Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Maurice Crestey

($\mathcal{T}$)-algèbres. Résiduation. Éléments primaux

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 17, n° 2 (1963-1964), exp. n° 22, p. 1-13

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1963-1964__17_2_A9_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
17e année, 1963/64, n° 22

$(\mathcal{T})$-ALGÈBRES. RÉSIDUATION. ÉLÉMENTS PRIMAUX

par Maurice CRESTEY

1. Définition d'une $(\mathcal{T})$-algèbre.

La théorie des $(\mathcal{T})$-algèbres, qui permet d'unifier les raisonnements dans l'étude des idéaux d'un demi-groupe ou d'un anneau, ou des sous-modules d'un module, a été développée par L. LESIEUR et R. CROISOT [1]. Le présent exposé ne contient rien d'autre que les axiomes et les premières propriétés de la structure de $(\mathcal{T})$-algèbre, présentés dans les chapitres III et IV de L. LESIEUR et R. CROISOT [2].

DÉFINITION 1. - Une $(\mathcal{T})$-algèbre est un couple $(\mathcal{T}, L)$ de deux treillis qui satisfont aux axiomes A , B , C suivants :

AXIOME A. - $(\mathcal{T})$ est un demi-groupe réticulé quasi-entier complet.

$(\mathcal{T})$ est donc à la fois un demi-groupe multiplicatif (la multiplication étant notée par juxtaposition) et un treillis complet (l'union est notée $+$, l'intersection $\cap$, la relation d'ordre $\subseteq$, la relation d'ordre strict $\subset$). Les éléments de $(\mathcal{T})$ sont notés par des majuscules de ronde, l'élément universel étant $\mathcal{E}$ et l'élément nul $\mathcal{O}$.

La multiplication est doublement distributive (même pour une somme infinie) :

$$\mathcal{A}(\sum_{i\in I} \mathcal{B}_i) = \sum_{i\in I} \mathcal{A}\mathcal{B}_i , \qquad (\sum_{i\in I} \mathcal{B}_i)\mathcal{A} = \sum_{i\in I} \mathcal{B}_i \mathcal{A} ,$$

et, de plus, $\mathcal{A}\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$.

AXIOME B. - (L) est un treillis complet.

Dans (L) , l'union est notée $+$, l'intersection $\cap$, la relation d'ordre $\subseteq$ et la relation d'ordre strict $\subset$. Les éléments de (L) sont notés par des majuscules d'imprimerie, l'élément universel étant U et l'élément nul O .

AXIOME C. - Les éléments de $(\mathcal{T})$ sont opérateurs dans (L) .

Il existe donc une loi externe qui, au couple $(\mathcal{A}, X)$ $(\mathcal{A} \in (\mathcal{T}) , X \in (L))$, fait correspondre un élément de (L) noté $\mathcal{A}X$, avec les propriétés suivantes :

$$(\mathcal{A}\mathcal{B})X = \mathcal{A}(\mathcal{B}X) , \qquad \mathcal{A}X \subseteq X ,$$

$$(\sum_{i\in I} \mathcal{A}_i)X = \sum_{i\in I} \mathcal{A}_i X , \qquad \mathcal{A}(\sum_{i\in I} X_i) = \sum_{i\in I} \mathcal{A}X_i ,$$

(valables même pour des sommes infinies),

$$\mathfrak{O}X = 0 \ , \qquad \mathfrak{a}0 = 0 \ .$$

Il résulte immédiatement de ces propriétés que cette loi externe est doublement isotone.

Exemples. -

1° $(\mathcal{T})$ et (L) sont confondus avec le treillis des idéaux bilatères d'un anneau A.

2° $(\mathcal{T})$ et (L) sont confondus avec le treillis des idéaux bilatères d'un demi-groupe D avec zéro.

3° $(\mathcal{T})$ est le treillis des idéaux bilatères, et (L) le treillis des idéaux à gauche d'un anneau A.

4° $(\mathcal{T})$ est le treillis des idéaux bilatères, et (L) le treillis des idéaux à gauche d'un demi-groupe D avec zéro.

5° $(\mathcal{T})$ est le treillis des idéaux bilatères d'un anneau A, et (L) le treillis des sous-modules d'un A-module (à gauche) M.

(Dans ces exemples, $\mathfrak{a}X$ représente le produit, au sens habituel, de l'idéal $\mathfrak{a}$ par l'idéal ou le sous-module X).

DÉFINITION 2. - On dit que $(\mathcal{T}, L)$ est une $(\mathcal{T})$-algèbre noethérienne (resp. artinienne) si le treillis (L) satisfait à la condition de chaîne ascendante (resp. descendante).

2. Résiduels à gauche et à droite.

PROPRIÉTÉ 1. - X et Y étant donnés dans (L), la famille des $\mathfrak{a}_i \in (\mathcal{T})$ tels que $\mathfrak{a}_i Y \subseteq X$ admet un élément maximum noté $X \,\dot{.}\, Y$, et que l'on appelle le résiduel à gauche de X par Y.

En effet, cette famille n'est pas vide (elle contient Θ), et l'élément $\mathfrak{a} = \sum_i \mathfrak{a}_i$ vérifie à la fois $\mathfrak{a}_i \subseteq \mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}Y = (\sum_i \mathfrak{a}_i)Y = \sum_i (\mathfrak{a}_i Y) \subseteq X$.

On établit de façon analogue :

PROPRIÉTÉ 2. - $X \in (L)$ et $\mathfrak{a} \in (\mathcal{T})$ étant donnés, la famille des $Y_j \in (L)$ tels que $\mathfrak{a}Y_j \subseteq X$ admet un élément maximum noté $X \,.\!\dot{}\, \mathfrak{a}$, et que l'on appelle le résiduel à droite de X par $\mathfrak{a}$.

Nous utiliserons dans la suite les propriétés suivantes des résiduels, dont la démonstration est immédiate :

(R_1)
$$X \cdot\!\!. [X .\!\!\cdot (X \cdot\!\!. Y)] = X \cdot\!\!. Y ,$$
$$X .\!\!\cdot [X \cdot\!\!. (X .\!\!\cdot \mathfrak{A})] = X .\!\!\cdot \mathfrak{A} .$$

(R_2)
$$X .\!\!\cdot \mathfrak{A}\mathfrak{B} = (X .\!\!\cdot \mathfrak{A}) .\!\!\cdot \mathfrak{B} ,$$
$$X .\!\!\cdot (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) = (X .\!\!\cdot \mathfrak{A}) \cap (X .\!\!\cdot \mathfrak{B}) .$$

(R_3)
$$(X \cap Y) \cdot\!\!. Z = (X \cdot\!\!. Z) \cap (Y \cdot\!\!. Z) .$$

(R_4)
$$X \subseteq X .\!\!\cdot \mathfrak{A} , \quad X \cdot\!\!. X = \mathcal{E} , \quad U \cdot\!\!. X = \mathcal{E} .$$

(R_5)
$$X \subseteq X' \implies X .\!\!\cdot \mathfrak{A} \subseteq X' .\!\!\cdot \mathfrak{A} \text{ et } X \cdot\!\!. Y \subseteq X' \cdot\!\!. Y .$$

(R_6)
$$\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B} \implies X .\!\!\cdot \mathfrak{A} \supseteq X .\!\!\cdot \mathfrak{B}$$

(la réciproque est exacte lorsque $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ sont des résiduels à gauche de X).

(R_7)
$$Y \subseteq Z \implies X \cdot\!\!. Y \supseteq X \cdot\!\!. Z$$

(la réciproque est exacte lorsque Y et Z sont des résiduels à droite de X).

Nous aurons besoin d'un axiome supplémentaire :

AXIOME D. - Pour tout $X \in (L)$, l'ensemble des résiduels à gauche de X et l'ensemble des résiduels à droite de X vérifient la condition de chaîne ascendante.

Cet axiome est vérifié notamment dans les cas suivants :

1° Les treillis $(\mathcal{T})$ et (L) satisfont à la condition de chaîne ascendante.
2° Les treillis $(\mathcal{T})$ et (L) satisfont à la condition de chaîne descendante.
3° Le treillis (L) satisfait aux conditions de chaîne ascendante et de chaîne descendante.
4° Le treillis $(\mathcal{T})$ satisfait aux conditions de chaîne ascendante et de chaîne descendante.

Il suffit, pour le voir, d'établir que l'une des conditions de chaîne sur les résiduels d'un côté entraîne l'autre condition de chaîne sur les résiduels de l'autre côté. Supposons par exemple satisfaite la condition de chaîne descendante sur les $X .\!\!\cdot \mathfrak{A}$, et considérons une chaîne ascendante

$$X \cdot\!\!. Y_1 \subseteq X \cdot\!\!. Y_2 \subseteq \dots \subseteq X \cdot\!\!. Y_n \subseteq \dots .$$

D'après la propriété R_6 des résiduels, $X .\!\!\cdot (X \cdot\!\!. Y_n) \supseteq X .\!\!\cdot (X \cdot\!\!. Y_{n+1})$. Les éléments $X \mathbin{.{}^{\bullet}} (X \mathbin{{}^{\bullet}.} Y_n)$ forment donc une chaîne descendante ; ils sont tous égaux à partir d'un certain rang, et, d'après la propriété R_1, il en est de même des $X \mathbin{{}^{\bullet}.} Y_n$.

DÉFINITION 3. - *Le résiduel à gauche* $\mathcal{P} = X \mathbin{{}^{\bullet}.} Y$ *est dit* propre *si* $Y \nsubseteq X$. *L'élément* $\mathcal{P} \in (\mathcal{T})$ *est dit* premier *si* $\mathcal{B}\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}$ *ou* $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}$.

PROPRIÉTÉ 3. - *Tout élément* X *de* (L) , *autre que* U , *admet au moins un résiduel à gauche propre premier*.

D'après l'axiome D, l'ensemble des résiduels à gauche propres de X (non vide puisque $X \neq U$) admet au moins un élément maximal $\mathcal{P} = X \mathbin{{}^{\bullet}.} Y$.

Supposons $\mathcal{B}\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}$, $\mathcal{C} \nsubseteq \mathcal{P}$, d'où $\mathcal{B}\mathcal{C}Y \subseteq \mathcal{P}Y \subseteq X$ et $\mathcal{C}Y \nsubseteq X$; on a alors $\mathcal{B} \subseteq X \mathbin{{}^{\bullet}.} \mathcal{C}Y$, résiduel à gauche propre de X . $\mathcal{C}Y \subseteq Y$ entraîne $X \mathbin{{}^{\bullet}.} Y \subseteq X \mathbin{{}^{\bullet}.} \mathcal{C}Y$ (propriété R_7) ; $\mathcal{P} = X \mathbin{{}^{\bullet}.} Y$ étant maximal, cette inclusion est en fait une égalité, et $\mathcal{B} \subseteq X \mathbin{{}^{\bullet}.} \mathcal{C}Y = \mathcal{P}$.

PROPRIÉTÉ 4. - *Pour que* $\mathcal{A}$ *soit un résiduel à gauche propre de* X , *il faut et il suffit que*

$$\mathcal{A} = X \mathbin{{}^{\bullet}.} (X \mathbin{.{}^{\bullet}} \mathcal{A}) , \qquad \text{avec } X \subset X \mathbin{.{}^{\bullet}} \mathcal{A} .$$

La condition est évidemment suffisante.

Pour montrer qu'elle est nécessaire, considérons $\mathcal{A} = X \mathbin{{}^{\bullet}.} Y$ $(Y \nsubseteq X)$. On a alors $Y \subseteq X \mathbin{.{}^{\bullet}} \mathcal{A}$, d'après la définition des résiduels,

$$\mathcal{A} = X \mathbin{{}^{\bullet}.} (X \mathbin{.{}^{\bullet}} \mathcal{A}) , \qquad \text{d'après la propriété } (R_1) ;$$

d'autre part, l'hypothèse $X = X \mathbin{.{}^{\bullet}} \mathcal{A}$ étant exclue, on a $X \subset X \mathbin{.{}^{\bullet}} \mathcal{A}$.

THÉORÈME 1. - *Pour tout* $X \in (L)$, *autre que* U , *il existe un nombre fini d'éléments premiers* $\mathcal{P}_i \in (\mathcal{T})$ $(i = 1 , 2 , \ldots , n)$, *tels que*

$$\mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2 \ldots \mathcal{P}_n U \subseteq X , \qquad \mathcal{P}_i \supseteq X \mathbin{{}^{\bullet}.} U ,$$

$\mathcal{P}_i$ *étant un résiduel à gauche propre maximal de* $X \mathbin{.{}^{\bullet}} \mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2 \ldots \mathcal{P}_{i-1}$.

D'après la propriété 3, X admet au moins un résiduel à gauche propre maximal (premier) $\mathcal{P}_1 = X \mathbin{{}^{\bullet}.} Y_1$ $(Y_1 \nsubseteq X)$. Posons $X_1 = X \mathbin{.{}^{\bullet}} \mathcal{P}_1$.

D'après la propriété 4, $X \subset X_1$ et $\mathcal{P}_1 = X \mathbin{{}^{\bullet}.} Y_1 \supseteq X \mathbin{{}^{\bullet}.} U$.

Si $X_1 \neq U$, il admet un résiduel propre maximal $\mathcal{P}_2$:

$$\mathcal{P}_2 = X_1 \mathbin{{}^{\bullet}.} Y_2 \supseteq X \mathbin{{}^{\bullet}.} Y_2 \supseteq X \mathbin{{}^{\bullet}.} U ,$$

d'où, en posant $X_2 = X_1 \cdot\!\!\cdot\, \mathfrak{P}_2 = X \cdot\!\!\cdot\, \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2$, $X \subset X_1 \subset X_2$. En vertu de la condition de chaîne ascendante sur les résiduels à droite, on arrivera au bout d'un nombre fini d'opérations à

$$X_n = U = X \cdot\!\!\cdot\, \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \dots \mathfrak{P}_n ,$$

d'où

$$\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \dots \mathfrak{P}_n U \subseteq X ,$$

$$X \,\cdot\!\!\cdot\, U \subseteq \mathfrak{P}_i ,$$

$\mathfrak{P}_j$ étant par construction un résiduel à gauche propre maximal de $X \cdot\!\!\cdot\, \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \dots \mathfrak{P}_{j-1}$.

THÉORÈME 2. - <u>Pour que</u> $X \subset X \cdot\!\!\cdot\, \mathfrak{A}$, <u>il faut et il suffit que</u> $\mathfrak{A}$ <u>soit contenu dans un résiduel à gauche propre premier de</u> X .

La condition est nécessaire, car si $X \subset X \cdot\!\!\cdot\, \mathfrak{A}$, $X \,\cdot\!\!\cdot\, (X \cdot\!\!\cdot\, \mathfrak{A})$ est un résiduel à gauche propre de X . L'égalité $Z = X \cdot\!\!\cdot\, \mathfrak{A}$ entraîne $\mathfrak{A}Z \subseteq X$, d'où

$$\mathfrak{A} \subseteq X \,\cdot\!\!\cdot\, Z = X \,\cdot\!\!\cdot\, (X \cdot\!\!\cdot\, \mathfrak{A}) ,$$

ce qui montre que $\mathfrak{A}$ est contenu dans un résiduel à gauche propre, lui-même contenu dans un résiduel à gauche propre maximal, qui est premier.

La condition est suffisante, car si $\mathfrak{P} = X \,\cdot\!\!\cdot\, Y$ est propre et premier, et si $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}$, on a $X \cdot\!\!\cdot\, \mathfrak{A} \supseteq X \cdot\!\!\cdot\, \mathfrak{P} \supseteq Y$, ce qui exclut l'hypothèse $X = X \cdot\!\!\cdot\, \mathfrak{A}$.

THÉORÈME 3. - <u>Un élément</u> $X \neq U$ <u>ne possède qu'un nombre fini de résiduels à gauche propre premiers</u>.

Considérons les $\mathfrak{P}_i$ obtenus dans la démonstration du théorème 1, et soit $\mathfrak{P} = X \,\cdot\!\!\cdot\, Y_0$, propre et maximal (donc premier).

$$\mathfrak{P} = X \,\cdot\!\!\cdot\, Y_0 \supseteq X \,\cdot\!\!\cdot\, U \supseteq \mathfrak{P}_1 \dots \mathfrak{P}_n .$$

$\mathfrak{P}$ étant premier, l'un au moins des $\mathfrak{P}_i$ est contenu dans $\mathfrak{P}$. Supposons $\mathfrak{P}_j \nsubseteq \mathfrak{P}$ pour $j = 1 , 2 , \dots , i - 1$.

Posons :

$$Y = X \cdot\!\!\cdot\, \mathfrak{P}_1 , \qquad Z = Y \cdot\!\!\cdot\, \mathfrak{P} , \qquad \mathfrak{M} = Y \,\cdot\!\!\cdot\, Z ;$$

les relations $\mathfrak{M} = Y \,\cdot\!\!\cdot\, Z$ et $\mathfrak{P}Z \subseteq Y$ entraînent $\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{M}$. Par ailleurs,

$$X \cdot\!\!\cdot\, \mathfrak{P}_1 \mathfrak{M} = (X \cdot\!\!\cdot\, \mathfrak{P}_1) \cdot\!\!\cdot\, \mathfrak{M} = Y \cdot\!\!\cdot\, (Y \,\cdot\!\!\cdot\, Z)$$

$$= Z = (X \cdot\!\!\cdot\, \mathfrak{P}_1) \cdot\!\!\cdot\, \mathfrak{P} = X \cdot\!\!\cdot\, \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P} \supseteq X \cdot\!\!\cdot\, \mathfrak{P} ,$$

ce qui entraîne $\mathcal{P}_1 \mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}$ (réciproque de (R_6)).

$$(\mathcal{P}_1 \not\subseteq \mathcal{P} \ , \ \mathcal{P} \text{ premier}) \implies \mathcal{M} \subseteq \mathcal{P} \ ,$$

et par suite

$$\mathcal{M} = \mathcal{P} \ ,$$

donc $\mathcal{P}$ est résiduel à gauche de $X \,.\!\cdot\, \mathcal{P}_1$.

Il est propre, sinon on aurait (propriété 4) :

$$(X \,.\!\cdot\, \mathcal{P}_1) \,.\!\cdot\, \mathcal{P} = X \,.\!\cdot\, \mathcal{P}_1 \ ,$$

d'où

$$X \,.\!\cdot\, \mathcal{P} \subseteq (X \,.\!\cdot\, \mathcal{P}_1) \,.\!\cdot\, \mathcal{P} = X \,.\!\cdot\, \mathcal{P}_1 \ ,$$

c'est-à-dire $\mathcal{P}_1 \subseteq \mathcal{P}$.

En répétant le raisonnement, on verrait de même que $\mathcal{P}$ est résiduel à gauche propre de $X \,.\!\cdot\, \mathcal{P}_1 \dots \mathcal{P}_{i-1} = X_{i-1}$.

$\mathcal{P}_i$ étant résiduel à gauche propre maximal de X_{i-1}, l'hypothèse $\mathcal{P}_i \subseteq \mathcal{P}$ entraîne $\mathcal{P}_i = \mathcal{P}$, ce qui démontre le théorème.

3. Axiome de modularité.

Dans le cas où (L) est un treillis d'idéaux d'un anneau, ou de sous-modules d'un module, (L) est un treillis modulaire. Dans le cas où (L) est un treillis d'idéaux d'un demi-groupe avec zéro, (L) est un treillis distributif. Ceci nous conduit à envisager, pour une $(\mathcal{C})$-algèbre, des axiomes supplémentaires :

Axiome de modularité. - Le treillis (L) est modulaire.

Axiome de $\cap$-continuité faible. - Le treillis (L) est faiblement $\cap$-continu (c'est-à-dire que pour toute chaîne $(Y_i)_{i\in I}$, on a

$$X \cap (\sum_i Y_i) = \sum_i (X \cap Y_i) \ ;$$

cette propriété est vérifiée dans le cas des exemples 1 à 5 ci-dessus).

DÉFINITION 4. - *Une $(\mathcal{C})$-algèbre est dite* modulaire (*resp.* distributive), *si elle vérifie l'axiome de modularité (resp. de distributivité) et l'axiome de $\cap$-continuité faible.*

On sait que si le treillis (L) est modulaire et s'il existe une chaîne maximale de longueur n :

$$0 \subset X_1 \subset X_2 \subset \dots \subset X_n = U ,$$

toute chaîne maximale est de longueur n. On dit alors que $(\mathcal{C}, L)$ est une $(\mathcal{C})$-algèbre de longueur finie. Elle est alors évidemment noethérienne et artinienne.

Si, de plus, le treillis (L) est distributif, on démontre que (L) n'a qu'un nombre fini d'éléments.

4. Définition et propriétés caractéristiques des éléments primaux.

Soit $(\mathcal{C}, L)$ une $(\mathcal{C})$-algèbre satisfaisant à l'axiome D. Pour tout $X \in (L)$, l'ensemble des résiduels à gauche de X et l'ensemble des résiduels à droite de X vérifient les conditions de chaîne ascendante et de chaîne descendante.

DÉFINITION 5. - Un élément $X \in (L)$ est dit primal si les conditions $X \subset X \,.\!\cdot\, \mathfrak{A}_1$, $X \subset X \,.\!\cdot\, \mathfrak{A}_2$ entraînent $X \subset (X \,.\!\cdot\, \mathfrak{A}_1) \cap (X \,.\!\cdot\, \mathfrak{A}_2)$.

L'élément universel U sera considéré comme primal.

Une conséquence immédiate de cette définition est :

PROPRIÉTÉ 5. - Tout élément $\cap$-irréductible de (L) est primal.

PROPRIÉTÉ 6. - Pour qu'un élément $X \in (L)$, autre que U, soit primal, il faut et il suffit qu'il admette un seul résiduel à gauche propre maximal $\mathcal{P}$.

La condition est suffisante : si $\mathcal{P}$ est le seul résiduel à gauche propre maximal de X, $X \subset \mathfrak{A}_i$ $(i = 1, 2)$ entraîne $\mathfrak{A}_i \subseteq \mathcal{P}$ (théorème 2), et par suite $\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 \subseteq \mathcal{P}$, d'où, toujours d'après le théorème 2,

$$X \,.\!\cdot\, (\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2) = (X \,.\!\cdot\, \mathfrak{A}_1) \cap (X \,.\!\cdot\, \mathfrak{A}_2) \supset X .$$

La condition est nécessaire : si $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont deux résiduels à gauche propres maximaux de X, X est strictement contenu dans les $X \,.\!\cdot\, \mathcal{P}_i$ $(i = 1, 2)$, mais $\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2$ n'est plus contenu dans un résiduel à gauche propre maximal de X et

$$X = X \,.\!\cdot\, (\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2) = (X \,.\!\cdot\, \mathcal{P}_1) \cap (X \,.\!\cdot\, \mathcal{P}_2) .$$

DÉFINITION 6. - $X \in (L)$, $(X \neq U)$ étant primal et $\mathcal{P}$ étant son unique résiduel à gauche propre maximal, on dit que X est $\mathcal{P}$-primal, ou que $\mathcal{P}$ est le résiduel maximum de X, ou encore que $\mathcal{P}$ est l'élément premier associé à X.

PROPRIÉTÉ 7. - Dans le cas où (L) est un treillis d'idéaux (à gauche ou bilatères) d'un anneau A ou de sous-modules d'un A-module, pour que X soit primal, il faut et il suffit que les conditions $X \subset X \,.^{\bullet}\, (a_1)$, $X \subset X \,.^{\bullet}\, (a_2)$ entraînent $X \subset X \,.^{\bullet}\, (a_1 + a_2)$, a_1 et a_2 étant deux éléments de A , et (a_i) l'idéal bilatère engendré par a_i .

La condition est suffisante : supposons $X \subset X \,.^{\bullet}\, (a_i)$ $(i = 1 , 2)$. Il est clair que $(a_1 + a_2) \subseteq (a_1) + (a_2)$, d'où

$$X \,.^{\bullet}\, (a_1 + a_2) \supseteq (X \,.^{\bullet}\, (a_1)) \cap (X \,.^{\bullet}\, (a_2)) .$$

Si X est primal, il est strictement contenu dans le second membre, donc dans le premier.

La condition est nécessaire : supposons que les conditions $X \subset X \,.^{\bullet}\, (a_1)$, $X \subset X \,.^{\bullet}\, (a_2)$ entraînent $X \subset X \,.^{\bullet}\, (a_1 + a_2)$, et que X ne soit pas primal.

D'après le théorème 3, X admet un nombre fini de résiduels à gauche propres maximaux $\mathcal{P}_1 , \mathcal{P}_2 , \ldots , \mathcal{P}_n$ $(n \geqslant 2)$. Les $\mathcal{P}_i$ étant premiers, $\mathcal{P}_2 \mathcal{P}_3 \ldots \mathcal{P}_n \not\subseteq \mathcal{P}_1$ et il existe un a_1 tel que

$$a_1 \in \mathcal{P}_2 \mathcal{P}_3 \ldots \mathcal{P}_n \subseteq \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 \cap \ldots \cap \mathcal{P}_n , \qquad a_1 \notin \mathcal{P}_1 .$$

De même, pour tout i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, il existe un a_i tel que

$$a_i \in \mathcal{P}_j \quad \text{pour } j \neq i , \qquad a_i \notin \mathcal{P}_i .$$

L'élément $a_1' = a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ vérifie alors

$$a_1' \in \mathcal{P}_1 , \qquad a_1' \notin \mathcal{P}_j \quad \text{pour } j \neq 1 .$$

On aboutit alors à une contradiction, puisque

$$(a_1) \subseteq \mathcal{P}_j \quad (j \neq 1) \qquad \text{entraîne} \qquad X \subset X \,.^{\bullet}\, (a_1) ,$$

$$(a_1') \subseteq \mathcal{P}_1 \qquad \text{entraîne} \qquad X \subset X \,.^{\bullet}\, (a_1') ,$$

d'où $X \subset X \,.^{\bullet}\, (a_1 + a_1')$, mais $a_1 + a_1'$ n'appartient à aucun des $\mathcal{P}_i$.

5. Théorèmes de décomposition.

DÉFINITION 7. - Une décomposition $X = X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_n$ est dite réduite si :

(1) aucun X_i n'est superflu ;

(2) X_i ne peut pas être remplacé par un de ses résiduels à droite le contenant strictement.

Un élément primal admet évidemment une décomposition $X = X_1$ réduite.

PROPRIÉTÉ 8. - <u>Tout élément</u> X <u>non primal admet une décomposition réduite</u> $X = X_1 \cap X_1'$, <u>dans laquelle</u> X_1 , X_1' <u>sont deux résiduels à droite de</u> X , X_1 <u>étant primal</u>.

X n'étant pas primal, il existe $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ tels que

$$X \subset X \mathbin{.^{\bullet}} \mathcal{A}_1 , \qquad X \subset X \mathbin{.^{\bullet}} \mathcal{A}_2 , \qquad X = (X \mathbin{.^{\bullet}} \mathcal{A}_1) \cap (X \mathbin{.^{\bullet}} \mathcal{A}_2) .$$

Considérons la famille $\mathcal{F}$ des résiduels à droite Y de X tels que

$$X \subset Y \subseteq X \mathbin{.^{\bullet}} \mathcal{A}_2 .$$

En vertu de l'axiome D, cette famille (évidemment non vide) admet un élément minimal Y_1 , et

$$X \cap (X \mathbin{.^{\bullet}} \mathcal{A}_1) \subseteq Y_1 \cap (X \mathbin{.^{\bullet}} \mathcal{A}_1) \subseteq (X \mathbin{.^{\bullet}} \mathcal{A}_1) \cap (X \mathbin{.^{\bullet}} \mathcal{A}_2) ,$$

d'où

$$X = Y_1 \cap (X \mathbin{.^{\bullet}} \mathcal{A}_1) .$$

Considérons la famille $\mathcal{G}$ des résiduels à droite T de X tels que

$$X \mathbin{.^{\bullet}} \mathcal{A}_1 \subseteq T , \qquad X = T \cap Y_1 .$$

Cette famille non vide (elle contient $X \mathbin{.^{\bullet}} \mathcal{A}_1$) admet un élément maximal X_1 et $X \subset X \mathbin{.^{\bullet}} \mathcal{A}_1 \subseteq X_1$.

X_1 <u>est primal</u>, sinon il existerait $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ tels que

$$X_1 \subset X_1 \mathbin{.^{\bullet}} \mathcal{B}_1 , \qquad X_1 \subset X_1 \mathbin{.^{\bullet}} \mathcal{B}_2 , \qquad X_1 = (X_1 \mathbin{.^{\bullet}} \mathcal{B}_1) \cap (X_1 \mathbin{.^{\bullet}} \mathcal{B}_2) ,$$

d'où

$$X \subseteq (X_1 \mathbin{.^{\bullet}} \mathcal{B}_1) \cap Y_1 \subseteq Y_1 .$$

$X_1 \mathbin{.^{\bullet}} \mathcal{B}_1$ et Y_1 étant des résiduels à droite de X , leur intersection en est un et par suite appartient à $\mathcal{F}$. Y_1 étant minimal dans $\mathcal{F}$, on a

$$(X_1 \mathbin{.^{\bullet}} \mathcal{B}_1) \cap Y_1 = X \quad \text{ou} \quad Y_1 .$$

Ce ne peut être X , puisque X_1 est minimal dans $\mathcal{G}$; on a donc $(X_1 \mathbin{.^{\bullet}} \mathcal{B}_1) \cap Y_1 = Y_1$ et, de même, $(X_1 \mathbin{.^{\bullet}} \mathcal{B}_2) \cap Y_1 = Y_1$. En prenant l'intersection, on obtient $X_1 \cap Y_1 = Y_1$, c'est-à-dire $X = Y_1$, ce qui contredit la définition de Y_1 .

Considérons enfin la famille $\mathcal{H}$ des résiduels à droite T de X tels que

$$X = X_1 \cap T , \qquad T \supseteq Y_1 .$$

Cette famille non vide ($Y_1 \in \mathcal{H}$) admet un élément maximal X'_1. La décomposition $X = X_1 \cap X'_1$ a bien les propriétés de l'énoncé.

PROPRIÉTÉ 9. - Tout élément X non primal possède une décomposition réduite en un nombre fini d'éléments primaux qui sont des résiduels à droite de X.

Dans la décomposition précédente, $X = X_1 \cap X'_1$, il peut se faire que X'_1 soit primal. La propriété est alors établie.

Si X'_1 n'est pas primal, il admet une décomposition réduite $X'_1 = X_2 \cap X'_2$, dans laquelle X_2 est primal, X_2 et X'_2 étant des résiduels à droite de X'_1, donc de X. Alors $X = X_1 \cap X_2 \cap X'_2$, avec $X \subset X'_1 \subset X'_2$, la décomposition étant réduite.

Si X'_2 n'est pas primal, on répète le procédé. En vertu de la condition de chaîne, on arrivera au bout d'un nombre fini d'opérations à

$$(1) \qquad X = X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_n ,$$

décomposition réduite de X en intersection de résiduels à droite de X, tous primaux.

On peut, en fait, se ramener à un cas plus remarquable :

THÉORÈME 4. - Tout $X \in (L)$, autre que U, admet une décomposition réduite comme intersection d'un nombre fini d'éléments X_i $\mathcal{P}_i$-primaux qui sont des résiduels à droite de X tels que les éléments premiers associés $\mathcal{P}_i$ soient deux à deux incomparables.

Il suffit d'établir que si, dans la décomposition (1) précédente, X_1 est $\mathcal{P}_1$-primal, X_2, $\mathcal{P}_2$-primal, avec $\mathcal{P}_2 \subseteq \mathcal{P}_1$, l'élément $Y_1 = X_1 \cap X_2$ est $\mathcal{P}_1$-primal et la décomposition $X = Y_1 \cap X_3 \cap \dots \cap X_n$ réduite.

En effet, $\mathfrak{A} \nsubseteq \mathcal{P}_1$ entraîne $Y_1 \mathbin{.^{\bullet}} \mathfrak{A} = (X_1 \mathbin{.^{\bullet}} \mathfrak{A}) \cap (X_2 \mathbin{.^{\bullet}} \mathfrak{A}) = X_1 \cap X_2 = Y_1$, et Y_1 ne peut avoir d'autre résiduel à gauche propre premier que $\mathcal{P}_1$. De plus, si on avait $X = (Y_1 \mathbin{.^{\bullet}} \mathfrak{B}) \cap X_3 \cap \dots \cap X_n$, $Y_1 \subset Y_1 \mathbin{.^{\bullet}} \mathfrak{B}$, on aurait $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{P}_1$, et par suite $X = (X_1 \mathbin{.^{\bullet}} \mathfrak{B}) \cap (X_2 \mathbin{.^{\bullet}} \mathfrak{B}) \cap \dots \cap X_n$, ce qui contredit l'hypothèse : (1) est réduite.

PROPRIÉTÉ 10. - Tout résiduel à gauche propre premier de $X = X_1 \cap X_2$ est un résiduel à gauche propre premier de X_1 ou de X_2.

Soit $\mathcal{P} = X \mathbin{^{\bullet}.} Y = (X_1 \mathbin{^{\bullet}.} Y) \cap (X_2 \mathbin{^{\bullet}.} Y)$, premier, avec $Y \nsubseteq X$; soient $\mathfrak{A}_1 = X_1 \mathbin{^{\bullet}.} Y$, $\mathfrak{A}_2 = X_2 \mathbin{^{\bullet}.} Y$. Alors $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \subseteq \mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{A}_2 = \mathcal{P} \subseteq \mathfrak{A}_i$ $(i = 1, 2)$, ce qui montre que $\mathcal{P} = \mathfrak{a}_1$ ou $\mathfrak{a}_2$, puisqu'il est premier.

Si, par exemple, $\mathcal{P} = \mathfrak{a}_1$, la propriété est établie dans le cas où $Y \not\subseteq X_1$. Pour $Y \subseteq X_1$, on a, pour tout $\mathcal{B} \in (\mathcal{T})$, $\mathcal{B}Y \subseteq X$, donc $\mathcal{P} = \mathcal{E}$, et par suite

$$\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_2 = \mathcal{P} = \mathcal{E} .$$

Mais alors $X_2 \cdot\!\!\cdot\, Y = \mathcal{P}$, avec $Y \not\subseteq X_2$, puisque $Y \not\subseteq X$.

PROPRIÉTÉ 11. - <u>Si la décomposition</u> $X = X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_n$ <u>est réduite, tout résiduel à gauche propre premier, maximal dans l'ensemble des résiduels à gauche propres premiers des</u> X_i , <u>est un résiduel à gauche propre maximal de</u> X .

Soit $\mathcal{P}_1$ un tel résiduel, de X_1 par exemple. Alors $X_1 \subset X_1 \cdot\!\!\cdot\, \mathcal{P}_1$.

Supposons $X \cdot\!\!\cdot\, \mathcal{P}_1 = X$. On a alors

$$X = X_1 \cap \dots \cap X_n \subseteq (X_1 \cdot\!\!\cdot\, \mathcal{P}_1) \cap X_2 \cap \dots \cap X_n \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} (X_i \cdot\!\!\cdot\, \mathcal{P}_1) = X \cdot\!\!\cdot\, \mathcal{P}_1 = X ,$$

donc $X = (X_1 \cdot\!\!\cdot\, \mathcal{P}_1) \cap X_2 \cap \dots \cap X_n$, ce qui contredit l'hypothèse.

On a donc $X \subset X \cdot\!\!\cdot\, \mathcal{P}_1$ et par suite $\mathcal{P}_1 \subseteq \mathcal{P}$, où $\mathcal{P}$ est un résiduel à gauche propre premier de X .

D'après la propriété 10, $\mathcal{P}$ est contenu dans un $\mathcal{P}_i$, résiduel à gauche propre premier maximal d'un X_i . $\mathcal{P}_1 \subseteq \mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}_i$ entraîne $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1$, puisque $\mathcal{P}_1$ est maximal.

On déduit immédiatement de ce qui précède le théorème suivant :

THÉORÈME 5 (théorème d'unicité des décompositions réduites). - <u>Soient</u> $X = X_1 \cap \dots \cap X_n = X'_1 \cap \dots \cap X'_{n'}$ <u>deux décompositions réduites de</u> $X \in (L)$, $X \neq U$, <u>en éléments</u> X_i $\mathcal{P}_i$<u>-primaux où les</u> $\mathcal{P}_i$ <u>sont deux à deux incomparables, et en éléments</u> X'_j $\mathcal{P}'_j$<u>-primaux où les</u> $\mathcal{P}'_j$ <u>sont deux à deux incomparables. Alors,</u> $n = n'$, <u>et l'ensemble des</u> $\mathcal{P}_i$ <u>coïncide avec l'ensemble des</u> $\mathcal{P}'_j$ <u>et avec l'ensemble des résiduels à gauche propres maximaux de</u> X .

6. Radical primal.

D'après les résultats précédents, si X est $\mathcal{P}$-primal, $\mathcal{P}$ est le plus grand des $\mathfrak{a}$ tels que $X \subset X \cdot\!\!\cdot\, \mathfrak{a}$; si X n'est pas primal, il admet un nombre fini de résiduels à gauche propres maximaux $\mathcal{P}_i$ $(i = 1 , 2 , \dots , n)$.

THÉORÈME 6. - X <u>étant donné, l'ensemble des</u> $\mathfrak{A} \in (\mathfrak{T})$ <u>tels que</u>

$$(X \mathbin{.^{\bullet}} \mathfrak{A}) \cap (X \mathbin{.^{\bullet}} \mathfrak{B}) = X \implies X \mathbin{.^{\bullet}} \mathfrak{B} = X$$

<u>possède un élément maximum</u> $\mathfrak{R}$ <u>qui est</u> :

- $\mathfrak{E}$, <u>si</u> $X = U$,
- <u>l'intersection des résiduels à gauche propres maximaux de</u> X , <u>si</u> $X \neq U$.

1° Si $X = U$, tout $\mathfrak{A} \in (\mathfrak{T})$ a la propriété voulue, et $\mathfrak{R} = \mathfrak{E}$.

2° Si $X \neq U$, supposons que $(X \mathbin{.^{\bullet}} \mathfrak{A}) \cap (X \mathbin{.^{\bullet}} \mathfrak{B}) = X$ entraîne $X \mathbin{.^{\bullet}} \mathfrak{B} = X$, et soit $\mathfrak{P}$ un résiduel à gauche propre maximal de X . L'hypothèse $\mathfrak{A} \not\subseteq \mathfrak{P}$ entraîne alors que $\mathfrak{A} + \mathfrak{P}$ n'est contenu dans aucun des $\mathfrak{P}_i$.

$$X \mathbin{.^{\bullet}} (\mathfrak{A} + \mathfrak{P}) = (X \mathbin{.^{\bullet}} \mathfrak{A}) \cap (X \mathbin{.^{\bullet}} \mathfrak{P}) = X \implies X \mathbin{.^{\bullet}} \mathfrak{P} = X ,$$

ce qui contredit le théorème 2. Donc $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}$, et $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{R} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{P}_i$.

3° Supposons **inversement** $X \neq U$,

$$\mathfrak{R} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{P}_i , \qquad (X \mathbin{.^{\bullet}} \mathfrak{R}) \cap (X \mathbin{.^{\bullet}} \mathfrak{B}) = X ,$$

ce qui s'écrit aussi $X \mathbin{.^{\bullet}} (\mathfrak{R} + \mathfrak{B}) = X$. D'après le théorème 2, $\mathfrak{R} + \mathfrak{B}$ n'est contenu dans aucun des $\mathfrak{P}_i$, donc $\mathfrak{B}$ n'est contenu dans aucun des $\mathfrak{P}_i$ et $X \mathbin{.^{\bullet}} \mathfrak{B} = X$.

DÉFINITION 8. - <u>L'élément</u> $\mathfrak{R}$, <u>défini ci-dessus, est le</u> radical primal <u>de</u> X . <u>On le note</u> $\mathfrak{R}_4(X)$.

PROPRIÉTÉ 12. - <u>Pour que</u> $X \in (L)$ <u>soit primal, il faut et il suffit que</u>

$$(\mathfrak{A}Y \subseteq X , \ Y \not\subseteq X) \implies \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{R}_4(X) .$$

<u>La condition est nécessaire</u> : si X est $\mathfrak{P}$-primal, $\mathfrak{R}_4(X) = \mathfrak{P}$.

$$\mathfrak{A}Y \subset X \implies Y \subset X \mathbin{.^{\bullet}} \mathfrak{A} .$$

Puisque $Y \not\subseteq X$, on ne peut avoir $X = X \mathbin{.^{\bullet}} \mathfrak{A}$, donc $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}$.

<u>La condition est suffisante</u> : supposons $X \subset Y = X \mathbin{.^{\bullet}} \mathfrak{A}$, $X \subset X \mathbin{.^{\bullet}} \mathfrak{B}$. Alors $\mathfrak{A}Y \subseteq X$, $Y \not\subseteq X$, d'où $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{R}_4(X)$. On ne peut avoir $(X \mathbin{.^{\bullet}} \mathfrak{A}) \cap (X \mathbin{.^{\bullet}} \mathfrak{B}) = X$, sinon $X = X \mathbin{.^{\bullet}} \mathfrak{B}$ d'après la définition de $\mathfrak{R}_4(X)$. On a donc $X \subset (X \mathbin{.^{\bullet}} \mathfrak{A}) \cap (X \mathbin{.^{\bullet}} \mathfrak{B})$ et X est primal.

BIBLIOGRAPHIE

[1] LESIEUR (L.) et CROISOT (R.). - Théorie noethérienne des anneaux, des demi-groupes et des modules dans le cas non commutatif,
I : Colloque d'algèbre supérieure [1956. Bruxelles], p. 79-121. - Louvain, Ceuterick, 1957 (Centre belge de Recherches mathématiques).
II : Math. Annalen, t. 134, 1958, p. 458-476.
III : Acad. royale Belgique, Bull. Cl. Sc., 5e série, t. 44, 1958, p. 75-93.

[2] LESIEUR (L.) et CROISOT (R.). - Algèbre noethérienne non commutative. - Paris, Gauthier-Villars, 1963 (Mémorial des Sciences mathématiques, 154).