Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

JACQUES GRAPPY

Demi-groupes dont le treillis des congruences est un treillis complémenté

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 17, nº 2 (1963-1964), exp. nº 21, p. 1-21

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1963-1964__17_2_A8_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
17e année, 1963/64, n° 21

28 mai 1964

DEMI-GROUPES DONT LE TREILLIS DES CONGRUENCES EST UN TREILLIS COMPLÉMENTÉ

par Jacques GRAPPY

En théorie des groupes de nombreux travaux ont eu pour objet l'étude des groupes admettant un certain type de treillis de sous-groupes, ou de sous-groupes distingués. On pourra à ce sujet se reporter au livre de M. SUZUKI [6]. Dans sa thèse [1], M. EGO a caractérisé les demi-groupes dont le treillis des sous-demi-groupes vérifie des conditions de modularité affaiblie. Dans cet exposé, nous étudions les demi-groupes dont le treillis des congruences est un treillis complémenté (*). Dans toute la suite, si D est un demi-groupe, nous noterons $\mathcal{C}(D)$ le treillis de ses congruences ; ε désignera l'égalité, et u la congruence universelle de D .

1. Exemples.

Signalons quelques exemples de demi-groupes dont le treillis des congruences est complémenté.

EXEMPLE 1. - Si D est un groupe, $\mathcal{C}(D)$ est isomorphe au treillis des sous-groupes distingués de D , donc est modulaire. Plus généralement, soit A une algèbre abstraite, telle que le treillis de ses congruences, $\mathcal{C}(A)$, soit modulaire. HASHIMOTO [4] a montré que $\mathcal{C}(A)$ est complémenté si et seulement si A est produit sous-direct d'algèbres simples et si deux éléments quelconques de A n'ont qu'un nombre fini de projections distinctes. Dans le cas d'un groupe D on retrouve que D est somme directe de groupes simples.

EXEMPLE 2. - Si D est un 0-demi-groupe, ou un demi-groupe 0 à droite (ou à gauche), $\mathcal{C}(D)$ est complémenté. En effet, $\mathcal{C}(D)$ coïncide alors avec le treillis des relations d'équivalence de D . Nous allons voir que ces demi-groupes sont caractérisés par cette propriété.

PROPOSITION 1. - *Soit* D *un demi-groupe dans lequel toute équivalence est régulière. Alors* D *est de l'un des types suivants* :

(*) Une partie des résultats présentés ici a été publiée dans une note aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris [3].

(a) D <u>a deux éléments</u>,

(b) D <u>est un zéro-demi-groupe</u>,

(c) D <u>est un zéro-demi-groupe à gauche (ou à droite)</u>.

Remarquons que si D a deux éléments, c'est soit un groupe, soit un demi-groupe avec zéro, soit un demi-groupe de type (b) ou (c). Supposons que D ait plus de deux éléments. Soient $a \in D$, $b \in D$. Notons $R_{a,b}$ l'équivalence définie dans D par

$$x \equiv y \ (R_{a,b}) \iff (x = y \ \text{ ou } \ \{x , y\} = \{a , b\}) .$$

Pour tout $x \in D$, on a donc $xa \equiv xb \ (R_{a,b})$. Distinguons 3 cas :

1° Quels que soient x , a , b , on a $xa = xb$.

Soit $c \in D$, $z = ca$, $\forall \ a \in D$. Pour tout y : $zy = c(ay) = z$. z est donc un zéro à gauche. Pour tout y , $y \neq z$, on a $yz \equiv z^2 = z \ (R_{y,z})$, c'est-à-dire $yz = z$ ou $yz = y$.

Si pour tout y : $yz = z$, z est un zéro, et D est un zéro-demi-groupe, car $u \cdot v = u \cdot z = z$. Sinon il existe $y \neq z$, $yz = y$. Alors, pour tout $u \in D$, $uy = uz$ est égal à u ou z . Si $uy = z$, $z \equiv y^2 = y \ (R_{u,y})$ implique $u = z$. On a donc, pour tout u , $uz = u$, et pour tout v , $uv = uz = u$. D est donc un demi-groupe-zéro à gauche.

2° Il existe x , a , b , $a \neq b$, $xa = b$, $xb = a$.

Si $x \notin \{a , b\}$, les relations

$$x^2 \equiv xa = b \ (R_{xa}) \quad \text{et} \quad x^2 \equiv xb = a \ (R_{xb})$$

sont incompatibles. On a donc, par exemple, $x = a$, d'où $a^2 = b$, $ab = a$.

Si $u \notin \{a , b\}$, $au \equiv a^2 = b \ (R_{ua})$ et $au \equiv ab = a \ (R_{ub})$ sont incompatibles. D serait donc réduit à $\{a , b\}$, ce qui est exclu.

3° Il existe x , a , b , $a \neq b$, $xa = a$, $xb = b$.

Si $x \notin \{a , b\}$, les relations $x^2 \equiv xa \ (R_{xa})$ et $x^2 \equiv xb \ (R_{xb})$, impliquent $x^2 = x$. On peut donc supposer $a^2 = a$, $ab = b$. Montrons que D est alors un zéro-demi-groupe à droite.

Si $u \notin \{a , b\}$, $au \equiv a^2 \ (R_{ua})$, $au \equiv ab \ (R_{ub})$ impliquent $au = u$. Donc, pour tout $u \in D$, $au = u$.

Soient x , y . $x \neq y$, $x \neq a$, $y \neq a$; $yx \equiv ax = x \ (R_{ya})$ entraîne $yx = x$.

Soit $x \notin \{a , b\}$. $x^2 \equiv ax = x \ (R_{xa})$ et $x^2 \equiv bx = x \ (R_{xb})$ entraînent $x^2 = x$; de plus $b^2 \equiv ab = b \ (R_{ab})$ et $b^2 \equiv bx = x \ (R_{xb})$ entraînent $b^2 = b$; donc, pour tout $x \in D$, $x^2 = x$.

Il reste à démontrer que $xa = a$, $\forall \ x \in D$.

Si $x \notin \{a , b\}$, les relations $xa \equiv x^2 = x \ (R_{ax})$ et $xa \equiv xb = b \ (R_{ab})$ donnent $xa = a$. Alors $ba \equiv b^2 \ (R_{ab})$ et $ba \equiv bx = b \ (R_{ax})$ montrent que $ba = a$.

2. Demi-groupes $\mathcal{C}$-simples.

Définition. - Nous dirons qu'un demi-groupe D est $\mathcal{C}$-simple s'il ne possède pas de congruences propres.

Alors $\mathcal{C}(D)$ est évidemment complémenté.

Tout idéal de D étant classe d'une congruence, si D est $\mathcal{C}$-simple, il en résulte que D est simple ou 0-simple.

PROPOSITION 2.1. - *Soit D un demi-groupe 0-simple. Alors $\mathcal{C}(D)$ est complémenté si et seulement si D est $\mathcal{C}$-simple.*

En effet soient $\theta \in \mathcal{C}(D)$, et θ' un complément de θ . La classe de 0 modulo θ est un idéal bilatère de D . Si elle est égale à D , alors $\theta = u$ congruence universelle ; sinon elle est réduite à 0 , et la classe de 0 modulo θ' est égale à D , d'où $\theta' = u$, et $\theta = \varepsilon$.

GLUSKIN [2] a démontré :

PROPOSITION 2.2. - *Soit D un demi-groupe avec zéro, ayant plus de deux éléments. Alors $\mathcal{C}(D)$ est complémenté si et seulement si :*

1° *D est 0-simple,*

2° *Quels que soient x , y dans D , il existe u et v tels que*

$$uxv = 0 \ \text{ et } \ uyv \neq 0 \ , \text{ ou bien } \ uxv \neq 0 \ \text{ et } \ uyv = 0 \ .$$

La relation $x\theta y \iff \{uxv = 0 \iff uyv = 0\}$ est une congruence de D . La classe de 0 est réduite à 0 , si D est 0-simple, car, pour tout $x \in D$, $x \neq 0$, il existe u et v tels que $uxv = x$.

Si D est $\mathcal{C}$-simple, θ est alors l'égalité, d'où la condition 2°.

Réciproquement, si $\varphi \in \mathcal{C}(D)$, $\varphi \neq u$, alors la classe de 0 est $\{0\}$, et on a $\varphi \leq \theta$, et $\theta = \varepsilon$, d'après la condition 2°.

GLUSKIN a également caractérisé les demi-groupes avec 0 complètement 0-simples qui sont $\mathcal{C}$-simples. Nous retrouverons ce résultat au chapitre suivant.

Pour les demi-groupes sans zéro, la $\mathcal{C}$-simplicité ne s'exprime pas simplement. Signalons la propriété suivante :

PROPOSITION 2.3. - Soit D un demi-groupe simple sans zéro. Alors le centre Z de D est classe d'une congruence.

Il suffit de vérifier que si Zx rencontre Z, alors $Zx \subseteq Z$.

Soit $c \in Zx \cap Z$, $c = dx$, $d \in Z$. Soit b quelconque dans Z, montrons que $bx \in Z$. Puisque D est simple, il existe $yb = dy$. Pour tout u dans D,

$$(bx)u = (dy)xu = y(dx)u = yu(dx) = d(yu)x = u.dyx = u.(bx) .$$

COROLLAIRE. - Si D est un demi-groupe $\mathcal{C}$-simple sans zéro, alors
ou bien D est abélien et est alors un groupe cyclique d'ordre premier,
ou bien le centre de D est réduit à un élément qui est élément neutre de D,
ou bien le centre de D est vide.

En effet si $Z = \{e\}$, e est idempotent, car $e^2 \in Z$, et pour tout x, il existe y, $ey = x$, d'où $ex = e^2 y = x$.

3. Demi-groupes complètement simples, ou 0-simples.

Soit D un demi-groupe complètement 0-simple, représenté comme demi-groupe de matrices sur un groupe G et $\{0\}$, $D = \mathfrak{M}^0(G , I , \Lambda , P)$ avec les notations habituelles. G. B. PRESTON [5] a montré que toute congruence $\theta \neq u$ de D est définie par les données suivantes :

1° Une équivalence $\mathcal{P}$ de $I \times \Lambda$, vérifiant :

(a) $\mathcal{P}$ est le produit d'une équivalence de I et d'une équivalence de Λ,

(b) Si $(i , \lambda) \equiv (j , \mu)(\mathcal{P})$, alors $\rho_{\lambda i} = \rho_{\mu j} = 0$, ou $\rho_{\lambda i} \neq 0$, et $\rho_{\mu j} \neq 0$;

2° Un sous-groupe distingué N de H_{11} (en supposant que $1 \in I \cap \Lambda$ et que H_{11} est un groupe), qui est le noyau de la restriction de θ à H_{11} ;

3° Une famille d'éléments $\{e_i\ f_\lambda\}$, $e_i \in H_{i1}$, $f_\lambda \in H_{1\lambda}$, tels que

$$f_\lambda\ e_i \equiv f_\mu\ e_j(\theta) \quad \text{si} \quad (i , \lambda) \equiv (j , \mu)(\mathcal{P}) .$$

Les classes différentes de $\{0\}$ sont alors $\{\bigcup_{(i,\lambda)\in\mathcal{C}} e_i\ Na\ f_\lambda\}$, où $a \in H_{11}$ et où $\mathcal{C}$ est une classe de $I \times \Lambda$ modulo $\mathcal{P}$.

On notera :

$$\theta = [\mathcal{P} , N , e_i , f_\lambda] .$$

Si $\mathcal{E}$ est l'égalité de $I \times \Lambda$, pour tout sous-groupe distingué N de H_{11} , il existe une et une seule congruence θ définie par $\mathcal{P} = \mathcal{E}$, et N , les éléments e_i , f_λ étant arbitraires. On notera $\theta = [\mathcal{E} , N]$.

Pour que D soit $\mathcal{C}$-simple, il faut que $[\mathcal{E} , N]$ soit l'égalité, donc que G (isomorphe à H_{11}) se réduise à son élément neutre. Il faut de plus que $I \times \Lambda$ ne possède pas d'équivalence $\mathcal{P}$ vérifiant (a) et (b), différente de $\mathcal{E}$ et de l'équivalence universelle $\mathcal{U}$, sinon $\theta = [\mathcal{P} , H_{11} , e_i , f_\lambda]$, où les e_i et f_λ sont quelconques, serait une congruence propre. Ces conditions sont évidemment suffisantes.

THÉORÈME 3.1 (GLUSKIN). - <u>Pour que</u> $\mathfrak{M}^0(G , I , \Lambda , P)$ <u>soit</u> $\mathcal{C}$-<u>simple, il faut et il suffit que</u>

1° G <u>se réduise à son élément neutre</u>,

2° <u>Pour tout couple</u> $(i , j) \in I \times I$: $\{\lambda , \rho_{\lambda i} \neq 0\} \neq \{\lambda , \rho_{\lambda j} \neq 0\}$;
<u>Pour tout couple</u> $(\lambda , \mu) \in \Lambda \times \Lambda$: $\{i , \rho_{\lambda i} \neq 0\} \neq \{i , \rho_{\mu i} \neq 0\}$.

La deuxième condition exprime en effet que $\mathcal{C}$ est la seule équivalence de $I \times \Lambda$ vérifiant (a) et (b).

Considérons maintenant un demi-groupe complètement simple (sans zéro), $D = \mathfrak{M}(GI\Lambda P)$. On a $\rho_{\lambda i} \neq 0$, $\forall$ λ , $\forall$ i . Toute congruence de D est définie de même par les données $\mathcal{P}$, N , e_i , f_λ . Mais ici toute équivalence $\mathcal{P}$ de $I \times \Lambda$ vérifiant (a) vérifie évidemment (b). Pour que D soit $\mathcal{C}$-simple, il faut que $\theta = [\mathcal{P} , H_{11} , e_i , f_\lambda]$ (les e_i , f_λ étant pris arbitrairement) soit égale à ε ou u , quelle que soit $\mathcal{P}$. Cela implique que I et Λ se réduisent à un élément, donc $D \simeq G$. On obtient ainsi :

THÉORÈME 3.2. - <u>Soit</u> D <u>un demi-groupe complètement simple</u>. D <u>est</u> $\mathcal{C}$-<u>simple si et seulement si</u> D <u>est un groupe simple</u>.

Nous allons maintenant caractériser les demi-groupes complètement simples tels que $\mathcal{C}(D)$ soit complémenté.

Supposons que $\mathcal{C}(D)$ soit complémenté, $D = \mathfrak{M}(G , I , \Lambda , P)$. Nous allons montrer qu'alors $\mathcal{C}(G)$ est complémenté. Soit N , sous-groupe distingué de H_{11} , $\theta = [\mathcal{E} , N]$ possède un complément $\theta' = \{\mathcal{P} , M , e_i , f_\lambda\}$. Puisque $\theta \vee \theta' = u$, il en résulte $\mathcal{P} = \mathcal{U}$, équivalence universelle de $I \times \Lambda$. Si l'on montre que les restrictions $\theta_{H_{11}}$ et $\theta'_{H_{11}}$ de θ et θ' à H_{11} sont compléments dans $\mathcal{C}(H_{11})$, on aura démontré que $\mathcal{C}(H_{11})$ est complémenté. On a évidemment

$$\theta_{H_{11}} \wedge \theta'_{H_{11}} = \varepsilon_{H_{11}} .$$

Soient x et $y \in H_{11}$. Puisque $\theta \vee \theta' = u$, il existe $a_0 = x$, $a_1, \dots, a_{2n} = y$ tels que

$$a_{2i} \equiv a_{2i+1}\ (\theta)\ ,\quad a_{2i-1} \equiv a_{2i}\ (\theta') .$$

De $x \equiv a_1(\theta)$ résulte $a_1 \in H_{11}$. $a_1 \equiv a_2\ (\theta')$ implique qu'il existe $i \in I$, $\lambda \in H$, $a \in H_{11}$ tels que $a_1 \in e_1\ Ma\ f_1$, $a_2 \in e_i\ Ma\ f_\lambda$. Si l'on pose

$$u = e_1 . (1\ ,\ 1\ ,\ e)\ e_i^{-1}\ ,\qquad v = f_\lambda^{-1}(1.1.e)f_1 \qquad (\ e \text{ élément neutre de } G\ ),$$

on a :

$$ue_i = e_1\ ,\qquad f_\lambda\ v = f_1 .$$

Posons

$$a'_i = ua_i\ v\ ,\quad i = 2\ ,\ 3\ ;\qquad a'_2 \in H_{11} \text{ et } a_1 \equiv a'_2\ (\theta')$$

puisque $a'_2 \in e_1\ Ma\ f_1$, d'où $a'_2 \in H_{11}$. θ étant régulier, $a'_2 \equiv a'_3\ (\theta)$, d'où $a'_3 \in H_{11}$. Puisque $a_3 \in H_{i\lambda}$ $(a_3 \equiv a_2\ (\theta))$, il existe $b \in H_{11}$, $a_3 \in e_i\ Mb\ f_\lambda$; alors $a'_3 \in e_1\ Mb\ f_1$ et $a_3 \equiv a'_3\ (\theta')$.

On a finalement

$$x \equiv a_1\ (\theta)\ ,\quad a_1 \equiv a'_2\ (\theta')\ ,\ a'_2 \equiv a'_3\ (\theta)\ ,\quad a'_3 \equiv a_4\ (\theta') .$$

En répétant l'opération, on voit que l'on peut supposer que tous les $a_i \in H_{11}$, c'est-à-dire $x \equiv y(\theta_{H_{11}} \vee \theta'_{H_{11}})$. Il en résulte

$$\theta_{H_{11}} \vee \theta'_{H_{11}} = u_{H_{11}}$$

et $\mathcal{C}(G)$ est complémenté.

Considérons $\theta = [\mathcal{E}\ ,\ H_{11}]$. Soit $\theta' = [\mathcal{U}\ ,\ \{e_{11}\}\ ,\ e_i\ ,\ f_\lambda]$, un complément de θ, e_{11} désignant l'élément neutre de H_{11}. Si

$$e_i = (i\ ,\ 1\ ,\ a_i^{-1})\ ,\qquad f_\lambda = (1\ ,\ \lambda\ ,\ b_\lambda^{-1})\ ,$$

on doit avoir d'après les conditions vérifiées par les e_i, f_λ :

$$f_\lambda\ e_i = \text{Cte}\ ,\qquad \forall\ (\lambda\ ,\ i) .$$

On peut supposer que cette constante est l'élément neutre de H_{11} . En explicitant le produit, on obtient :

$$\rho_{\lambda i} = b_\lambda . a_i \ .$$

Réciproquement, supposons que $\mathcal{C}(D)$ est complémenté, et qu'il existe des éléments a_i , b_λ dans G tels que $\rho_{\lambda i} = b_\lambda\, a_i$. Montrons que $\mathcal{C}(D)$ est complémenté. Soit $\theta = [\mathcal{P}\ , N\ , e_i\ , f_\lambda]$.

Si $\mathcal{P} = \mathcal{P}_I \times \mathcal{P}_\Lambda$, $\mathcal{P}_I$ équivalence de I , $\mathcal{P}_\Lambda$ équivalence de Λ ; soient $\mathcal{P}'_I$, $\mathcal{P}'_\Lambda$ des équivalences de I et Λ compléments de $\mathcal{P}_I$ et $\mathcal{P}_\Lambda$. Alors $\mathcal{P}' = \mathcal{P}'_I \times \mathcal{P}'_\Lambda$ est une équivalence complément de $\mathcal{P}$. Soit N' un complément de N, et posons

$$e'_i = (i\ , 1\ , a_i^{-1})\ , \qquad f'_\lambda = (1\ , \lambda\ , b_\lambda^{-1})\ .$$

On a

$$f'_\lambda\, e'_i = 1 \qquad \forall\ (\lambda\ , i)\ .$$

Il existe donc une congruence

$$\theta' = [\mathcal{P}'\ , N'\ , e'_i\ , f'_\lambda]\ .$$

Puisque $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' = \mathcal{E}$, chaque $H_{i\lambda}$ est saturé pour $\theta \wedge \theta'$. De plus, la restriction de $\theta \wedge \theta'$ à H_{11} est l'égalité, d'où

$$\theta \wedge \theta' = \varepsilon\ .$$

On a $\theta_{H_{11}} \vee \theta'_{H_{11}} = u_{H_{11}}$. Soit $x \in H_{i\lambda}$. On a

$$(i\ , \lambda) \equiv (1\ , 1)\ (\mathcal{P} \vee \mathcal{P}')\ .$$

Si $(i\ , \lambda) \equiv (j\ , \lambda)\ (\mathcal{P})$ par exemple, il existe u et v : $uH_{i\lambda}v = H_{j\mu}$ et alors $x \equiv uxv\ (\theta)$. Il existe donc $y \in H_{11}$ tel que $x \equiv y\ (\theta \vee \theta')$.

On obtient finalement

$$\theta \vee \theta' = u\ .$$

Montrons enfin que si $\rho_{\lambda i} = b_\lambda . a_i$, $\mathcal{M}(G\ , I\ , \Lambda\ , P)$ est isomorphe au produit direct de G et d'une bande rectangulaire $\mathcal{B}(I \times \Lambda)$ (ensemble $I \times \Lambda$ muni de la loi de composition $(i\ , \lambda).(j\ , \mu) = (i\ , \mu)$).

En effet, l'application :

$$(i\ , j\ , g) \in \mathcal{M}(G\ , I\ , \Lambda\ , P) \rightsquigarrow (a_i\, g\, b_\lambda\ , (i\ , \lambda)) \in G \times \mathcal{B}(I \times \Lambda)$$

est un isomorphisme. On obtient finalement :

THÉORÈME 3.3. - Soit D un demi-groupe complètement simple. $\mathcal{C}(D)$ est complémenté si et seulement si D est produit direct d'un groupe G tel que $\mathcal{C}(G)$ soit complémenté, et d'une bande rectangulaire.

4. Etude générale.

Définition. - On dit qu'un sous-demi-groupe S de D est un rétracté de D, s'il existe un endomorphisme idempotent f de D tel que $f(D) = S$.

I étant un idéal bilatère de D, soit θ_I la congruence :

$$x \equiv y\ (\theta_I) \iff x = y \quad \text{où } \{x , y\} \subseteq I .$$

PROPOSITION 4.1. - Soit D un demi-groupe tel que $\mathcal{C}(D)$ soit complémenté. Alors tout idéal bilatère non vide I de D est un rétracté de D et $\mathcal{C}(I)$ est complémenté.

(a) Soit θ' un complément de θ_I. Notons $\bar{x}$ la classe de $x \in D - I$ modulo θ', $\bar{x}$ coupe I, sinon $\bar{x}$ serait saturée pour θ_I et θ', donc pour $\theta_I \vee \theta' = u$. $\bar{x} \cap I$ est formé d'un seul élément, noté $f(x)$. Si $x \in I$, on pose $f(x) = x$. Pour tout couple u , v, $f(u).f(v) \in I \cap \overline{u.v}$, donc

$$f(uv) = f(u).f(v) .$$

I est donc rétracté de D. Remarquons que θ' est la congruence d'application de D sur I. On a aussi les relations :

$$f(uv) = f(u).v = u.f(v) \quad \text{puisque} \quad f(u).v \in I \wedge \overline{uv} .$$

(b) Soit $\varphi \in \mathcal{C}(I)$. Définissons $\theta \in \mathcal{C}(D)$ par

$$x \equiv y\ (\theta) \iff x = y , \text{ où } \{x , y\} \subseteq I \text{ et } x \equiv y\ (\rho) .$$

Vérifions la régularité de θ, à gauche par exemple. Si $x \neq y$, $x \equiv y\ (\theta)$, alors $\{x , y\} \subseteq I$, et pour tout z,

$$zx = f(z).x \equiv f(z).y = zy\ (\theta) .$$

Soient alors θ' un complément de θ dans $\mathcal{C}(D)$, et ρ' la restriction de θ' à I. On a évidemment $\theta \wedge \theta' = \varepsilon_I$. Soient $x , y \in I$. Il existe par exemple

$$a_0 = x ,\ a_1 , \dots , a_{2n} = y ,\ a_{2i} \equiv a_{2i+1}\ (\theta) ,\ a_{2i-1} \equiv a_{2i}\ (\theta') \text{ et } a_j \neq a_{j+1}$$

Soit $0 < j < 2n$. a_j est congru modulo θ, soit à a_{j+1}, soit à a_{j-1}, ce qui implique $a_j \in I$ puisqu'on a supposé $a_j \neq a_{j-1}$, $a_j \neq a_{j+1}$

On a donc

$$x \equiv y \ (\rho \vee \rho') , \qquad \text{d'où} \ \ \rho \vee \rho' = u_I .$$

PROPOSITION 4.2. - $\mathcal{C}(D)$ <u>est complémenté si et seulement si</u> D^2 <u>est un rétracté de</u> D <u>et</u> $\mathcal{C}(D^2)$ <u>est complémenté</u>.

Supposons D^2 rétracté de D , et $\mathcal{C}(D^2)$ complémenté. Soit $f : D \to D^2$. Soient $\theta \in \mathcal{C}(D)$, φ sa restriction à D^2 , φ' un complément de φ dans $\mathcal{C}(D^2)$. Notons $\{C_i\}_{i\in K}$ les classes modulo θ qui ne coupent pas D^2 , $a_i \in C_i$ un représentant de C_i .

$$A = \bigcup_{i\in K} \{a_i\} .$$

Définissons θ' :

$$x \equiv y \ (\theta') \iff \{x = y \ , \text{ où } \ \{xy\} \subseteq D^2 \cup A \ \text{ et } \ f(x) \equiv f(y) \ (\varphi')\}$$

θ' est manifestement une équivalence. Vérifions la régularité à gauche par exemple : si $x \neq y$, $x \equiv y \ (\theta')$, alors $\{xy\} \subseteq D^2 \cup A$, $f(x) \equiv f(y) \ (\varphi')$; zx et zy sont dans D^2 , et

$$f(zx) = z.f(x) \equiv z.f(y) = f(zy) \ (\varphi') .$$

Si $x \equiv y \ (\theta \wedge \theta')$, et $x \neq y$, on ne peut avoir $\{x , y\} \subseteq I$, car $\varphi \wedge \varphi' = \varepsilon_{D^2}$ Il existe donc $i \in K$ tel que, par exemple, $x = a_i$. Puisque $x \equiv y \ (\theta)$, on a aussi $y \in C_i$, donc $x = y$ d'après la définition de θ' , ce qui contredit l'hypothèse.

Pour montrer que $\theta \vee \theta' = u$, il suffit de montrer que, pour tout $x \in D - D^2$, il existe $y \in D^2$ tel que $x \equiv y \ (\theta \vee \theta')$, puisque $\varphi \vee \varphi' = u_{D^2}$. Or la classe de x modulo θ coupe I , ou bien contient un élément $a_i \in A$ et $a_i \equiv f(a_i) \ (\theta')$.

5. Demi-groupes unitaires.

THÉORÈME 5.1. - <u>Soit</u> D <u>un demi-groupe tel que</u> $\mathcal{C}(D)$ <u>soit complémenté, et soit</u> $\{I_\alpha\}_{\alpha\in E}$ <u>l'ensemble des idéaux bilatères non vides de</u> D .

1° <u>Si</u> D <u>est un idéal principal, alors tout</u> I_α <u>est principal, et</u> E <u>ordonné par</u> $\alpha \leqslant \beta \iff I_\beta \subseteq I_\alpha$ <u>est un ensemble bien ordonné</u>.

2° <u>Si</u> D <u>est unitaire, on a de plus</u> $\mathrm{ord}(E) \leqslant \mathrm{ord}(\underset{\sim}{N})$ ($\underset{\sim}{N}$ <u>ensemble des entiers</u> $\geqslant 0$).

1° Si D est principal, chaque I_α étant rétracté de D est principal. Pour tout α, l'ensemble des éléments de I_α qui engendrent chacun un idéal strictement contenu dans I_α forme un idéal I_α^*, et $I_\beta \subset I_\alpha$, $I_\beta \neq I_\alpha$ entraîne $I_\beta \subseteq I_\alpha^*$. Soient α et $\beta \in E$; si I_α et I_β étaient strictement contenus dans $I_\alpha \cup I_\beta$, on aurait

$$I_\alpha \subseteq (I_\alpha \cup I_\beta)^* , \qquad I_\beta \subseteq (I_\alpha \cup I_\beta)^*$$

d'où $I_\alpha \cup I_\beta \subseteq (I_\alpha \cup I_\beta)^*$ ce qui est absurde. On a donc par exemple $I_\alpha \subseteq I_\beta$. E est donc totalement ordonné, et tout élément $\alpha \in E$, possède un suivant α^+ : $I_{\alpha^+} = I_\alpha^*$, si α n'est pas le plus grand élément de E. E est alors bien ordonné, car c'est un $\wedge$-demi-treillis complet. Nous noterons o le plus petit élément de E : $I_o = D$.

2° Si D est unitaire, soit e_o son élément neutre. f_α étant un endomorphisme idempotent de D sur I_α, $f_\alpha(e_o) = e_\alpha$ est élément neutre de I_α, et f_α est définie par

$$f_\alpha(x) = x.e_\alpha = e_\alpha.x .$$

Les e_α ne sont autres que les idempotents centraux de D, et on a

$$\alpha \leqslant \beta \iff e_\alpha.e_\beta = e_\beta .$$

Soit $\mathcal{C}(E)$ le treillis des congruences de E, c'est-à-dire des équivalences convexes de E. A toute congruence $\theta \in \mathcal{C}(D)$, on peut associer $R_\theta \in \mathcal{C}(E)$:

$$\alpha \equiv \beta \ (R_\theta) \iff e_\alpha \equiv e_\beta \ (\theta)$$

(a) Nous allons montrer que l'application $\theta \leadsto R_\theta$ est un homomorphisme de $\mathcal{C}(D)$ sur $\mathcal{C}(E)$.

Pour tout $\alpha \in E$, notons D_α l'ensemble des éléments engendrant chacun l'idéal I_α, $D_\alpha = I_\alpha - I_{\alpha^+}$ si α n'est pas le dernier élément de D. Si $x \in D$, on notera $h(x)$ l'élément de E tel que $x \in D_{h(x)}$.

Soient θ et φ appartenant à $\mathcal{C}(D)$. Il est immédiat que $R_{\theta \wedge \varphi} = R_\theta \wedge R_\varphi$, $e_\alpha \equiv e_\beta \ (\theta \vee \varphi)$ équivaut à :

"il existe $x_o , \dots , x_n$ dans D, $x_o = e_\alpha$, $x_n = e_\beta$, $x_i \equiv x_{i+1}$ (θ ou φ) "

qui équivaut à

"il existe $\gamma_o , \dots , \gamma_n$ dans E, $\gamma_o = \alpha$, $\gamma_n = \beta$, $\gamma_i \equiv \gamma_{i+1}$ (R_θ ou R_φ) "

en vertu du lemme suivant :

LEMME 1. - <u>Soient</u> x <u>et</u> y <u>dans</u> D , $\theta \in \mathcal{C}(D)$, $x \equiv y \ (\theta)$. <u>Alors</u>

$$h(x) \equiv h(y) \ (R_\theta) .$$

Supposons $\alpha = h(x) \leqslant \beta = h(y)$. Il existe u et v tels que $uxv = e_\alpha$.

Soit $z = uyv$, $z \in I_\beta$ et $e_\alpha \equiv z \ (\theta)$. Il en résulte :

$$e_\beta = e_\alpha . e_\beta \equiv ze_\beta = z \ (\theta) \qquad \text{d'où} \quad e_\alpha \equiv e_\beta \ (\theta) .$$

On a finalement

$$R_\theta \vee R_\varphi = R_{\theta\vee\varphi} .$$

Soit $R \in \mathcal{C}(E)$. Définissons θ :

$$x \ \theta \ y \iff \{h(x) \equiv h(y) \ (R) \ \text{ et } \ \exists \ \alpha \in E , \ \alpha \equiv h(x) \ (R) , \ e_\alpha x = e_\alpha y\} .$$

θ est réflexive et symétrique. Montrons que θ est transitive. Soient x , y , z , $x \ \theta \ y$, $y \ \theta \ z$. On a

$$h(x) \equiv h(z) \ (R) ,$$

et si $\alpha \equiv h(x) \ (R)$, $\beta \equiv h(y) \ (R)$ vérifient

$$e_\alpha x = e_\alpha y , \quad e_\beta y = e_\beta z ,$$

soit $\gamma = \sup(\alpha , \beta)$. On a

$$\gamma \equiv h(x) \ (R) , \text{ et } \ e_\gamma x = e_\gamma y = e_\gamma z ,$$

d'où $x \equiv z \ (\theta)$.

Montrons que θ est régulière à droite par exemple.

Soient x , y , z , $x \equiv y \ (\theta)$ et $e_\alpha x = e_\alpha y$ avec $\alpha \equiv h(x) \ (R)$.

Si $h(xz)$ et $h(yz)$ sont congrus modulo R à $h(x)$, on aura $xz \equiv yz \ (\theta)$, car $e_\alpha xz = e_\alpha yz$.

Sinon, on a par exemple $h(xz) \not\equiv h(x) \ (R)$, d'où $h(xz) > \alpha$.

Alors $xz = e_\alpha xz = e_\alpha yz$. Or, pour tout $u \in D$,

$$h(u.e_\alpha) = \sup(h(u) , \alpha) .$$

On a donc $h(yz) > \alpha$, et

$$e_\alpha yz = yz = xz .$$

θ est donc une congruence de D , et $R_\theta = R$. $\mathcal{C}(E)$ étant image homomorphe de $\mathcal{C}(D)$ est donc complémenté.

(b) Nous allons voir que cela entraîne : $\mathrm{ord}(E) \leqslant \mathrm{ord}(\underset{\sim}{N})$.

LEMME 2. - <u>Soit</u> (E) <u>un ensemble bien ordonné,</u> $\mathcal{C}(E)$ <u>le treillis des congruences de</u> E . $\mathcal{C}(E)$ <u>est complémenté si et seulement si</u> $\mathrm{ord}(E) \leqslant \mathrm{ord}(\underset{\sim}{N})$.

Supposons $\mathrm{ord}(E) > \mathrm{ord}(\underset{\sim}{N})$. E contient alors un segment isomorphe à $\underset{\sim}{N}$, que l'on identifiera à $\underset{\sim}{N}$, et un élément μ plus petit majorant de $\underset{\sim}{N}$. $E = \underset{\sim}{N} \cup [\mu \rightarrow [$. Soit R l'équivalence convexe de E définie par :

$$\alpha \equiv \beta\ (R) \iff (\{\alpha , \beta\} \subseteq [\mu \rightarrow [\text{ ou } \exists\ n \in \underset{\sim}{N} \text{ tel que } \{\alpha , \beta\} \subseteq \{2n , 2n + 1\}) .$$

Soit R' une congruence de E vérifiant $R \vee R' = U$ (congruence universelle). $[\mu \rightarrow [$ étant saturé pour R ne l'est pas pour R' ; il existe donc $q \in \underset{\sim}{N}$, $q \equiv \mu\ (R')$. Alors soit n vérifiant $q \leqslant 2n$. On a $2n \equiv 2n + 1\ (R \wedge R')$. R ne possède donc pas de complément dans $\mathcal{C}(E)$.

Supposons $\mathrm{ord}(E) \leqslant \mathrm{ord}(\underset{\sim}{N})$. E est alors un segment de $\underset{\sim}{N}$ (soit $\underset{\sim}{N}$, soit $[o , k] \subseteq \underset{\sim}{N}$). Toute congruence $R \in \mathcal{C}(E)$ admet un complément (unique) R' :

$$p \leqslant q , \quad p \equiv q\ (R') \iff (\forall\ m , n \in [p , q] , \ m \equiv n\ (R) \implies m = n) .$$

Afin de décrire la structure de D , nous allons donner un mode de construction de demi-groupes.

<u>Définitions</u>. - On appelle demi-groupe partiel un ensemble E , muni d'une loi de composition non nécessairement partout définie, tel que si l'un des produits $x.(y.z)$, $(x.y).z$ est défini, l'autre l'est aussi et lui est égal. Un homomorphisme de E dans E' sera une application f de E dans E' telle que si $x.y$ est défini dans E alors $f(x).f(y)$ est défini dans E' et égal à $f(x.y)$.

Soit E un $\vee$-demi-treillis, $\{D_\alpha , f_{\beta\alpha}\}_{\alpha \in E}$ un système inductif de demi-groupes partiels. ($f_{\beta\alpha}$ homomorphisme de D_α dans D_β , $\alpha \leqslant \beta$). On suppose que pour tout α , et tout couple x , y d'éléments de D_α , il existe un plus petit élément $\beta \geqslant \alpha$ dans E , tel que $f_{\beta\alpha}(x).f_{\beta\alpha}(y)$ soit défini dans D_β . Cela permet de définir le produit $x.y$ dans $D = \bigcup_\alpha D_\alpha$:

$$x.y = f_{\beta\alpha}(x).f_{\beta\alpha}(y) \quad \text{si } x \text{ et } y \in D_\alpha .$$

Si $x \in D_\mu$, $y \in D_\nu$, posant $\alpha = \mu \vee \nu$, on définit

$$x.y = f_{\alpha\mu}(x).f_{\alpha\nu}(y) .$$

On vérifie aisément que la loi ainsi définie est associative.

On dira que le demi-groupe ainsi obtenu est la réunion du système inductif $\{D_\alpha , f_{\beta\alpha}\}_{\alpha \in E}$. On notera $\mathcal{D} = \varinjlim(D_\alpha)$, et f l'application $D \rightarrow \mathcal{D}$. Pour tout

$x \in D$, on notera $h(x)$ l'élément de E vérifiant $x \in D_{h(x)}$.

Le théorème 5.1 se traduit alors par :

PROPOSITION 5.1. - Soit D un demi-groupe unitaire tel que $\mathcal{C}(D)$ soit complémenté. Alors D est la réunion d'un système inductif $\{D_n , f_{pn}\}_{n \in E}$ de demi-groupes partiels unitaires simples, et E est un segment de $\underset{\sim}{N}$.

f_{pn} est définie par $f_{pn}(x) = e_p.x = x.e_p$, $x \in D_n$, $p \geqslant n$. Pour tout n , D_n est unitaire et simple, car $I_n/I_{n+1} = D_n \cup \{o\}$ est o-simple. $\mathcal{D} = \varinjlim(D_n)$ n'est autre que D/ρ où ρ est définie par :

$$x \equiv y \ (\rho) \iff \exists \ n \in E , \ e_n.x = e_n.y .$$

A toute congruence $\theta \in \mathcal{C}(D)$, on peut associer la relation Θ définie sur $\mathcal{D}$ par :

$$X \Theta Y \iff \exists \ x \in X , \ \exists \ y \in Y , \ x \equiv y \ (\theta) .$$

Θ est évidemment réflexive et symétrique. Vérifions la transitivité. Soient $X \Theta Y$, $Y \Theta Z$. Il existe donc

$$x \in X , \ y_1 \in Y , \ y_2 \in Y , \ z \in Z , \ x \equiv y_1 \ (\theta) , \ y_2 \equiv z \ (\theta) .$$

Puisque $y_1 \equiv y_2 \ (\rho)$, il existe

$$n \in E , \ e_n y_1 = e_n y_2 = y' .$$

Posant $x' = e_n x$, $z' = e_n z$, on a

$$x' \in X , \ y' \in Y , \ z' \in Z \text{ et } x' \equiv y' \equiv z' \ (\theta) ,$$

d'où $X \Theta Z$. Θ est régulière, puisque ρ et θ le sont. Notons F l'application de $\mathcal{C}(D)$ dans $\mathcal{C}(\mathcal{D})$ ainsi définie. Nous allons voir que F est un homomorphisme surjectif. F est évidemment croissante. On a donc

$$F(\theta \wedge \varphi) \leqslant F(\theta) \wedge F(\varphi) .$$

Soient $X \equiv Y$, $F(\theta) \wedge F(\varphi)$. Il existe x_1 , x_2 dans X , y_1 , y_2 dans Y avec

$$x_1 \equiv y_1 \ (\theta) , \ x_2 \equiv y_2 \ (\varphi) .$$

Il existe n et p tels que $e_n x_1 = e_n x_2 = x$, $e_p y_1 = e_p y_2 = y$. Soit $q = \sup(n , p)$. Alors

$$e_q x \in X , \ e_q y \in Y \text{ et } e_q x \equiv e_q y \ (\theta \wedge \varphi) , \text{ d'où } X \equiv Y \ (F(\theta \wedge \varphi)) ,$$

soit finalement

$$F(\theta \wedge \varphi) = F(\theta) \wedge F(\varphi) .$$

F étant croissante $F(\theta) \vee (F(\varphi)) \leqslant F(\theta \vee \varphi)$. Si $X \equiv Y\ (F(\theta \vee \varphi))$, il existe

$$a_o \in X ,\quad a_1 , \ldots , a_{n-1} , a_n \in Y , \text{ avec } a_i \equiv a_{i+1}\ (\theta \text{ ou } \varphi) .$$

Si $A_i = f(a_i)$, on a

$$A_i \equiv A_{i+1}(F(\theta) \text{ ou } F(\varphi)) ,$$

d'où

$$X \equiv Y(F(\theta) \vee F(\varphi)) \text{ et } F(\theta \vee \varphi) = F(\theta) \vee F(\varphi) .$$

Montrons enfin que F est surjective. Soit $\Theta \in \mathcal{C}(\mathbb{D})$, θ son image réciproque :

$$x \equiv y\ (\theta) \iff f(x) \equiv f(y)\ (\Theta) .$$

On a $F(\theta) = \Theta$. On obtient finalement :

PROPOSITION 5.2. - Les hypothèses étant celles de la proposition 5.1 $\mathcal{C}(\mathbb{D})$ est complémenté.

Nous allons donner une condition supplémentaire pour que $\mathcal{C}(D)$ soit complémenté, portant sur les homomorphismes $f_{p,n}$.

La congruence ρ définie plus haut admet un complément ρ'. Soit φ la congruence définie par :

$$x \equiv y\ (\varphi) \iff h(uxv) = h(uyv) ,\quad \forall\ u , v .$$

Si $x \equiv y\ (\rho')$, alors $uxv \equiv uyv\ (\rho')$ et d'après le lemme 1 :

$$h(uxv) \equiv h(uyv)\ (R_{\rho'}) .$$

Or R_ρ étant la congruence universelle, $R_{\rho'}$ est l'égalité, puisque c'est un complément de R_ρ. On a donc $\rho' \leqslant \varphi$, d'où $\rho \vee \varphi = u$.

Soient $x \neq y$, $x \equiv y\ (\rho)$, n le plus petit entier tel que $e_{n+1}\, x = e_{n+1}\, y$. Considérons la congruence ψ :

$$a \equiv b\ (\psi) \iff \{uav \in I_{n+1} \iff ubv \in I_{n+1}\}$$

(ψ est la plus grande congruence admettant I_{n+1} pour classe). On a $\varphi \leqslant \psi$. Soit ψ' un complément de ψ. $e_n \equiv e_{n+1}\ (\psi')$ puisque $e_n \not\equiv e_{n+1}\ (\psi)$. On a donc

$$e_n\, x \equiv e_n\, y\ (\psi') ,$$

donc

$$e_n\, x \not\equiv e_n\, y\ (\psi)$$

puisque $e_n x \neq e_n y$. Il en résulte

$$e_n x \not\equiv e_n y \ (\varphi) \quad \text{et} \quad x \not\equiv y \ (\varphi) \ .$$

φ est donc un complément de ρ . Nous allons voir que cette propriété entraîne les conditions suivantes :

(A) Pour tout $n \in E$, $\forall \ x , y \in D_n$ si $f_{n+1,n}(x) = f_{n+1,n}(y)$, il existe u et v dans D_n tel que l'un et l'un seulement des produits uxv , uyv soit défini dans D_n .

(B) Pour tout couple x , y d'éléments de D , il existe n tel que

$$h(ue_n xv) = h(ue_n yv) \quad \text{pour tout} \ u \ \text{et tout} \ v \ .$$

(A) a été vue en cours de démonstration ($x \not\equiv y \ (\psi)$).

Soient x , y tels que $X \neq Y$ (Sinon (B) est trivialement vérifiée par n , $e_n x = e_n y$). Puisque $x \equiv y \ (\rho \vee \varphi)$, il existe

$$a_0 = x \ , \ a_1 \ , \ \dots \ , \ a_p = y \ , \ a_i \equiv a_{i+1} \ (\rho \ \text{ou} \ \varphi) \ .$$

Si $a_i \equiv a_{i+1} \ (\rho)$, il existe n_i ,

$$e_{n_i} a_i = e_{n_i} a_{i+1} \ .$$

Soit n le plus grand de ces n_i . On a alors

$$e_n x \equiv e_n y \ (\varphi) \ .$$

ce qui démontre (B).

Nous avons donc démontré que les conditions du théorème suivant sont nécessaires.

THÉORÈME 5.2. - Soit D un demi-groupe unitaire.

$\mathcal{C}(D)$ est complémenté si et seulement si :

1° D est la réunion d'un système inductif $\{D_n , f_{p,n}\}_{n\in E}$ de demi-groupes partiels unitaires simples, et E est un segment de $\underset{\sim}{N}$;

2° $\mathcal{C}(\mathcal{D})$ est complémenté ($\mathcal{D} = \varinjlim(D_n)$);

3° Les conditions (A) et (B) sont vérifiées.

Pour montrer que ces conditions sont suffisantes nous allons nous placer dans un cas plus général. D ne sera pas supposé unitaire, mais on supposera que tout $x \in D$ est contenu dans un idéal unitaire, ce qui équivaut à l'existence, pour tout

$x \in D$, d'un idempotent e central, tel que $ex = xe = x$. Nous allons démontrer le théorème suivant :

THEOREME 5.3. - Soit D un demi-groupe tel que, pour tout $x \in D$, il existe un idempotent e appartenant au centre de D , tel que $ex = xe = x$.

$\mathcal{C}(D)$ est complémenté si et seulement si :

1° D est la réunion d'un système inductif $\{D_\alpha , f_{\beta\alpha}\}_{\alpha \in E}$ de demi-groupes partiels simples unitaires, où E est un $\vee$-demi-treillis tel que la section finissante de chaque élément de E soit un segment de $\underset{\sim}{\mathbb{N}}$;

2° $\mathcal{C}(\mathcal{D})$ est complémenté ($\mathcal{D} = \varinjlim D_\alpha$) ;

3° Les conditions (A) et (B) sont vérifiées.

(a) Montrons que ces conditions sont nécessaires. Notons $\{D_\alpha\}_{\alpha \in E}$ l'ensemble des $\mathcal{J}$-classes de Green de D (deux éléments sont dans la même classe s'ils engendrent le même idéal principal), et pour tout α , I_α l'idéal engendré par un élément de D_α . Soient $x \in D_\alpha$, e idempotent central, vérifiant $ex = xe = x$.

L'idéal I engendré par e étant unitaire, I_α est donc unitaire, puisque $I_\alpha \subseteq I$ et $\mathcal{C}(I)$ est complémenté. Son élément neutre e_α est un idempotent central de I , et aussi de D . Donc chaque D_α est un demi-groupe partiel unitaire et simple. On peut appliquer à I_α les conditions du théorème 5.2. Les homomorphismes $f_{\beta\alpha}$ étant définies comme précédemment par :

$$x \in D_\alpha \rightsquigarrow f_{\beta\alpha}(x) = e_\beta \, x \in D_\beta ,$$

D est la réunion du système inductif $\{D_\alpha , f_{\beta\alpha}\}$. De plus, d'après le théorème 5.2, pour tout α , l'ensemble des β , $\beta \geqslant \alpha$, est un segment de $\underset{\sim}{\mathbb{N}}$. De même $\mathcal{C}(\mathcal{D})$ est complémenté , car

$$\mathcal{D} = \varinjlim_{\beta \geqslant \alpha} (D_\beta) .$$

Les conditions (A) et (B) sont vérifiées, car elles le sont dans chaque I_α .

(b) Montrons que les conditions sont suffisantes.

1° Nous allons voir d'abord que les conditions imposées à E entraînent que $\mathcal{C}(E)$ est complémenté. Soit $R \in \mathcal{C}(E)$. Définissons R' par :

$$\alpha \equiv \beta \ (R') \iff (\forall \ \gamma , \delta \in [\alpha , \alpha \vee \beta] \cup [\beta , \alpha \vee \beta] , \ \delta \equiv \gamma \ (R) \implies \delta = \gamma) .$$

R' est évidemment réflexive et symétrique. Vérifions la transitivité. Soient

$$\alpha \equiv \beta \ (R') \ , \quad \beta \equiv \gamma \ (R') \ ,$$

et considérons η et μ dans

$$[\alpha \ , \alpha \vee \gamma] \cup [\gamma \ , \alpha \vee \gamma] \ , \qquad \eta \equiv \mu \ (R) \ .$$

Si $\eta \in [\alpha \ , \alpha \vee \gamma]$, $\mu \in [\gamma \ , \alpha \vee \gamma]$, alors

$$\eta \vee \mu = \alpha \vee \gamma \equiv \eta \ (R) \ .$$

On peut donc supposer que η et μ sont dans $[\alpha \ , \alpha \vee \gamma]$. Distinguons trois cas, puisque η , μ , $\alpha \vee \beta$ sont comparables.

- Si η et μ sont inférieurs à $\alpha \vee \beta$, $\alpha \equiv \beta \ (R')$ entraîne $\eta = \mu$,
- Si $\beta \vee \alpha < \mu \leqslant \eta$, on a alors $\beta \vee \gamma = \alpha \vee \gamma$. En effet, on a déjà $\alpha \vee \gamma \geqslant \beta \vee \gamma$ puisque $\alpha \vee \gamma \geqslant \mu > \alpha \vee \beta \geqslant \beta$; $\beta \vee \gamma$ et $\alpha \vee \beta$ sont comparables, et on ne peut avoir $\beta \vee \gamma \leqslant \alpha \vee \beta$, car alors $\alpha \vee \beta = \alpha \vee \gamma$ qui contredit $\alpha \vee \gamma > \alpha \vee \beta$. On a donc

$$\beta \vee \gamma > \alpha \vee \beta \ ,$$

d'où

$$\beta \vee \gamma = \alpha \vee \gamma \ .$$

Il en résulte que η et μ sont dans $[\beta \ , \beta \vee \gamma]$ et $\eta = \mu$.
- Si $\eta \leqslant \alpha \vee \beta \leqslant \mu$, on a $\eta \equiv \alpha \vee \beta \ (R)$ et $\alpha \vee \beta \equiv \mu \ (R)$, d'où $\eta = \mu = \alpha \vee \beta$.

R' est donc une équivalence. Montrons qu'elle est $\vee$-compatible. Soient $\alpha \equiv \beta \ (R')$, $\gamma \in E$.

Si $\alpha \vee \beta < \alpha \vee \gamma$, on a vu précédemment qu'alors $\alpha \vee \gamma = \beta \vee \gamma$.

Si $\alpha \vee \beta = \alpha \vee \gamma$, on a $\beta \leqslant \beta \vee \gamma \leqslant \alpha \vee \gamma$, et deux éléments distincts de $[\beta \vee \gamma \ , \alpha \vee \gamma]$ ne peuvent être congrus modulo R .

Si $\alpha \vee \beta > \alpha \vee \gamma$, alors $\beta \vee \gamma = \alpha \vee \beta$, et on conclut comme précédemment. On a donc finalement

$$\alpha \vee \gamma \equiv \beta \vee \gamma \ (R') \ .$$

On a évidemment $R \wedge R' = \mathcal{E}$, et si $\alpha < \beta$, il existe une chaîne maximale

$$\alpha_0 = \alpha < \alpha_1 < \ldots < \alpha_n = \beta$$

et, pour tout i , $\alpha_i \equiv \alpha_{i+1} \ (R)$ ou $\alpha_i \not\equiv \alpha_{i+1} \ (R)$, c'est-à-dire $\alpha_i \equiv \alpha_{i+1} \ (R')$. On a donc

$$\alpha \equiv \beta \ (R \vee R') \ .$$

$\mathcal{C}(E)$ est donc complémenté.

2° Notons $I_\alpha = \bigcup_{\beta \geqslant \alpha} D_\beta$. I_α est un idéal de D, et D_α étant simple est l'ensemble des éléments engendrant I_α. Soit $\theta \in \mathcal{C}(D)$; si $x_\alpha \in D_\alpha$,

$$x_\beta \in D_\beta \,, \quad x_\alpha \equiv x_\beta \ (\theta) \,, \text{ alors } \quad e_\alpha \equiv e_\beta \ (\theta) \,.$$

Pour cela, il suffit de montrer que $e_\alpha \equiv e_\gamma\ (\theta)$ où $\alpha \vee \beta = \gamma$. En effet, soient u et v dans D_α tels que $ux_\alpha v = e_\alpha$. $z = ux_\beta v$ est élément de I_γ, et $z \equiv e_\alpha\ (\theta)$, d'où

$$z = e_\gamma z \equiv e_\gamma e_\alpha = e_\gamma \ (\theta) \,, \text{ et } \quad e_\alpha \equiv e_\gamma \ (\theta) \,.$$

R, définie dans E par $\alpha \equiv \beta\ (R) \iff e_\alpha \equiv e_\beta\ (\theta)$, est une congruence de E. Soit Θ la congruence de $\mathcal{D}$ associée à θ :

$$X \equiv Y\ (\Theta) \iff (\exists\ x \in X\,,\ \exists\ y \in Y\,,\ x \equiv y\ (\theta)) \,.$$

Soient R', Θ' des compléments de R et Θ respectivement dans $\mathcal{C}(E)$ et $\mathcal{C}(\mathcal{D})$. Définissons θ' par :

$$x \equiv y\ (\theta') \iff f(x) \equiv f(y)\ (\Theta') \text{ et } h(uxv) \equiv h(uyv)\ (R') \,,\ \forall\ u\,, v \,.$$

θ' est une congruence de D. Vérifions que θ' est un complément de θ. Soient $x \equiv y\ (\theta \wedge \theta')$. On a donc $f(x) = f(y)$, et $h(x) = h(y) = \alpha$.

On peut supposer que si α^+ est le suivant de α,

$$e_{\alpha^+} x = e_{\alpha^+} y \,.$$

Si $x \neq y$, la condition (A) implique qu'il existe u et v avec $h(uxv) = \alpha$, $h(uyv) > \alpha$ par exemple, ce qui est impossible car $x \equiv y\ (\theta \wedge \theta')$ entraîne $h(uxv) \equiv h(uyv)$ $(R \wedge R' = \mathcal{E})$. On a donc

$$\theta \wedge \theta' = \varepsilon \,.$$

Soient x et y dans D. Si $X = f(x)$, $Y = f(y)$, on a

$$X \equiv Y\ (\Theta \vee \Theta') \,.$$

Il existe donc

$$A_0 = X\,,\ A_1\,, \ldots\,, A_n = Y \text{ dans } \mathcal{D}\,,\ A_i \equiv A_{i+1}\ (\Theta \text{ ou } \Theta')\,,\ A_i \neq A_{i+1} \,.$$

Si $A_i \equiv A_{i+1}\ (\Theta)$, il existe $a_i \in A_i$, b_{i+1} (A_{i+1}), $a_i \equiv b_{i+1}\ (\theta)$.

Si $A_i \equiv A_{i+1}\ (\Theta')$, d'après la condition (B), il existe $a_i \in A_i$, $b_{i+1} \in A_{i+1}$ tels que $h(ua_i v) = h(ub_{i+1} v)$, $\forall\ u, v$, et donc

$$a_i \equiv b_{i+1}\ (\theta') \,.$$

Pour tout i, soit $\nu_i \in E$ tel que $e_{\nu_i} a_i = e_{\nu_i} b_i$ (en posant $b_0 = x$, $a_n = y$)

et soit $\nu = \sup(\nu_i)$. Les éléments

$$x' = e_\nu x = e_\nu a_0 , \quad e_\nu a_1 , \ldots , e_\nu y = e_\nu b_n = y'$$

vérifient $e_\nu a_i \equiv e_\nu a_{i+1}$ (θ ou θ') . On a donc

$$x' \equiv y' \ (\theta \vee \theta') .$$

De plus

$$h(x) \equiv \nu \ (R \vee R') \quad \text{implique} \quad e_{h(x)} \equiv e_\nu \ (\theta \vee \theta')$$

d'où

$$x = x.e_{h(x)} \equiv xe_\nu = x' \ (\theta \vee \theta') ,$$

et de même

$$y \equiv y' \ (\theta \vee \theta') , \text{ d'où } x \equiv y \ (\theta \vee \theta') .$$

θ' est donc un complément de θ dans $\mathcal{C}(D)$.

Remarques.

1° Si D est un demi-groupe quelconque, F l'ensemble des idempotents centraux de D , alors

$$S = \bigcup_{e \in F} D.e$$

vérifie les hypothèses du théorème 5.3. Si $\mathcal{C}(D)$ est complémenté, S aura la structure indiquée dans le théorème.

2° Si D a un zéro, sous les hypothèses du théorème 5.3, alors $\mathcal{Q} = \{0\}$.

6. Demi-groupes abéliens.

Soit D un demi-groupe abélien tel que $\mathcal{C}(D)$ soit complémenté.

La structure de $S = \bigcup_{e_\alpha \in F} D.e_\alpha$ (F , ensemble des idempotents) est donnée par le théorème 5.3. Les ensembles D_α sont ici des groupes, car

$$I_\alpha | I_\alpha^+ = D_\alpha \cup \{0\}$$

est un demi-groupe abélien simple, unitaire, donc un groupe avec zéro. La condition (A) implique que les $f_{n,p}$ sont injectives. La condition (B) est ici trivialement vérifiée. $\mathcal{Q} = \varinjlim D_\alpha$ est un groupe semi-simple, ce qui est équivalent à ce que chacun des D_α soit semi-simple.

Soit $a \in D - S$, et soit I l'idéal principal engendré par a . Utilisant le théorème 5.1, soit I_1 l'idéal maximal contenu dans I , a_1 un générateur.

$I|I_1$ est un demi-groupe abélien avec 0, n'admettant pas d'idéal propre. C'est donc un demi-groupe trivial à deux éléments, sinon $I|I_1$ serait un groupe avec zéro et a appartiendrait à S. On a donc $I - I_1 = \{a\}$, et $a^2 \in I_1$. Si $a_1 \notin S$, l'idéal maximal I_2 de I_1 est $I_2 = I_1 - \{a_1\}$. Puisque $a_1 \in I$, $a_1 = a.d$, $d \in D$. Cn peut supposer que $d \in I$, car si f est un homomorphisme de D sur I :

$$a.d = f(a.d) = a.f(d) .$$

On a donc

$$a_1 = a^2.d'$$

qui montre que $a_1 \in Da^2$, d'où $a_1 = a^2$ puisque a_1 est le seul générateur de I_1. Soit alors φ un homomorphisme de I sur I_1. On a

$$\varphi(a) = a_1 = a^2 \text{ , d'où } \varphi(a^2) = a^2 = \varphi(a)^2 = a^4$$

qui contredit l'hypothèse $a_1 \notin S$. Donc pour tout $a \in D$, $a^2 \in S$.

Soient a et b dans $D - S$, I et J les idéaux principaux engendrés par a et b ; $a.b \in I \cap J$. Si $I = J$, a et b engendrent le même idéal principal, d'où $a = b$, et $a.b = a^2 \in S$. Si par exemple

$$I \cap J \subset I , \quad I \cap J \neq I ,$$

alors $I \cap J \subseteq I_1 \subseteq S$, d'où $a.b \in S$. Finalement : $D^2 = S$.

En utilisant la proposition 4.2, on obtient finalement :

THÉORÈME 6.1. - <u>Soit</u> D <u>un demi-groupe abélien</u>.

(D) <u>est complémenté si et seulement si</u> :

1° D^2 <u>est rétracté de</u> D ;

2° D^2 <u>est la réunion d'un système inductif</u> $\{D_\alpha , f_{\beta\alpha}\}_{\alpha \in E}$ <u>de groupes abéliens semi-simples ;</u> E <u>est un</u> $\vee$<u>-demi-treillis tel que la section finissante de tout élément est un segment de</u> $\mathbb{N}$; <u>les</u> $f_{\beta\alpha}$ <u>sont injectifs</u>.

BIBLIOGRAPHIE

[1] EGO (Michel). - Structure des demi-groupes dont le treillis des sous-demi-groupes satisfait à certaines conditions, Bull. Soc. math. France, t. 91, 1963, p. 137-201 (Thèse Sc. math. Paris, 1963).

[2] GLUSKIN (L. M.). - Prostye polugruppy s nulem, Doklady Akad. Nauk. SSSR, N. S., t. 103, 1955, p. 5-8.

[3] GRAPPY (Jacques). - Sur les demi-groupes admettant un certain type de treillis de congruences, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 256, 1963, p. 2980-2982.

[4] HASHIMOTO (Junji). - Direct, subdirect decompositions and congruence relations, Osaka math. J., t. 9, 1957, p. 87-112.

[5] PRESTON (G. B.). - Congruences on completely 0-simple semigroups, Proc. London math. Soc., Series 3, t. 11, 1961, p. 557-576.

[6] SUZUKI (Michio). - Structure of a group and the structure of its lattice of subgroups. - Berlin, Springer-Verlag, 1956 (Ergebnisse der Mathematik, Neue Folge, 10, Reihen : Gruppentheorie).