Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Pierre Lepebvre

Demi-groupes hamiltoniens

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 17, nº 2 (1963-1964), exp. nº 15, p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1963-1964__17_2_A4_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
17e année, 1963/64, n° 15

23 mars 1964

DEMI-GROUPES HAMILTONIENS

par Pierre LEFEBVRE

Il y a relativement peu de travaux sur les homomorphismes de demi-groupes, en dehors du cas où l'image homomorphe est un groupe. C'est pourquoi mon attention a été attirée par certains résultats contenus dans un mémoire récent de D.W.MILLER : Hamiltonien semigroups, Portugaliae Mathematica, Vol 21, Fasc.3, 1962.
Ces résultats m'ont paru intéressants pour deux raisons assez contradictoires : 1°) un point de vue qui permet de généraliser pour les demi-groupes une notion connue pour les groupes en se libérant de la servitude de l'existence d'inverses, évidemment non assurée dans les demi-groupes; 2°) un résultat singulier qui montre que la notion de groupe est une notion prépondérante qui réapparaît à l'improviste d'une manière inattendue.

I. DÉFINITIONS.- 1°) Groupe hamiltonien. Un groupe G est dit hamiltonien si G n'est pas abélien et si tout sous-groupe de G est distingué.

La structure d'un groupe hamiltonien est connue : un tel groupe est produit direct d'un groupe de quaternions, d'un groupe abélien périodique dont tous les éléments sont d'ordre impair et d'un groupe abélien d'exposant 2 (exposant: ppcm des ordres des éléments).

2°) Généralisation aux demi-groupes de la notion de groupe hamiltonien

a) Comme on n'a pas d'inverses pour les éléments, on ne peut pas généraliser la notion élémentaire de sous-groupe distingué. Cependant, on observe qu'un groupe G est hamiltonien si et seulement si tout sous-groupe est le noyau d'un homomorphisme de G.

b) On observe encore deux faits : parmi les sous-groupes d'un groupe, l'un d'eux est trivialement noyau d'un homomorphisme : $\{e\}$. Par ailleurs, la notion de noyau apparaît dans la mesure où l'image homomorphe d'un groupe étant un groupe, possède un élément neutre, le noyau étant alors l'image réciproque de cet élément.

c) Pour rester dans "l'esprit" de la théorie des groupes, on imposera donc à un demi-groupe hamiltonien d'être tel que tous ses sous-demi-groupes non triviaux (c'est-à-dire excepté les idempotents) sont noyaux d'un homomorphisme, la notion de noyau restant maintenant à préciser.

d) L'image homomorphe d'un demi-groupe est un demi-groupe, et cette image n'a pas a priori un élément neutre. Elle peut même avoir un autre élément remarquable : un zéro.

On peut donc définir deux sortes de noyaux : si l'image homomorphe contient un zéro : 0 , nous appellerons 0-noyau l'image réciproque de 0 ; si elle contient un élément neutre : 1 , le 1-noyau sera l'image réciproque de cet élément.

Il y a donc a priori deux sortes de demi-groupes hamiltoniens : ceux dont tous les sous-demi-groupes non triviaux sont des 0-noyaux et ceux dont tous les sous-demi-groupes non triviaux sont des 1-noyaux.

Mais nous allons écarter ces derniers, en raison du théorème suivant :

II. THÉORÈME FONDAMENTAL.- Soit D un demi-groupe dans lequel tout sous-demi-groupe non trivial est le 1-noyau d'un homomorphisme de D sur un demi-groupe à élément neutre $1 \in \overline{D}$. D est alors :

soit (1) un demi-groupe d'ordre 2 .

soit (2) un groupe abélien.

soit (3) un groupe hamiltonien.

Démonstration: Tout 1-noyau S de D est unitaire. Car $s \in S$, $sx \in S$ entraîne $\overline{s}.\overline{x} = 1 = 1.\overline{x} = \overline{x}$ c'est-à-dire $x \in S$.

Soit E l'ensemble des idempotents de D . Si $E \neq \emptyset$, soient $e,f \in E$. Si $\mathrm{Card}(eD) = 1$, e est un zéro à gauche pour D (car eD contient $e^2 = e$). Si $\mathrm{Card}(eD) > 1$, eD est un 1-noyau, donc est unitaire. Puisque $e, ef \in eD$, alors $f \in eD$. Donc $f = ex$ et $ef = e^2x = ex = f$

Finalement, on obtient, pour tout e E : ou bien $\forall x \in D$ $ex = e$ (1_a)

ou bien $\forall f \in E$ $ef = f$ (1_b)

En raisonnant de même sur De, on a ou bien $\forall x \in D$ $xe = e$ (2_a)

ou bien $\forall f \in E$ $fe = f$ (2_b)

Supposons d'abord $\mathrm{Card}\, E \geqslant 2$, et soient $e,f \in E$, $e \neq f$.

Considérons le sous-demi-groupe S engendré par e et f : $S = (e,f)$. D'après (1_a) et (1_b), $\mathrm{Card}\, S = 2$.

Si $ef = e$, e ne vérifie pas (1_b) , donc $eD = e$. Si $x \in D$, $e = ex$ entraîne $x \in S$. Par suite $D = S$ et $\mathrm{Card}\, D = 2$.

On arrive à la même conclusion si $ef = f$ en raisonnant avec (2_b) et Df.

Si $\mathrm{Card}\, E < 2$, considérons pour un élément quelconque $x \in D$ l'ensemble $T = \{x^2, x^3, \dots \}$. Si $\mathrm{Card}\, T = 1$, $x^2 \in E$ et $x.x^2 = x^2.x = x^2$.

Si $\mathrm{Card}\, T > 1$, $x^2 \in T$ et $x^2.x \in T$, T sous-demi-groupe non trivial de D , entraînent $x \in T$. Il existe $n \in N^*$ tel que $x = x^n$. D'après un théorème bien connu sur les demi-groupes cycliques finis, le sous-demi-groupe (x) engendré par x est un groupe.

Dans les deux cas, E n'est pas vide et D contient un idempotent unique (car on a supposé $\mathrm{Card}\, E < 2$).

De plus, pour tout $x \in D$, ou bien $x^2 = xe = ex = e$ (3_a)

ou bien $T = (x)$ est un groupe (3_b)

On introduit alors l'ensemble $B = \{b \; ; \; b \in D - \{e\} \; , \quad b^2 = be = eb = e\}$
Si $b, b' \in B$, $beb' = be = e \in \{b,e\}$ donc $b' \in \{b,e\}$ avec $b' \neq e$
et par suite $b' = b$, donc Card $B \leqslant 1$.
Si Card D 2 et si $B \neq \emptyset$, il existe d dans $D - (B \cup \{e\})$.
d ne vérifie pas (3_a) , donc (d) est un groupe avec e pour élément neutre.
$eb = e \in (d)$ entraîne $b \in (d)$ d'où $b = be = e$ ce qui est contradictoire.
Donc, ou bien Card $D \leqslant 2$ ou bien $B = \emptyset$.
Dans ce dernier cas, il résulte de (3_b) que tout élément de D engandre un groupe cyclique, donc que D est réunion de groupes. On sait que D est alors réunion de groupes disjoints. Mais puisque Card E = 1, D est un groupe.
Tout sous-groupe de D est distingué par hypothèse et D est un groupe abélien ou un groupe hamiltonien.

III. THÉORÈME DE STRUCTURE DES DEMI-GROUPES HAMILTONIENS.

1°) Rappelons qu'un demi-groupe hamiltonien D est maintenant un demi-groupe dans lequel tout sous-demi-groupe non trivial est le 0-noyau d'un homomorphisme de D sur un demi-groupe avec zéro.

2°) Une conséquence immédiate de cette définition est le

LEMME 1.- Un demi-groupe D est hamiltonien si et seulement si tout sous-demi-groupe non trivial de D est un idéal de D .
La structure d'un tel demi-groupe n'est pas simple, comme le montre le théorème suivant :

3°) THÉORÈME DE STRUCTURE.- Un demi-groupe est hamiltonien si et seulement s'il est, soit (1) un demi-groupe d'ordre 2 .
soit (2) un demi-groupe de Kronecker avec des "répliques" de 0.
soit (3) le produit orthogonal d'un demi-groupe de Kronecker et d'un demi-groupe nilpotent diagonal d'ordre 3.
soit (4) un groupe G d'ordre premier avec des "répliques" des éléments de $G - \{e\}$, où e est l'élément neutre de G .
soit (5) un demi-groupe D construit de la manière suivante :
Soit p un nombre premier impair, G le groupe d'ordre p , e son élément neutre, $T_{2,p}$ et $T_{3,p}$ des ensembles non vides disjoints entre eux deux à deux et disjoints de G. On pose $D = G \cup T_{2,p} \cup T_{3,p}$. On effectue une partition de $T_{3,p}$ en sous-ensembles non vides K_λ , où λ décrit un ensemble d'indices L . Soit $\lambda \to x(\lambda)$ une application de L dans $T_{2,p}$ et $a \to \bar{a}$ une application de D dans G satisfaisant aux axiomes : (A_1) $\forall a \in G \quad \bar{a} = a$

(A_2) $\forall a,b \in D \quad \overline{ab} = \bar{a}.\bar{b}$

(A_3) $\forall a \in D - G \quad \bar{a} \neq e$.

le produit ab dans D étant défini par les axiomes :

(B_1) a ou $b \in T_{2,p} \cup G$ $\quad ab = \bar{a}.\bar{b}$

(B_2) $a \in K_\lambda$, $\lambda \in L$ $\quad a^2 = x(\lambda)$

(B_3) $a,b \in K_\lambda$, $\lambda \in L$ $\quad ab = x(\lambda)$ ou $ab = \bar{a}.\bar{b}$

(B_4) $a \in K_\lambda$, $b \in K_\mu$. $\lambda,\mu \in L$ $\quad \lambda \neq \mu$ $\quad ab = \bar{a}.\bar{b}$

CAS PARTICULIER.-Un demi-groupe D dans lequel tout sous-demi-groupe est un O-noyau, c'est-à-dire un idéal de D , est un sous-demi-groupe nilpotent diagonal d'ordre n , $n \leq 3$.

4°) Définitions relatives au théorème de structure.-

a) demi-groupe de Kronecker.- Si L est un ensemble contenant le symbole O, on définit une multiplication sur L en posant, pour $\alpha,\beta \in L$ $\alpha\beta = \alpha$ si $\alpha = \beta$ et $\alpha\beta = 0$ si $\alpha \neq \beta$. L est alors un demi-groupe appelé demi-groupe de Kronecker.

b) Demi-groupes avec "répliques". Soit D un demi-groupe , $\{a_\lambda\}_{\lambda \in L}$ un sous-ensemble de D , K un ensemble disjoint de D : $K = \sum_{\lambda \in L} K_\lambda$
On étend la multiplication de D à $D^* = D \cup K$ en posant

(1) $\forall k \in K_\lambda$ $\forall d \in D$ $\quad kd = a_\lambda d \quad dk = da_\lambda$

(2) $\forall k \in K_\lambda$ $\forall k' \in K_\mu$ $\quad kk' = a_\lambda a_\mu$

D^* est alors un demi-groupe. Pour chaque $\lambda \in L$, les éléments de K_λ sont appelés "répliques" de a_λ et D est dit "demi-groupe D avec des répliques des éléments a_λ , $\lambda \in L$.

c) Produit orthogonal.- Soient D_1 et D_2 des demi-groupes tels que $D_1 \cap D_2 = \{0\}$. On définit sur $D = D_1 \cup D_2$ une multiplication $*$ par

$a \in D_i$, $b \in D_j$ $\quad a*b = ab$ si $i = j$ et $a*b = 0$ si $i \neq j$

$D(*)$ est un demi-groupe dit produit orthogonal de D_1 et D_2 .

d) Demi-groupe nilpotent diagonal.- On dit qu'un demi-groupe D est nilpotent s'il existe un entier n tel que Card $D^n = 1$. L'ordre de nilpotence est le plus petit entier n tel que cette relation soit vraie.
Un demi-groupe D nilpotent d'ordre n , avec O , est dit diagonal si :

$a,b \in D - D^2$ $\quad a^2 = b^2$ entraîne $ab = a^2$ ou $ab = 0$

$\quad a^2 \neq b^2$ entraîne $ab = 0$

5°) Remarque.-Les deux théorèmes précédents montrent clairement qu'en théorie des demi-groupes, ou bien on est ramené trivialement à une structure de groupe, ou bien les théorèmes de structure sont très compliqués.

6°) Démonstration du théorème de structure.-Nous donnons maintenant la succession des lemmes dont la synthèse aboutit au théorème de structure précédent.

IV.- 1º) Demi-groupes hamiltoniens idempotents.

LEMME 1.- Tout demi-groupe hamiltonien idempotent est soit un demi-groupe de Kronecker soit un demi-groupe idempotent d'ordre 2. Réciproquement tout demi-groupe de ce type est un demi-groupe hamiltonien idempotent.

Soit D un demi-groupe hamiltonien idempotent. D'après un théorème de Mc LEAN [9] il existe un demi-treillis Γ et une partition de D en sous-demi-groupes indexés par Γ, (1) $D = \sum_{\gamma \in \Gamma} S_\gamma$ tels que (2) $S_\gamma S_\delta \subseteq S_{\gamma\delta} \quad \forall \gamma, \delta \in \Gamma$

Supposons d'abord que $\text{Card } S_\gamma = 1$ quel que soit γ. D'après (2), D est isomorphe à Γ, donc D est commutatif. Par suite deux éléments quelconques de D engendrent un sous-demi-groupe dont l'ordre est au plus 3.

Supposons que (a,b) soit d'ordre 3 pour un couple d'éléments a et b. Posons $ab = z$. (a,z) et (b,z) sont des sous-demi-groupes non triviaux et par conséquent des idéaux de D. Si $c \in D$, cz et zc appartiennent à $\{a,z\} \cap \{b,z\} = z$ donc

$$(3) \qquad cz = zc = z \qquad \text{pour tout } c \in D$$

Soient c et d des éléments distincts de D. Posons $cd = w$. On peut supposer $w \neq d$. D'après (3), on a $d \neq z$. Le sous-demi-groupe (d,w) est d'ordre 2 donc $z = dz \in (d,w)$ d'où l'on déduit $z = w$. Autrement dit : (4) $\forall c,d \in D$, $c \neq d \quad cd = z$

Supposons ensuite que (x,y) est d'ordre 2 pour tous les couples $x,y \in D$, $x \neq y$. Soient $a,b,c \in D$, $a \neq b$. Par hypothèse, $ab \in (a,b)$, par exemple $ab = a$. Par conséquent, si $c \neq b$, $a = ab \in (b,c)$ donc $a = c$. Finalement, $\text{Card } D \leq 2$ (5)

Nous supposons maintenant que $\text{Card } S_\alpha > 1$ pour un α de Γ. Si on a aussi $\text{Card } S_\beta > 1$ pour β de Γ, alors S_α, S_β sont des idéaux de D et $S_\alpha S_\beta \subseteq S_\alpha \cap S_\beta$ ce qui entraîne $\alpha = \beta$. Par suite, $\text{Card } S_\gamma = 1$ pour tout $\gamma \neq \alpha$.

D'après un théorème de KIMURA [8], S_α est le produit direct d'un antisemigroupe à droite A et d'un antisemigroupe à gauche B. Soient $a \in A$ et $b \in B$. Définissons :

$$A' = \{(x,b) \; ; \; x \in A\} \qquad B' = \{(a,y) \; ; \; y \in B\}$$

A est isomorphe à A' et B est isomorphe à B'. Si $\text{Card } B > 1$, B' est un idéal de S_α donc $A' = A'.(a,b) \subseteq A'B' \subseteq B'$, c'est-à-dire $A' \subseteq A' \cap B' = (a,b)$. Par conséquent $\text{Card } A = \text{Card } A' = 1$ et S est isomorphe à B. De même, si $\text{Card } A > 1$, S_α est isomorphe à A. Donc S_α est soit un antisemigroupe à droite, soit un antisemigroupe à gauche.

Cependant, puisque $Ax = A$, pour tout $x \in A$ et $yB = B$ pour tout $y \in B$, ni A ni B ne contiennent un idéal propre. Par conséquent, si x et y sont des éléments distincts de S_α, alors $(x,y) = S_\alpha$ donc $\text{Card } S_\alpha = 2$ (6)

Supposons que S_α soit un antisemigroupe à droite : $S_\alpha = A$ et soit $t \in D - A$. Si $A = \{a_1, a_2\}$, $a_i t \in At \subseteq A$ donc $a_i t = a_i^2 t = a_i . a_i t = a_i$ pour $i = 1, 2$.

Autrement dit $at = a$ pour tout $a \in A$.

Si on avait $ta_1 = a_1$, alors (t,a_1) serait d'ordre 2, et $a_2 = a_2 a_1$ appartiendrait à (t,a_1), ce qui est contradictoire.

Donc on a $ta_1 = a_2$ et $ta_2 = a_1$. On en déduit :

$a_2 = ta_1 = t^2 a_1 = t.ta_1 = ta_2 = a_1$ ce qui est encore contradictoire. Donc $D - S = \emptyset$.

On arrive à la même conclusion en supposant que S_α est un antisemigroupe à gauche. Ceci prouve la première partie du théorème. La seconde est une conséquence immédiate des définitions.

2º) Demi-groupe hamiltoniens non idempotents sans sous-groupes non triviaux.

LEMME 2.- Soit D un demi-groupe hamiltonien : (a) non idempotent, (b) ne contenant aucun élément d'ordre supérieur à 2, (c) ne contenant aucun sous-groupe non trivial. D est alors un demi-groupe de Kronecker avec des répliques de l'élément zéro.

Remarquons d'abord que tout sous-demi-groupe cyclique d'un demi-groupe hamiltonien est fini. Soit en effet $a \in D$, $a \neq a^2$. Posons $A = (a)$, $B = (a^2)$. Si $\text{Card } B = 1$, alors $a^4 = a^2$ donc $\text{card } A \leqslant 3$. Si $\text{Card } B > 1$, B est un idéal de D et $a^3 = a.a^2 \in B$. Donc $a^3 = a^{2n}$ pour un entier positif n, et par suite ou bien $\text{Card } A < 3$ ou bien $\text{Card } A < 2n$.

Soit E l'ensemble des idempotents de D et $R = D - E$. D'après la remarque précédente et l'hypothèse (a), E et R ne sont pas vides. Soit $x \in R$; d'après (b) ou bien $x^3 = x$ ou bien $x^3 = x^2$. If $x^3 = x$ alors (x,x^2) est un groupe d'ordre 2, ce qui est en contradiction avec (c). Donc, $x^3 = x^2$.

Posons, pour tout $x \in R$, $x^2 = e_x$ (8). Supposons $e_x \neq e$ pour un $e \in E$ et un $x \in R$. Dans ce cas, $ee_x = ee_x^2 = ee_x.e_x \in \{x,e_x\} e_x = e_x$. De même, $e_x e = e_x$

Finalement, on a (9) $ee_x = e_x e = e_x$ pour tout $e \in E$ et tout $x \in R$.

En particulier, si $x,y \in R$ alors $e_x = e_y e_x = e_y$. Il existe donc un élément z de E tel que (10) $x^2 = z$ pour tout $x \in R$.

En outre, si $x \in R$, $xz = xe_x = e_x = e_x x = zx$ d'où (11) $\forall x \in R \quad xz = zx = z$

Si x et y sont des éléments distincts de D tels qu'on ait $x \neq z$ et $y \neq z$ alors $xy \in \{x,z\} \cap \{y,z\} = z$. En tenant compte de (9) et de (11), on obtient enfin

$$(12) \qquad xy = z \qquad \text{pour tout } x \neq y \text{ de } D$$

D'après (10) et (12), E est un demi-groupe de Kronecker et les éléments de R sont des répliques du zéro, z, de E.

LEMME 3.-Soit D un demi-groupe hamiltonien tel que (a) D contienne un élément d'ordre supérieur à 2. (b) D ne contienne aucun sous-groupe non trivial.

D est alors le produit orthogonal d'un demi-groupe de Kronecker et d'un demi-groupe nilpotent diagonal d'index 3. Réciproquement, un tel produit orthogonal est hamiltonien et vérifie (a) et (b).

Soit a un élément de D d'ordre supérieur à 2 et m l'ordre de (a^2). Si $m = 1$ $a^4 = a^2$ donc $a^3 = a^2$ sinon $\{a^2, a^3\}$ serait un sous-groupe non trivial de D. Mais l'ordre de a est alors au plus d'ordre 2, ce qui est contradictoire. Par conséquent, on a $m > 1$, donc $a^3 = aa^2 \in (a^2)$ c'est-à-dire $a^3 = a^{2n}$ pour un entier positif n, où l'on peut supposer n minimum. Si $n = 1$, alors $a^3 = a^2$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse faite pour l'ordre de a. Si $n > 2$, (a) contient un sous-groupe non trivial de D. Par conséquent, $n = 2$ et $a^3 = a^4$, autrement dit a a pour ordre 3. D peut donc être décomposé en classes :

$$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \quad \text{où} \quad x \in D_i \ \text{si et seulement si} \ x \ \text{a pour ordre} \ i .$$

Si $a \in D_3$, on vient de montrer que $a^4 = a^3 \neq a^2$ donc $a^2 \in D_2$ et $a^3 \in D_1$ Par suite, quel que soit i, D_i n'est pas vide. En outre, on a :

$$(13) \qquad a^2 \in D_2 \quad \text{pour tout} \quad a \in D_3$$

Soit $x, y \in D_2$ et $x^2 = e$, $y^2 = f$. D'après (b), $x^3 \neq x$ donc $x^3 = x^2$ Par suite, $ex = xe = e$ et $\{x, e\}$ est un demi-groupe nilpotent d'index 2. Donc $ye \in \{e, x\}$. Si $ye = x$ alors $e = x^2 = yex = ye = x$, ce qui est contradictoire. Il en résulte que $ye = e$ et de même $ey = e$. Par suite :

$$(14) \qquad \forall x, y \in D_2 \qquad x^2 y = y x^2 = x^2$$

En outre, $ef \in \{x, e\}$ et $ef \neq x$ car sinon $x = ef = e^2 f = ex = e$. Par suite $ef = e$. De même, $ef = f$. Il existe donc un élément z de D_1 tel que

$$(15) \qquad \forall x \in D_2 \qquad x^2 = z$$

La relation (14) devient alors $\forall y \in D_2 \quad zy = yz = z$

Si $x \in D_2$ et $s \in D - \{z\}$, $sz \in \{x, z\}$. Donc $sz = z$ puisque si $sz = x$ alors $x = sz = sz^2 = xz = z$. De même $zs = z$ et par suite : $zD = Dz = z$

Si e et f sont des éléments distincts de $D_1 - \{z\}$ alors $ef \in \{e, z\} \cap \{f, z\}$ si bien que $ef = z$. Finalement, on voit que D_1 est un demi-groupe de Kronecker avec zéro.

Si $s \in D_2 \cup D_3$ et $e \in D_1 - z$, $es \in \{e, z\}$. Si $es = e$, d'après (13), (14) et (15), $e = es^4 = ez = z$ ce qui est contradictoire. On a donc pour finir $es = se = z$ et, puisque z est un zéro de D,

$$(16) \qquad D_1(D_2 \cup D_3) = (D_2 \cup D_3)D_1 = \{z\}$$

Si $x \in D_2$ et $a \in D_3$, nécessairement $xa \in \{x, z\}$. Si $xa = x$, alors $x = xa^4 = xz = z$ donc nécessairement $xa = z$. De la même manière, on a $ax = z$ et en définitive $(17) \quad D_2 D_3 = D_3 D_2 = \{z\}$

Si x et y sont des éléments distincts de D_2 alors $xy \in \{x,z\} \cap \{y,z\}$, donc, d'après (15): (18) $D_2 D_2 = \{z\}$

En outre, si a et b sont des éléments distincts de D_3 alors $ab \in \{a,a^2,z\} \cap \{b,b^2,z\}$ donc, d'après (13) : (19) $D_3 D_3 \subseteq D_2 \cup \{z\}$

Il résulte des relations (16) à (19) que $T = \{z\} \cup D_2 \cup D_3$ est un demi-groupe nilpotent d'index 3. De plus T est diagonal.

Soient a et b des éléments de $T - T^2$. Si $ab = a$ alors $a = ab^3 = az = z$ ce qui est contradictoire. Donc $ab \neq a$ et de même $ab \neq b$. Mais $ab \in (a) = \{a,a^2,z\}$ (où $a^2 = z$ si $a \in D_2$), donc $ab = a^2$ ou $ab = z$. De même $ab \in (b)$ donc $ab = b^2$ ou $ab = z$. Par conséquent si $a^2 \neq b^2$ on a $ab = z$. Puisque $D_1 \cap T = \{z\}$, et z étant un zéro pour D_1 et T, il résulte de (16) que D est le produit orthogonal de D_1 et de T.

Réciproquement, soit D le produit orthogonal d'un demi-groupe de Kronecker K et d'un demi-groupe nilpotent diagonal T d'index 3, tels que $K \cap T = \{0\}$. Soit A un sous-demi-groupe non-trivial de D, et a et b des éléments distincts de A, x un élément de D. Si a, par exemple, appartient à T, alors $0 = a^3 \in A$, et si a et b appartiennent à K, alors $0 = ab \in A$. Donc A contient 0.

Si $a,x \in K$ alors $ax = a$ si $a = x$ tandis que $ax = 0$ si $a \neq x$. Si $a \in K$, $x \in T$ ou si $a \in T$, $x \in K$, $ax \in KD$ ou $DK = 0$ donc $ax = 0$. Si $a,x \in T$, puisque T est diagonal, ax est égal à a^2 ou à 0. Par conséquent, $ax \in A$ pour tout $a \in A$ et tout $x \in D$, c'est-à-dire que $AD \subseteq A$. De même, $DA \subseteq A$ et A est un idéal de D. D est donc un demi-groupe hamiltonien.

Puisque T a pour index de nilpotence 3 il existe un élément d de T tel que $d^2 \neq 0$ et $d^3 = 0$, donc d a pour ordre 3 dans D. En outre si D contient un sous-groupe non trivial G on a $0 = 0.G \subseteq G$ ce qui est contradictoire : un groupe ne contient pas de zéro. Par conséquent D vérifie les conditions (a) et (b).

3º) <u>Demi-groupes hamiltoniens contenant un sous-groupe non trivial.</u>

<u>LEMME 4.- Soit D un demi-groupe hamiltonien contenant un sous-groupe non trivial G. D contient un seul idempotent.</u>

Soit e l'élément neutre de G et $f = f^2 \in D$. Si $fe = x$, $x \in G$ et $fx = ffe = fe = x$, d'où $fe = fxx^{-1} = xx^{-1} = e$. De même $ef = e$ d'où $ef = fe = e$. Par conséquent, si $e \neq f$, $\{e,f\}$ est un idéal de D, donc pour $g \in G - \{e\}$, $g = ge \in \{e,f\}$, ce qui est contradictoire. Donc, $e = f$.

<u>LEMME 5.- Un demi-groupe hamiltonien contient au plus un sous-groupe non trivial.</u>

D'après le lemme précédent, deux sous-groupes non triviaux G et H de D contiennent le même idempotent e. Par conséquent $H = He \subsetneq HG \subsetneq G = Ge \subsetneq GH \subsetneq H$ donc $G = H$.

LEMME 6.- Soit D un demi-groupe hamiltonien tel que :

(a) tout élément de D a pour index* 1 ou 2.

(b) D contient un sous-groupe non trivial G.

G est alors d'ordre premier et $S - G$ est formé de répliques d'éléments de $G - \{e\}$ où e est l'élément neutre de G.

Tout d'abord, remarquons que tout sous-demi-groupe cyclique d'un demi-groupe hamiltonien est fini. Soit en effet $a \in D$, $a \neq a^2$. Posons $A = (a)$, $B = (a^2)$. Si $\text{Card } B = 1$, $a^4 = a^2$ donc $\text{Card } A \leqslant 3$. Si $\text{Card } B > 1$, B est un idéal de D et $a^3 = a.a^2 \in B$. Donc $a^3 = a^{2n}$ pour un entier positif n, et $\text{Card } A < 2n$.

D'après cette remarque, on voit que G contient un sous-groupe fini H, qui peut être supposé d'ordre premier et, d'après le lemme 5, on a $G = H$.

Si $x \in D - G$, on a $x \neq e$ donc d'après le lemme 4, $x \neq x^2$. Si $x = x^3$, $\{x, x^2\}$ est un sous-groupe non trivial de D, donc $\{x, x^2\} = G$, en contradiction avec $x \in G$. Il résulte alors de (a) que $G = \{x^2, x^3, \ldots, x^{p+1}\}$, où $x^{p+2} = x^2$ et $x^p = e$. Donc $x^2 = (x^p)^2 x^2 = (x^{p+1})^2$ et pour $2 \leqslant i \leqslant p+1$, $xx^i = x^p xx^i = x^{p+1}x^i$. Si $y \in D - G$, $xy \in (x) \cap (y) = G$ d'où $xy = ex.ye = x^p x.yy^p = x^{p+1}y^{p+1}$. Les éléments de $D - G$ sont donc des répliques d'éléments de $G - \{e\}$.

LEMME 7.- Soit p un nombre premier impair, G le groupe d'ordre p, ayant e pour élément neutre, $T_{2,p}$ et $T_{3,p}$ des ensembles non vides tels que G, $T_{2,p}$ et $T_{3,p}$ soient deux à deux disjoints. Posons $D = G \cup T_{2,p} \cup T_{3,p}$. On définit une partition arbitraire de $T_{3,p}$ en sous-ensembles non vides K_λ, où λ décrit un ensemble d'indices L. Soit $\lambda \to x(\lambda)$ une application de L dans $T_{2,p}$, et $a \to \bar{a}$ une application de D dans G qui vérifie les conditions suivantes :

(A.1) $\forall a \in G$, $\bar{a} = a$; (A.2) $\forall a, b \in D$, $\overline{ab} = \bar{a}.\bar{b}$; (A.3) $\forall a \in D - G$, $\bar{a} \neq e$

la multiplication dans D étend définie de manière à vérifier les conditions :

(B.1) $ab = \bar{a}.\bar{b}$ si a ou b appartient à $T_{2,p} \cup G$; (B.2) $a^2 = x(\lambda)$ si $a \in K_\lambda$, $\lambda \in L$; (B.3) $ab = x(\lambda)$ ou $ab = \bar{a}.\bar{b}$ si $a, b \in K_\lambda$, $\lambda \in L$;

(B.4) $ab = \bar{a}.\bar{b}$ si $a \in K_\lambda$, $b \in K_\mu$, $\lambda, \mu \in L$, $\lambda \neq \mu$.

Alors D est un demi-groupe hamiltonien contenant un sous-groupe non trivial et un élément d'index supérieur à 2.

Réciproquement tout demi-groupe hamiltonien contenant un sous-groupe non trivial et un élément d'index supérieur à 2 a la structure précédemment définie.

---

* Voir la définition de l'index d'un élément dans la démonstration du lemme 7.

Soient $a,b,c \in D$. Si l'un de ces éléments appartient à $G \cup T_{2,p}$, on a, d'après les conditions (A.1), (A.2) et (B.1) : $a.bc = ab.c = \bar{a}.\bar{b}.\bar{c}$. Si $a,b,c \in T_{3,p}$, d'après (B.3) et (B.4), ab et bc appartiennent à $G \cup T_{2,p}$ et, d'après (B.1) et (A.2), on a

$ab.c = \overline{ab}.\bar{c} = (\bar{a}.\bar{b}).\bar{c} = \bar{a}.(\bar{b}.\bar{c}) = \bar{a}.\overline{bc} = a.bc$

Ainsi, D est un demi-groupe contenant un sous-groupe non-trivial G.

Soit A un sous-demi-groupe non trivial quelconque de D et a,b deux éléments distincts de A ; on peut supposer sans diminuer la généralité du raisonnement que $a \neq e$. Si $a \in G$, et puisque G est d'ordre premier $(a) = G$. Si $a \in T_{2,p}$ on a d'après (B.1), $a^2 = \bar{a}^2$. D'après (A.3) $\bar{a} \neq e$ donc $(\bar{a}) = G$. Puisque G est d'ordre impair, on a $(a^2) = (\bar{a}^2) = G$. Finalement, si $a \in T_{3,p}$ il résulte de (B.2) que $a^2 \in T_{2,p}$. Par conséquent $(a^4) = G$. En définitive, on a toujours $G \subsetneq A$.

Soit $a \in A$, $x \in D$ et considérons ax. Si a ou x appartient à $T_{2,p} \cup G$, alors $ax = \bar{a}.\bar{x} \in G \subsetneq A$. Supposons alors que $x \in K_\lambda$, $a \in K_\mu$. D'après (B.3) et (B.4), ax est égal à $\bar{a}.\bar{x}$ ou à $x(\lambda)$. Mais $\bar{a}.\bar{x} \in G \subseteq A$ et $x(\lambda) = a^2 \in A$. Par conséquent, $ax \in A$ pour tout $a \in A$, $x \in D$ et $AD \subsetneq A$. De même, on a $DA \subseteq A$ et A est un idéal de D. Donc D est hamiltonien.

Enfin, si $a \in T_{3,p}$, d'après (B.2), $a^2 \in T_{2,p}$. L'index de a est donc plus grand que 2.

Réciproquement, soit D un demi-groupe hamiltonien contenant un sous-groupe non trivial (unique) G, dont l'élément neutre est e, et un élément d'index supérieur à 2. G est alors d'ordre premier p. On désigne l'index et la période de chaque élément a par $r(a)$ et $m(a)$. Rappelons que si (a) est fini, il existe deux entiers, l'index r et la période m, tels que $a^{m+r} = a^r$, et $(a) = \{a, a^2, \ldots, a^{m+r-1}\}$, l'ensemble $\{a^r, \ldots, a^{m+r-1}\}$ étant un groupe cyclique d'ordre m.

A cause de l'unicité de G, on a (20) $m(a) = 1$ ou p quel que soit $a \in D$.

Il est clair que $r(a) = 1$ si et seulement si $a \in G$. Soit $a \notin D - G$. Si $a^2 = a^4$ on a $r(a) = 2$. Si $a^2 \neq a^4$ alors $a^3 = a.a^2 \in (a^2)$ et $a^3 = a^{2n}$ pour un certain entier positif n ; ainsi $r(a) \leq 3$. On a donc :

$$(21) \qquad \forall\, a \in D \qquad r(a) \leq 3$$

Définissons maintenant $T_{ij} = \{a \ ;\ a \in D,\ r(a) = i,\ m(a) = j\}$

Alors $G = T_{11} \cup T_{1p}$ et, d'après (20) et (21),

$$(22) \qquad D - G = T_{21} \cup T_{2p} \cup T_{31} \cup T_{3p}$$

Si $a \in T_{31}$ alors $(a) = \{a, a^2, e\}$. Par conséquent $a^4 = e$ et $(a^2) = \{a^2, e\}$

On a donc $\qquad (23) \quad \forall\, a \in T_{31}, \quad a^2 \in T_{21}$

De même, si $b \in T_{3p}$, $(b) = \{b, b^2, G\}$ où $b^2 \notin G$ et $(b^3) = G$. Puisque $m(b) = p$ et $r(b) = 3$, $(b) = \{b, b^2, \ldots b^{p+2}\}$, $G = \{b^3, b^4, \ldots, b^{p+2}\}$,

où $b^{p+3} = b^3$. Si $p = 2$ et $b \in T_{3p}$, alors $b^5 = b^3$ donc $b^4b^3 = b^2b^5 = b^2b^3 =$
$= b^5 = b^3$ d'où $b^4 = e$. Par conséquent $(b^2) = \{b^2, e\}$ et $b^2 \in T_{21}$. On a donc

$$(24) \qquad b^2 \in T_{21} \quad \text{pour tout} \quad b \in T_{32}$$

Si $p > 2$ et $b \in T_{3p}$ alors $(b) = \{b, b^2, \ldots, b^{p+2}\}$, où $b^{p+3} = b^3$. Ainsi, puisque $b^3, b^p \in \{b^3, b^4, \ldots, b^{p+2}\} = G$, $b^p = e$. Mais $p \neq 4$ entraîne $b^4 \neq b^p = e$ d'où $b^4 \in G$. Par suite $(b^4) = G$ d'où $b^2 \in T_{2p}$ c'est-à-dire

$$(25) \qquad \forall\, b \in T_{3p} \;,\; p > 2 \;,\quad b^2 \in T_{2p}$$

Soit $a \in D$. Alors $ae, ea \in G$ donc $ae = e.ae = ea.e = ea$ c'est-à-dire

$$(26) \qquad \forall\, a \in D \qquad ae = ea$$

Ainsi, si $a \in T_{21}$, $(a) = \{a, e\}$ est un idéal de D. Par conséquent, si $g \in G - \{e\}$ il en résulte que $g = ge \in (a)$, ce qui est contradictoire. Donc $T_{21} = \emptyset$, et, d'après (23)

$$(27) \qquad T_{21} \cup T_{31} = \emptyset$$

(22) implique alors $D - G = T_{2p} \cup T_{3p}$

Si $p = 2$, d'après (27) et (24), $T_{31} \cup T_{32} = \emptyset$, ce qui contredit l'hypothèse : D contient un élément d'index supérieur à 2. Donc on a $p > 2$.

En outre, d'après (25) et (27), T_{2p} et T_{3p} ne sont pas vides. Si $a \in D - G$ et si $ax = a$ pour un $x \in D$, puisque $x^3 \in G$, $a = ax^3 \in G$ ce qui est contradictoire.
On a donc

$$(28) \qquad \forall\, a \in D - G \quad , \quad a \notin aD \cup Da$$

Par suite, si $a \in T_{2p}$ et $t \in D - G$, $at \in (a) = \{a, G\}$ donc $at \in G$. D'après (26) il en résulte que $at = atee = ae.te$ et, de même, $ta = te.ae$. Si l'application $a \to \bar{a}$ de D dans G est définie par $\bar{a} = ae = ea$ pour tout $a \in D$ (29) on a

$$(30) \qquad \forall\, a \in T_{2p} \;,\; t \in D - G \qquad at = \bar{a}.\bar{t} \;,\quad ta = \bar{t}.\bar{a}$$

Définissons sur T_{3p} une relation d'équivalence par $a \equiv b$ si et seulement si $a^2 = b^2$ et considérons la partition correspondante : $T_{3p} = \bigcup K_\lambda$
où les indices décrivent un ensemble L. Posons :

$$(31) \qquad \forall\, a \in K_\lambda \;,\; \lambda \in L \qquad a^2 = x(\lambda)$$

D'après (25), la correspondance $\lambda \to x(\lambda)$ est une application de L dans T_{2p}.

Si $a \in K_\lambda$, $b \in K_\mu$, $\lambda \neq \mu$, alors $ab \in (a) \cap (b) = \{a, x(\lambda), G\} \cap \{b, x(\lambda), G\}$.
D'après (28), $ab \in G$ et d'après (26) $ab = \bar{a}.\bar{b}$. Donc :

$$(32) \qquad ab = \bar{a}.\bar{b} \quad \text{quels que soient} \quad a \in K_\lambda \;,\; b \in K_\mu \;,\; \lambda \neq \mu .$$

En outre, si $a, b \in K_\lambda$, $ab \in (a) \cap (b)$ et d'après (28), on a :

$$(33) \qquad ab = x(\lambda) \quad \text{ou} \quad ab = \bar{a}.\bar{b} \qquad \text{pour tout} \quad a, b \in K_\lambda$$

Finalement, puisque G est un idéal de D, on a encore :

$$(34) \qquad \forall\, x \in D - G\,,\ g \in G \quad , \quad xg = \overline{x}.\overline{g} \quad , \quad gx = \overline{g}.\overline{x}$$

Les conditions (A.1) et (A.2) résultent alors de (29) et de (26) . Supposons maintenant que $a \in D - G = T_{2p} \cup T_{3p}$. Alors $G = \{a^i, a^{i+1}, \ldots, a^{i+p-1}\}$, avec

$$(35) \qquad a^{i+p} = a^i$$

où i est égal à 2 ou à 3 suivant que a apppartient à T_{2p} où T_{3p} . Puisque $p > 3 > i$, $a^p \in G$, d'après (35) , $a^p = e$. Par conséquent $\overline{a} = ae = a^{p+1} \neq a^p = e$, ce qui démontre (A.3).

Enfin, (B.1) résulte de (30),(34) , (A.1) et (A.2) tandis que (B.2), (B.3) et (B.4) sont des transcriptions de (31), (33) et (32) .

4º) Démonstration du théorème de structure.

Soit D un demi-groupe hamiltonien. Si D est idempotent, il est, d'après le lemme 1, de type (1) ou (2). Supposons qu'il ne soit pas idempotent. S'il ne contient pas de sous-groupes non triviaux, il résulte des lemmes 2 et 3 qu'il est de type (2) ou (3), alors que s'il en possède, il est, d'après les lemmes 6 et 7, de type (4) ou (5).

Réciproquement, supposons qu'un demi-groupe soit de type (i) où $1 \leq i \leq 5$. Puisque qu'un demi-groupe trivial est trivialement hamiltonien, on peut supposer $\mathrm{Card}\, D > 1$. Soit A un sous-demi-groupe non trivial de D , $x \in D$ et a, b deux éléments distincts de A .

Si $i = 1$, $A = D$. Si $i = 2$, $z = ab \in A$, où z est le zéro de D . Ainsi, on a $ax = xa = c$ où c est soit a, soit z , donc A est un idéal de D . Si $i = 4$, soit G le sous-groupe non trivial de D . Supposons $a \neq e$. Si $a \in G$, $(a) = G$ et si $a \in D - G$, $(a^2) = G$, donc $G \subsetneq A$. Ainsi, puisque $D^2 = G \subsetneq A$, A est un idéal de D . Finalement, si $i = 3$ ou 5, D est hamiltonien, comme il a été démontré aux lemmes 3 et 6 .

5º) Cas particulier.- Ce cas, déjà étudié indépendamment par HEUER [6] et TAMURA et MERKEL [11] , est un cas particulier du théorème de structure.

Par hypothèse, tout idempotent de D est un zéro de D donc D contient exactement un idempotent, soit z . Donc, si D est de type (1) D est nilpotent d'index 2 . Si D est de type (2) avec un demi-groupe de Kronecker K , alors $\mathrm{Card}\, K = 1$, donc D est nilpotent d'index 1 ou 2. De même, si D est le produit orthogonal d'un demi-groupe de Kronecker K par un demi-groupe diagonal nilpotent T d'index 3 , $\mathrm{Card}\, K = 1$, donc D est isomorphe à T . Par ailleurs, D ne peut pas être de type T_4 ou T_5 puisque tout sous-groupe G de D est un idéal de D , et qu'ainsi $z = zG \subsetneq G$, c'est-à-dire $\mathrm{Card}\, G = 1$. Puisque tout demi-groupe d'index 1 ou 2 et nilpotent est diagonal, le théorème est complètement démontré.

6º) Remarques.- On voit très nettement sur cet exemple qu'en théorie des demi-groupes, ou bien on retrouve des structures de groupe, ou bien les théorèmes de structure indépendants sont assez compliqués.

On observera aussi qu'il conviendrait peut-être de modifier la première définition des demi-groupes hamiltoniens, car il est immédiat qu'un groupe hamiltonien n'est pas nécessairement un demi-groupe hamiltonien, puisqu'un sous-demi-groupe d'un groupe n'est pas nécessairement un sous-groupe.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BAER (R.). - Almost Hamiltonien groups, Compositio Math., t. 6, 1939, p. 382-406.

[2] CLIFFORD (A. H.). - Semigroups admitting relative inverses, Annals of Math., t. 42, 1941, p. 1037-1049.

[3] CLIFFORD (A. H.). - Bands of semigroups, Proc. Amer. math. Soc., t. 5, 1954, p. 499-504.

[4] CLIFFORD (A. H.) and PRESTON (G. B.). - The algebraic theory of semigroups, Volume 1. - Providence, American mathematical Society, 1961 (Mathematical Surveys, 7).

[5] HALL (M.). - The theory of groups. - New York, MacMillan Company, 1959.

[6] HEUER (C. V.). - Semigroups with restricted subsemigroups (M. A. Thesis, University of Nebraska, July 1960).

[7] HEWITT (E.) and ZUCKERMANN (H. S.). - Finite dimensional convolution algebras, Acta Mathematica, t. 93, 1955, p. 67-119.

[8] KIMURA (N.). - The structure of idempotent semigroups, I., Pacific J. of Math., t. 8, 1958, p. 257-275.

[9] McLEAN (D.). - Idempotent semigroups, Amer. math. Monthly, t. 61, 1954, p. 110-113.

[10] NORTON (D. A.). - Hamiltonien loops, Proc. Amer. math. Soc., t. 3, 1952, p. 56-65.

[11] TAMURA (T.) and MERKEL (R. B.). - Semigroups, all subsemigroups of which are ideals, Amer. math. Soc., Notices, t. 9, 1962, p. 134, Abstr. 591-10.