \lambda_v = \lambda_{uv}$.

Si $uv \in G'$ et $\varphi_u \circ \varphi_v = \gamma_{f(uv)}$ (d'après (3.2)), on a, si $x \in E$,

$$\lambda_u(\lambda_v(x)) = \varphi_u(\varphi_v(x)) = f(uv)x = uv \circ x \ ;$$

si $a \in G'$, $uva \neq 0$,

$$\lambda_u(\lambda_v(a)) = uva = uv \circ a \ ;$$

si $uva = 0$,

$$\lambda_u(\lambda_v(a)) = \varphi_u(\varphi_v(f(a))) = f(uv)\ f(a) = uv \circ a \ ;$$

donc $\lambda_u \circ \lambda_v = \gamma'_{uv}$.

Si, enfin, $uv = 0$ et $\varphi_u \circ \varphi_v = \gamma_c$, avec $c \in E$ (d'après (3.3)), on a, si $x \in E$,

$$\lambda_u(\lambda_v(x)) = \varphi_u(\varphi_v(x)) = cx = c \circ x \ ;$$

si $a \in G'$, $uva = 0$ et

$$\lambda_u(\lambda_v(a)) = \varphi_u(\varphi_v(f(a))) = c\ f(a) = c \circ a \ ;$$

donc $\lambda_u \circ \lambda_v = \gamma'_c$, ce qui achève la démonstration.

On peut finalement énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME 6. - Soient D un demi-groupe faiblement réductif de support E , Q un demi-groupe ayant un zéro, de support F disjoint de E , dont tout idéal propre est faiblement réductif. La donnée d'un idéal I de Q de support G , d'un homomorphisme partiel f de I' vers D (I' étant le sous-demi-groupe-partiel de I de support $G' = G - \{0\}$), et, pour tout $u \in F - G$, de $\omega_u = (\varphi_u , \psi_u) \in \Omega(D) - \Pi(D)$, tels que

(1) $(\forall\, u \in F - G)(\forall\, a \in G')$ $(ua \neq 0 \implies \varphi_u(f(a)) = f(ua))$

(2) $(\forall\, u \in F - G)(\forall\, a \in G')$ $(au \neq 0 \implies \psi_u(f(a)) = f(au))$

(3) $(\forall\, u , v \in F - G)$ $(uv \notin G \implies \omega_u . \omega_v = \omega_{uv})$

(4) $(\forall\, u , v \in F - G)$ $(uv \in G' \implies \omega_u . \omega_v = \pi_{f(uv)})$

(5) $(\forall\, u , v \in F - G)$ $(uv = 0 \implies \omega_u . \omega_v \in \Pi(D))$

détermine une extension idéale de D par Q , dont la loi $\star$ est définie par

$$(\forall\, a , b \in E \cup F') \qquad a \star b = \begin{cases} ab & \text{si } a , b \in E \\ af(b) & \text{si } a \in E , \ b \in G' \\ \psi_b(a) & \text{si } a \in E , \ b \in F - G \\ f(a)b & \text{si } a \in G' , \ b \in E \\ \varphi_a(b) & \text{si } a \in F - G , \ b \in E \\ ab & \text{si } a , b \in F' , \ ab \neq 0 \\ f(a)\, f(b) & \text{si } a , b \in G' , \ ab = 0 \\ \psi_b(f(a)) & \text{si } a \in G' , \ b \in F - G , \ ab = 0 \\ \varphi_a(f(b)) & \text{si } a \in F - G , \ b \in G' , \ ab = 0 \\ c & \text{si } a , b \in F - G , \ ab = 0 , \ \omega_u . \omega_v = \pi_c \ . \end{cases}$$

De plus, tout extension idéale de D par Q peut être construite de cette manière.

D'après ce qui précède, il n'y a plus qu'à vérifier les formules définissant $a \star b$. $a \star b$ est définie par les formules du théorème 5 à partir de l'homomorphisme pur déterminé par θ , et de la loi $\circ$ de S , elle-même définie par les formules du théorème 3. Soient donc $a , b \in E \cup F'$. Si $a , b \in E$, ou $a , b \in F'$, et $ab \neq 0$, on a $a \star b = ab$, puisque D^* est extension idéale de D par Q ;

si $a \in E$, $b \in G'$,

$$a \star b = a \circ b = af(b) \ ;$$

si $a \in E$, $b \in F - G$,

$$a \star b = \rho_b(a) = \psi_b(a) \ ;$$

si $a \in G'$ ou $a \in F - G$, et $b \in E$, dualement,

$$a \star b = f(a)b \qquad \text{ou} \qquad \varphi_a(b) \ ;$$

si $a , b \in G'$, $ab = 0$,

$$a \star b = a \circ b = f(a)\ f(b) \ ;$$

si $a \in G'$, $b \in F - G$, $ab = 0$,

$$a \star b = \rho_b(a) = \psi_b(f(a)) \qquad \text{(cf. lemme 2)} \ ;$$

si $a \in F - G$, $b \in G'$, $ab = 0$, dualement,

$$a \star b = \varphi_a(f(b)) \ ;$$

si $a , b \in F - G$, $ab = 0$, $a \star b$ est égal à l'unique $c \in E \cup G'$ tel que $\theta_a . \theta_b = \pi'_c$; alors $c \in E$ (lemme 1, condition (1.7)), et c est tel que

$$\omega_u . \omega_v = \pi_c \ ,$$

par restriction à E .

REMARQUE 1. - I étant donné, f ne peut être choisi arbitrairement ; **en effet,** si $a , b \in G'$ et $u \in F - G$ sont tels que $au \neq 0$, $ub \neq 0$, $aub = 0$, on a nécessairement

$$f(a)\ f(ub) = f(a)\ \varphi_u(f(b)) = \psi_u(f(a))\ f(b) = f(au)\ f(b) \ .$$

REMARQUE 2. - On vérifie aisément, encore que fastidieusement, que la construction du théorème 6, appliquée à un demi-groupe D faiblement réductif et à un demi-groupe Q ayant un zéro quelconque, fournit une extension idéale de D par Q (Rien ne permet toutefois de penser que l'on obtient ainsi toutes les extensions idéales de D par Q). Le procédé de construction peut, en ce cas, être allégé en ne supposant pas $\omega_u \notin \Pi(D)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CLIFFORD (A. H.) and PRESTON (G. B.). - The algebraic theory of semigroups, Vol. 1. - Providence, American mathematical Society, 1961 (Mathematical Surveys, 7).

[2] GRILLET (P.-A.). - Sur les extensions idéales d'un demi-groupe, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et Théorie des nombres, t. 18, 1964/65, n° 1, 21p.