

# SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

JEAN-PIERRE KAHANE

## Sur la répartition de $\{\lambda_j u\}$ modulo 1

*Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres*, tome 17, n° 2 (1963-1964), exp. n° 20, p. 1-4

[http://www.numdam.org/item?id=SD\\_1963-1964\\_\\_17\\_2\\_A7\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SD_1963-1964__17_2_A7_0)

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1963-1964, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

SUR LA RÉPARTITION DE  $\{\lambda_j u\}$  MODULO 1

par Jean-Pierre KAHANE

Un bon aperçu du sujet, avec références bibliographiques, se trouve dans l'article de J. CIGLER et G. HELMBERG [1]. Les recherches nouvelles, dont il sera question ici, sont dues à R. SALEM, H. HEILSON et J.-P. KAHANE ([3], [4]).

Rappelons qu'une suite  $\{\mu_j\}$  réelle ( $j = 1, 2, \dots$ ) est dite répartie modulo 1 suivant la mesure  $d\nu$  si, pour toute fonction  $\varphi \in \mathbb{C}$ , à l'exception éventuellement d'un dénombrable (lorsque  $d\nu$  n'est pas continue),

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (\mu_j) = \int \varphi d\nu .$$

$\mathbb{C}$  désigne une classe de fonctions périodiques et de période 1 (nous dirons désormais fonctions définies sur le cercle) qui est, arbitrairement,

- a. Celle des fonctions caractéristiques d'intervalles ouverts.
- b. Celle des fonctions continues,
- c. Celle des exponentielles imaginaires  $\varphi_m(t) = e^{2\pi i m t}$ .

La définition la plus naturelle correspond à (a) ; celle qui correspond à (c) est très maniable ; leur équivalence, dans le cas où  $d\nu$  est la mesure de Lebesgue sur le cercle (on dit alors que  $\{\mu_j\}$  est "équirépartie") constitue le célèbre critère de H. Weyl (1916).

I. - Convenons de dire que le nombre positif  $u$  est normal par rapport à la suite  $\{\lambda_j\}$  réelle  $\nearrow \infty$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) lorsque  $\{\lambda_j u\}$  est équirépartie modulo 1. Un théorème de H. Weyl (1916) affirme que, lorsque  $\{\lambda_j\}$  est une suite strictement croissante d'entiers, presque tout  $u > 0$  est normal. En d'autres termes, l'ensemble  $W(\{\lambda_j\})$  des  $u$  non-normaux est de mesure lebesgienne nulle.

Indiquons quelques directions dans lesquelles il est possible d'améliorer ce résultat.

1° Si  $\lambda_j = j^\sigma$ ,  $0 < \sigma < 1$ ,  $W(\{\lambda_j\}) = \emptyset$  (FEJER).

2° Si  $\lambda_j = P(j)$ ,  $P$  étant un polynôme ayant deux coefficients incommensurables,  $W(\{\lambda_j\}) = \emptyset$  (H. WEYL).

3° Si  $\lambda_j = O(j^r)$  ( $r \geq 1$ ), la dimension de Hausdorff de  $W(\{\lambda_j\})$  est  $\leq 1 - 1/r$  (SALEM).

4° Si  $\lambda_j = O(j)$ , on peut améliorer ce résultat. Cependant, il existe des  $\{\lambda_j\}$  satisfaisant cette condition tels que  $W(\{\lambda_j\})$  ne soit pas dénombrable (ERDÖS-TAYLOR).

5° Si  $\lambda_{j+1} - \lambda_j \geq \delta_j > 0$ ,  $\delta_j$  étant une suite positive décroissante telle que  $\sum (j^3 \delta_j)^{-1/2} < \infty$  (par exemple  $\delta_j = \frac{\log^{2+\varepsilon} j}{j}$ ),  $W(\{\lambda_j\})$  est de mesure lebesgienne nulle. Il ne suffit pas, pour avoir ce résultat, que  $\delta_j \geq 1/j$ , comme le montre l'exemple  $\lambda_j = \log j$ , pour lequel  $W(\{\lambda_j\}) = ]0, \infty[$ .

II. - Convenons maintenant de dire que  $u$  est anormal par rapport à la suite  $\{\lambda_j\}$  lorsque  $\{\lambda_j u\}$  s'écarte de l'équirépartition dans le sens suivant : Il existe un ouvert dans le cercle, dont on notera  $\varphi$  la fonction caractéristique, tel que

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_1^N \varphi(\lambda_j u) < \int \varphi(t) dt$$

ou

$$\underline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_1^N \varphi(\lambda_j u) > \int \varphi(t) dt .$$

On notera alors  $u \in A(\{\lambda_j\})$ . On voit que, si  $\{\lambda_j u\}$  admet une répartition, mais n'est pas équirépartie,  $u$  est anormal.

Si l'on fixe une suite  $\Lambda$  d'entiers  $> 0$ , on peut aussi définir  $A_\Lambda(\{\lambda_j\})$  en remplaçant, dans la définition,  $\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty}$  (resp.  $\underline{\lim}_{N \rightarrow \infty}$ ) par  $\overline{\lim}_{N \in \Lambda, N \rightarrow \infty}$  (resp.  $\underline{\lim}_{N \in \Lambda, N \rightarrow \infty}$ ). On voit alors que, pour tout  $u \in W(\{\lambda_j\})$ , il existe une suite  $\Lambda$  telle que  $W(\{\lambda_j\}) \subset A_\Lambda(\{\lambda_j\})$ . Ainsi  $W(\{\lambda_j\})$  est contenu dans la réunion (non dénombrable !) des  $A_\Lambda(\{\lambda_j\})$ .

Indiquons deux résultats sur les nombres anormaux, en nous restreignant au cas de  $\lambda_j$  entiers.

1°  $A_\Lambda(\{\lambda_j\})$  est de mesure nulle par rapport à toute mesure dont les coefficients de Fourier tendent vers zéro à l'infini (KAHANE-SALEM, [3]). Problème : Est-ce vrai pour  $W(\{\lambda_j\})$  ?

2° Si  $\lambda_j = O(j)$ , ou plus généralement s'il existe des segments de longueurs arbitrairement grandes sur lesquels la densité (= nombre de points  $\lambda_j$  divisé par

la longueur de l'intervalle) soit bornée inférieurement par un nombre  $> 0$ , et dont la réunion contient tous les  $\lambda_j$ ,  $A_\Lambda(\{\lambda_j\})$  est dénombrable. Cela n'est pas nécessairement vrai pour  $W(\{\lambda_j\})$  (voir I. 4°).

III. - Convenons enfin de dire que  $u$  est irrégulier par rapport à  $\{\lambda_j\}$ , et notons  $u \in E(\{\lambda_j\})$ , si  $\{\lambda_j u\}$  n'admet aucune répartition modulo 1. Ainsi

$$E(\{\lambda_j\}) \subset W(\{\lambda_j\}) \quad \text{et} \quad W(\{\lambda_j\}) - E(\{\lambda_j\}) \subset A(\{\lambda_j\}) \subset W(\{\lambda_j\}).$$

Quitte, dans la définition de la répartition, à remplacer  $\lim_{N \rightarrow \infty}$  par  $\lim_{N \in \Lambda, N \rightarrow \infty}$ , on introduit de même  $E_\Lambda(\{\lambda_j\})$ . On voit que

$$E_\Lambda(\{\lambda_j\}) \subset E(\{\lambda_j\}),$$

et qu'à tout dénombrable  $D$  on peut faire correspondre une suite  $\Lambda$  telle que  $D \cap E_\Lambda(\{\lambda_j\}) = \emptyset$  (il suffit que, pour tout  $u \in D$  et  $m$  entier, les moyennes  $\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{2\pi i m_j u}$  aient une limite quand  $N \rightarrow \infty$  en restant dans  $\Lambda$ ).

L'exemple I.2° montre que  $E(\{\lambda_j\})$  peut être vide, pour certaines suites  $\{\lambda_j\}$  à croissance polynomiale. On se restreint dans la suite à des  $\{\lambda_j\}$  à croissance exponentielle; plus précisément, on supposera toujours  $\frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_j} > q > 1$ . Indiquons deux types de résultats.

1° La dimension de Hausdorff de  $E_\Lambda(\{\lambda_j\})$  est 1 (simple adaptation de l'étude de ERDÖS et TAYLOR, relative à  $W(\{\lambda_j\})$ ).

2° Soit  $K$  un compact sur  $]0, \infty[$  tel que toute suite bornée  $\{b_j\}$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) s'écrive, au moins pour  $j$  assez grand, sous la forme

$$b_j = \int_K e^{2\pi i \lambda_j t} d\beta(t),$$

$d\beta$  étant une mesure sur  $K$  convenablement associée à  $\{b_j\}$ ; on dira alors que  $K$  est un compact propre pour  $\{\lambda_j\}$ . Alors

$$K \cap E_\Lambda(\{\lambda_j\}) \neq \emptyset.$$

Par la remarque faite plus haut, il en résulte que  $K \cap E(\{\lambda_j\})$  est non dénombrable (et aussi bien  $K \cap E_\Lambda(\{\lambda_j\})$ ).

La preuve du 2° est très simple: si  $u \notin E_\Lambda(\{\lambda_j\})$

$$\lim_{\Lambda} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \varphi(\lambda_j u) = f(u)$$

existe pour  $\varphi(t) = e^{2\pi i t}$ . En intégrant par rapport à  $d\beta$ , ce qui est justifié

si  $K \subset CE_{\Lambda}(\{\lambda_j\})$ , on obtient

$$\lim_{\Lambda} \frac{1}{N} \sum_1^N b_j = \int f(u) d\beta(u) .$$

Mais on peut choisir  $\{b_j\}$  de sorte que le premier membre n'ait pas de sens. Donc  $K$  n'est pas contenu dans  $CE_{\Lambda}(\{\lambda_j\})$ .

L'utilisation du 2<sup>o</sup> requiert une étude des compacts propres pour  $\{\lambda_j\}$ . Pour fixer les idées, bornons-nous à des compacts du type de Cantor, construits de la manière suivante :  $K$  est l'intersection de compacts  $K_j$  emboîtés, décroissants ; chaque  $K_j$  est réunion de  $2^j$  segments égaux, et on passe de  $K_j$  à  $K_{j+1}$  en remplaçant chaque segment  $[a, a + \ell]$  constituant  $K_j$  par les deux segments  $[a, a + \xi_{j+1} \ell]$ ,  $[a + \ell - \xi_{j+1} \ell, a + \ell]$ . La donnée de  $\xi_1, \dots, \xi_j, \dots$  ( $0 < \xi_j < 1/2$ ) définit  $K$  à une homothétie près. Voici quelques résultats connus :

- Si, pour tout  $j$ ,  $\xi_j > \xi(q)$  assez voisin de  $1/2$  (rappelons que  $\{\lambda_j\}$  est supposée satisfaire  $\frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_j} > q > 1$ ),  $K$  est propre pour  $\{\lambda_j\}$  (KAHANE-WEISS-WEISS [2]).

- Si l'on choisit au hasard, et indépendamment les uns des autres, les  $\xi_j$  sur un intervalle  $[\alpha, \beta]$  ( $0 < \alpha < \beta < 1/2$ ),  $K$  est presque sûrement propre pour  $\{\lambda_j\}$ .

- Par contre, si tous les  $\xi_j$  sont égaux ( $\xi_j = \xi$ ), et si  $1/\xi$  est un nombre de la classe  $S$  de Pisot, il existe des suites  $\{\lambda_j\}$  telles que  $K$  n'est pas propre pour  $\{\lambda_j\}$ .

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] CIGLER(J.) und HEIMBERG (G.). - Neuere Entwicklungen der Theorie der Gleichverteilung, Jahresb. Deutsch. Math. Verein., t. 64, 1962, p. 1-50.
- [2] KAHANE (J.-P.), WEISS (M.) and WEISS (G.). - On lacunary power series, Arkiv för Matematik, t. 5, 1963, p. 1-26.
- [3] KAHANE (J.-P.) and SALEM (R.). - Distribution modulo 1 and sets of uniqueness, Bull. Amer. math. Soc., t. 70, 1964, p. 259-261.
- [4] KAHANE (J.-P.) and HELSON (H.). - A Fourier method in diophantine problems, J. Anal. math., Jérusalem (à paraître).