Jacques Lévy-Bruhl

Le théorème de Jordan-Hölder dans certains groupoïdes ordonnés

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 17, nº 2 (1963-1964), exp. nº 12, p. 1-14

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1963-1964__17_2_A2_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
17e année, 1963/64, n° 12

LE THÉORÈME DE JORDAN-HÖLDER DANS CERTAINS GROUPOÏDES ORDONNÉS

par Jacques LÉVY-BRUHL

I. Cas des groupoïdes ordonnés et demi-treillis

1. Définitions.

Soit G un groupoïde ordonné de relation d'ordre notée $\leqslant$. L'opération du groupoïde est notée $ab = c$ $(a , b , c \in G)$. On notera $a \prec b$ si b couvre a , et $a \preccurlyeq b$ si b couvre a ou $b = a$. Nous supposerons que G satisfait aux axiomes suivants :

(1.(i)) $xy \leqslant x$;

(1.(ii)) $xy = x$ si, et seulement si, $x \leqslant y$.

(1.(iii)) $x \preccurlyeq y \rightarrow xz \preccurlyeq xz$, $\forall z \in G$ (compatibilité à droite de la couverture).

2. Théorème de Jordan-Hölder.

Si G satisfait aux axiomes (1.(i)), (1.(ii)), (1.(iii)), et s'il existe une chaîne maximale de longueur finie entre deux éléments a , b de G , toutes les chaînes maximales d'extrémités a et b ont même longueur finie.

Démonstration. - Soient deux chaînes maximales X et Y de mêmes extrémités a et b , où X est de longueur finie m .

$$X : \quad a = x_0 \prec x_1 \prec \ldots \prec x_i \prec x_{i+1} \prec \ldots \prec x_m = b$$

et soit z un élément de Y , distinct de b . Le théorème est évident pour $m = 1$, et nous le supposerons vrai si X a une longueur au plus égale à $m - 1$.

Soit h l'indice maximal, tel que $x_h \leqslant z$. Comme $x_0 \leqslant z$ et $x_m \leqslant z$, on a $0 \leqslant h < m$. En vertu de (1.(iii)), on a

(2.1)
$$x_i\, z \preccurlyeq x_{i+1}\, z \ .$$

D'après (1.(ii)), $x_i\, z = x_i$ pour $i \leqslant h$, et d'après (1.(i)) $x_{h+1}\, z \leqslant x_{h+1}$, si bien que

(2.2)
$$x_h\, z \preccurlyeq x_{h+1}\, z \leqslant x_{h+1} \ .$$

On ne peut avoir $x_{h+1}\ z = x_{h+1}$, car alors d'après (1.(ii)), $x_{h+1} \leqslant z$, contrairement à la définition de h . Donc

$$x_{h+1}\ z = x_h \ .$$

La chaîne maximale d'extrémités a et z , qui se déduit de Z en supprimant les termes égaux, avec

$$Z : az \ , \ \dots \ , \ x_i\ z \ , \ \dots \ , \ x_m\ z = z \ ,$$

a une longueur m' au plus égale à $m - 1$. Si Y est infinie, ou de longueur m'' supérieure à m , on peut y choisir un élément $z \neq b$, tel que la portion de chaîne de Y comprise entre a et z soit de longueur supérieure à $m - 1$, en contradiction avec l'hypothèse de récurrence. Donc Y est finie et $m'' \leqslant m$. En échangeant les rôles de X et Y , on voit que $m'' = m$.

3. Théorème des couples correspondants dans un demi-treillis.

Si G est un demi-treillis, il satisfait à (1.(i)) et à (1.(ii)).

THÉORÈME. - Soient G un demi-treillis satisfaisant à la condition (1.(iii)), et deux chaînes maximales X et Y , finies, de mêmes extrémités (donc de même longueur m). Soit E l'ensemble des nombres $(0 \ , 1 \ , \dots \ , m - 1)$. On peut définir une bijection f de E sur E , soit $h = f(k)$, par la condition

(3.1) $$h \text{ est maximal tel que } x_h\ y_{k+1} \leqslant y_k \ ,$$

et alors on a

(3.2) $$x_h\ y_{k+1} = x_{h+1}\ y_k \ .$$

Démonstration.

a. Existence de l'application f . - Comme

$$x_0\ y_{k+1} = a \leqslant y_k \quad \text{et} \quad x_m\ y_{k+1} = y_{k+1} \not\leqslant y_k \ ,$$

il existe h maximal tel que $x_h\ y_{k+1} \leqslant y_k$, et pour $h' \leqslant h$,

$$x_{h'}\ y_{k+1} \leqslant x_h\ y_{k+1} \leqslant y_k \ ,$$

ce qui prouve l'existence de f : $h = f(k)$.

b. Formule (3.2). - De $x_h\ y_{k+1} \leqslant y_k$, on tire $x_h\ y_{k+1} = x_h\ x_h\ y_{k+1} \leqslant x_h\ y_k$ ou $x_h\ y_{k+1} \leqslant x_h\ y_k$, et par suite

(3.3) $$x_h\, y_{k+1} = x_h\, y_k \,.$$

D'ailleurs, par double application de (1.(iii)),

(3.4) $$x_h\, y_k \prec x_{h+1}\, y_k \prec x_{h+1}\, y_{k+1}$$

et d'après (3.3),

(3.5) $$x_h\, y_{k+1} \prec x_{h+1}\, y_k \prec x_{h+1}\, y_{k+1} \,.$$

On ne peut avoir $x_{h+1}\, y_k = x_{h+1}\, y_{k+1}$, car le premier membre est $\leqslant y_k$, et le deuxième ne peut l'être, d'après la définition de h . Comme d'ailleurs, en vertu de (1.(iii)), $x_h\, y_{k+1} \prec x_{h+1}\, y_{k+1}$, il résulte de (3.5) que l'on a

(3.2) $$x_h\, y_{k+1} = x_{h+1}\, y_k < x_{h+1}\, y_{k+1} \,.$$

c. f <u>est une bijection</u>. - Prouvons $k' > k \to f(k') \neq f(k)$.

Si $x_{h+1}\, y_{k'} = x_h\, y_{k'+1}$, on en déduit

$$x_{h+1}\, y_{k'}\, y_{k+1} = x_h\, y_{k'+1}\, y_{k+1} \quad \text{ou} \quad x_{h+1}\, y_{k+1} = x_h\, y_{k+1}$$

contrairement à la formule démontrée $x_h\, y_{k+1} < x_{h+1}\, y_{k+1}$.

L'application f est donc une injection de E dans E , et par suite une bijection puisque E est fini.

<u>Applications</u>. - Un treillis semi-modulaire, et par suite un treillis modulaire, vérifie la condition (1.(iii)), si on le considère comme demi-treillis par rapport à une quelconque des deux opérations.

4. <u>Application à la théorie de la dépendance</u>.

Appelons irréductible dans un demi-treillis D , tout élément p , tel que $p = ab$ entraîne $p = a$ ou $p = b$.

Un facteur a_i sera dit superflu dans un produit $a_1 \ldots a_n$ si on peut le supprimer sans changer la valeur du produit. Un produit contenant des facteurs superflus sera dit superflu.

PROPOSITION 4.1. - Les axiomes

(4.(i)) Tout élément est produit d'un nombre fini d'éléments irréductibles ;

(4.(ii)) $ap \prec a$, $\forall$ élément irréductible p (<u>Loi de couverture</u>) ;

(4.(iii)) Si $b < a$, $\exists\, c \neq b$ tel que $b = ac$;

entraînent

(4.(iv)) $b \precsim a$ entraîne $bc \precsim ac$, $\forall c \in D$ (<u>Compatibilité de la couverture</u>).

<u>Démonstration</u>. - De $b \precsim a$, on déduit $b = aq$, d'après (4.(iii)), et par suite,

$$aqc = (ac)q \precsim ac \qquad \text{d'après (4.(ii))},$$

où q est irréductible.

PROPOSITION 4.2. - L'axiome (4.(ii)) (loi de couverture) entraîne l'axiome suivant :

(4.(v)) $ap \leqslant q$ et $a \not\leqslant q$ entraînent $aq \precsim p$ (<u>Axiome d'échange</u>), car $ap \leqslant q$ entraîne $ap \leqslant aq$. Comme $aq \precsim a$, et $aq \neq a$, on a

$$ap = aq \quad \text{et} \quad aq \precsim ap \leqslant p \; .$$

PROPOSITION 4.3. - L'axiome (4.(iv)) (compatibilité de la couverture) et l'axiome

(4.(vi)) D possède un élément neutre e (universel) et tout élément irréductible est maximal,

entraînent l'axiome (4.(ii)) (loi de couverture).

Car $p \prec e$ entraîne d'après (4.(iv))

$$ap \precsim a \; .$$

PROPOSITION 4.4 (<u>Théorème d'échange ou de la base incomplète, ou propriété d'échange généralisée</u>). - Dans un demi-treillis satisfaisant à l'axiome (4.(i)) et à l'axiome (4.(v)), étant donnés deux éléments $a = p_1 \ldots p_n$ et $b = q_1 \ldots q_m$ où les p_i et q_j sont irréductibles, le produit b n'étant pas superflu, et $a \leqslant b$, on peut construire une suite de produits $a_i = a$, de la forme $a_i = z_1 \ldots z_n$ où i des facteurs z sont des facteurs q arbitrairement choisis, et où les $(n - i)$ autres facteurs sont certains facteurs p_i .

<u>Démonstration</u>. - Par récurrence, le théorème est trivial pour $i = 0$. Supposons

$$a_i = q_1 \ldots q_i \, p'_1 \ldots p'_{n-i} = a \tag{4.1}$$

où les p' sont certains facteurs p . On a $(q_1 \ldots q_i) \not\leqslant q_{i+1}$, sinon q_{i+1} serait superflu dans b . D'ailleurs $a_i = a \leqslant b$, et par suite, $a_i \leqslant q_{i+1}$. Il existe donc, parmi les facteurs z_j de a_i , un produit partiel $Q = z_1 \ldots z_k$, tel que

$$Q \not\leqslant q_{i+1} \; , \tag{4.2}$$

et que tout produit P , contenant des facteurs $z_1 , \ldots , z_k$ en nombre strictement moindre que k , soit tel que $P \not\leqslant q_{i+1}$.

Si Q est ainsi choisi, parmi les facteurs $z_1 , \dots , z_k$ figure au moins un p' , car sinon on aurait $q_1 \dots q_k \leqslant q_{i+1}$, et q_{i+1} serait superflu dans l'expression de b . On a, par exemple, $z_k = p'_{n-i}$ et

(4.3) $Q = z_1 \dots z_{k-1} p'_{n-i} \leqslant q_{i+1}$ avec $z_1 \dots z_{k-1} \not\leqslant q_{i+1}$,

et, en appliquant l'axiome (4.(v)),

(4.4) $$z_1 \dots z_{k-1} q_{i+1} \leqslant p'_{n-i} .$$

Posons alors

(4.5) $$a_{i+1} = (q_1 \dots q_i \, p'_1 \dots p'_{n-1-i}) q_{i+1} = cq_{i+1}$$

alors que (4.1) $a_i = cp'_{n-i}$.

On a $c \leqslant z_1 \dots z_{k-1}$, puisque les z_j sont des facteurs communs à a_i et à a_{i+1} $(1 \leqslant j \leqslant k - 1)$. Donc

(4.6) $a_{i+1} = cq_{i+1} \leqslant z_1 \dots z_{k-1} q_{i+1} \leqslant p'_{n-i}$ et $ca_{i+1} = a_{i+1} \leqslant cp'_{n-i} = a_i$.

De même

$$a_i = cp'_{n-i} \leqslant z_1 \dots z_{k-1} p'_{n-i} \leqslant q_{i+1} \quad \text{et} \quad ca_i = a_i \leqslant cq_{i+1} = a_{i+1} .$$

D'où l'égalité

$$a_i = a_{i+1} = a .$$

Remarque. - La relation d'ordre dans un demi-treillis satisfaisant aux axiomes (4.(i)) et (4.(v)), $a \leqslant b$ revient aux axiomes de dépendance de Van Der Waerden : b dépend de a , à condition de raisonner sur les classes d'équivalence D/R où $(x , y) \in R$ si, et seulement si, x dépend de y et y dépend de x .

Ces axiomes sont en effet :

1° p_1 dépend de $(p_1 , \dots , p_n)$;

2° l'axiome d'échange ;

3° p dépend de $(p_1 , \dots , p_n)$; si chaque p_i dépend de $(q_1 , \dots , q_m)$ entraîne que p dépend de $(q_1 , \dots , q_m)$, ce qui se traduit par $(p_1 \dots p_n) \leqslant p$; $(q_1 \dots q_m) < p_i$ entraîne $q_1 \dots q_n < p_1 \dots p_n$, ce qui est évident dans un demi-treillis puisque $p_1 \dots p_n$ est le plus grand minorant commun des p_i . Comme d'ailleurs " a dépend de b " entraîne " ac dépend de bc ", la relation R est compatible avec l'opération du demi-treillis, et les classes d'équivalence forment aussi un demi-treillis.

PROPOSITION 4.5.

a. Les axiomes (4.(i)) et (4.(v)) dans un demi-treillis, entraînent les axiomes (4.(iii)), (4.(ii)), et (4.(iv)), et par suite le théorème de Jordan-Hölder.

b. Si deux produits d'éléments irréductibles non superflus sont égaux, ils ont le même nombre de facteurs (Théorème de la dimension ou de Kuroš-Ore).

Démonstration.

a. En reprenant les notations de la proposition 4.4, on a

$$a = a_m = q_1 \dots q_m p'_1 \dots p'_{n-m}$$

ce qui prouve que $n \geqslant m$ et que $a \leqslant b$ entraîne que a est un multiple de b [axiome (4.(iii))]. La relation d'ordre coïncide alors avec la divisibilité dans D. Dès lors, supposons

$$ap \leqslant b < a .$$

On a $b = au$; si u admet q comme facteur irréductible, $au \leqslant aq$, et il existe au moins un q pour lequel $aq < a$ (inégalité stricte). Donc

$$ap \leqslant aq < a \quad \text{ou} \quad q \leqslant a .$$

Comme $ap \leqslant q$, on en déduit, d'après (4.(v)), $aq \leqslant p$ et, par suite, $aq \leqslant ap$ et $aq = ap$, ce qui prouve que $ap \prec a$ (loi de couverture). Par suite, la compatibilité de la couverture et le théorème de Jordan-Hölder sont valables dans D .

b. Si $p_1 \dots p_n = q_1 \dots q_m$, on a, d'après (a), $n \leqslant m$ et $m \leqslant n$, donc $m = n$ si les produits des deux membres ne sont pas superflus.

II. Intercalaires de Zassenhauss.

Le but de cette partie est de donner une démonstration du théorème de Schreier, valable aussi bien pour les treillis modulaires, les équivalences, que pour les suites de composition d'un groupe, à l'aide des intercalaires de Zassenhauss.

5. Axiomes demandés dans la structure D .

(5.(i)) D a une structure de demi-treillis, avec opération notée $\wedge$ et relation d'ordre notée $\leqslant$.

(5.(ii)) D a une structure de demi-groupe multiplicatif.

(5.(iii)) La relation d'ordre est compatible avec la multiplication.

Nous supposerons de plus qu'il existe une partie G de D satisfaisant aux conditions suivantes :

(5.(iv)) G est un demi-treillis (partie stable pour $\wedge$).

(5.(v)) On a $gg' = g'g$ si et seulement si $gg' \in G$ $(g , g' \in G)$.

(5.(vi)) $g^2 = g$; $\forall g \in G$.

(5.(vii)) $m \leqslant mg$ et $m \leqslant gm$, $\forall m \in D$ et $\forall g \in G$.

(5.(viii)) G satisfait à deux égalités de Dedekind

(a) $$g \leqslant g'' \implies g(g' \wedge g'') = (gg') \wedge g'' ,$$

(b) $$g \leqslant g'' \implies (g' \wedge g'')g = (g'g) \wedge g'' .$$

(5.(ix)) Nous dirons que, si $K \subseteq D$, m est K-normal pour m' , et nous noterons $m \mid_K m'$, si m est permutable avec tout élément de K inférieur ou égal à m' ,

$$m \mid_K m' \iff mk = km , \ \forall k \in K , \ k \leqslant m' .$$

Nous noterons par le signe $\lhd_K$ l'intersection de la relation d'ordre et de la relation $\mid_K$. Dans ces conditions, l'axiome (5.(ix)) s'énonce ainsi

$$g \lhd_G g' \ \text{ et } \ g'' \mid_G g' \implies gg'' \lhd_G g'g'' .$$

Exemples.

1° Un treillis modulaire est une structure D , où $\vee$ est la multiplication, et où $G = D$. La relation de normalité est $D \times D$.

2° Les relations sur un ensemble E , vérifient les axiomes (5.(i)) à (5.(viii)), l'ensemble G étant l'ensemble des relations d'équivalence.

3° Les complexes d'un groupe Γ forment un ensemble D avec pour opérations l'intersection ensembliste et la multiplication des complexes. G est l'ensemble des sous-groupes de Γ .

6. Conséquences des axiomes (5.(i)) à (5.(ix)).

PROPOSITION 6.1

(α) Si m est K-normal pour m' , il est K-normal pour $m'' \leqslant m'$. En particulier, si m est K-normal pour deux éléments, il est K-normal pour leur intersection.

(β) Si m et m' sont K-normaux pour m'' , mm' est K-normal pour m'' . (Démonstration immédiate.)

PROPOSITION 6.2. - Les (K , G) égalités de Dedekind $(G \subseteq K)$

(a) $$k \leqslant g'' \implies k(g' \wedge g'') = (kg') \wedge g'' ,$$

(b) $$k \leqslant g'' \implies (g' \wedge g'')k = (g'k) \wedge g'' \qquad (g' , g'' \in G , \quad k \in K) ,$$

étant supposées vérifiées, on a

(6.1) $$k \triangleleft_K g'' \implies (kg') \wedge g'' = (g'k) \wedge g'' .$$

(6.2) $$g \triangleleft_K g' \implies (g \wedge g'') \triangleleft_K (g' \wedge g'') .$$

<u>Démonstration</u>.

1° $(kg') \wedge g'' = k(g' \wedge g'') = (g' \wedge g'')k = (g'k) \wedge g''$ par double application des égalités de Dedekind et de la normalité.

2° Posons $g' \wedge g'' = h'$, $g \wedge g'' = h$, et soit $k \in K$, $k \leqslant h'$. On a

$$kh = k(g \wedge g'') = k(g \wedge g' \wedge g'') = k(g \wedge h') = (kg) \wedge h' .$$

Mais $k \leqslant g'$ et, comme $g \triangleleft g'$, on a $kg = gk$. Donc $kh = (gk) \wedge h'$ avec $k \leqslant h'$, et en appliquant l'égalité (b) de Dedekind

$$kh = (g \wedge h')k = (g \wedge g' \wedge g'')k = hk .$$

PROPOSITION 6.3. - Si $g \leqslant g'$, on a $gg' = g'g = g'$.

En effet, d'après (5.(iii)) et (5.(vi)), on tire de $g \leqslant g'$ et $g' \leqslant g'$, $gg' \leqslant g'$, et d'après (5.(vii)), $g' \leqslant gg'$. D'où $g' = gg'$; et de plus, $gg' = g'g$ d'après (5.(v)).

PROPOSITION 6.4. - Dans une structure D , les seuls couples (g , g') $(g \leqslant g')$ correspondant à un couple (g'' , g'') formé d'éléments égaux sont eux-mêmes formés d'éléments égaux $(g , g' , g'' \in G)$.

Autrement dit, les égalités $gh = g'h$, $h \wedge g = h \wedge g'$, et l'inégalité $g \leqslant g'$ entraînent $g = g'$.

On a en effet

$$\begin{aligned} g &= g(g \wedge h) \quad \text{(proposition 6.3)} \\ &= g(g' \wedge h) = (gh) \wedge g' \quad \text{(DEDEKIND)} \\ &= (g'h) \wedge g' = g' \quad \text{(d'après (5.(vii)))}. \end{aligned}$$

PROPOSITION 6.5 (Lemme de Zassenhauss). - Soient quatre éléments de G , a_1 , a_2 et b_1 , b_2 tels que

$$a_1 \lhd a_2 \quad \text{et} \quad b_1 \lhd b_2 .$$

Dans ces conditions,

a. Les éléments $a_{1,j} = a_1(a_2 \wedge b_j)$ et $b_{i,1} = b_1(b_2 \wedge a_i)$ $(i , j = 1 , 2)$ sont des éléments de G ;

b. $a_{1,1} \lhd a_{1,2}$ et $b_{1,1} \lhd b_{2,1}$;

c. Les couples $(a_{1,1} , a_{1,2})$ et $(b_{1,1} , b_{2,1})$ sont correspondants ;

d. Chacun des couples précédents est correspondant au couple

$$((a_1 \wedge b_2)(a_2 \wedge b_1) , a_2 \wedge b_2) .$$

Démonstration.

a. De $a_1 \mid a_2$, on tire $a_1 \mid a_2 \wedge b_j$, et par suite, a_1 est permutable avec $a_2 \wedge b_j \in G$. Donc $a_1(a_2 \wedge b_j) \in G$.

b. De $b_1 \lhd b_2$, on tire $a_2 \wedge b_1 \lhd a_2 \wedge b_2$ (proposition 6.2), et comme $a_1 \mid a_2 \wedge b_2$, on tire de (6.(ix)), $a_1(a_2 \wedge b_1) \lhd a_1(a_2 \wedge b_2)$.

c. Prouvons les égalités de correspondance ; il faut trouver d'abord

$$a_{1,1}\ b_{2,1} = a_{1,2}\ b_{1,1} . \tag{6.3}$$

Le premier membre de (6.3) s'écrit

$$a_1(b_1 \wedge a_2)\ b_1(b_2 \wedge a_2) = a_1\ b_1(a_2 \wedge b_2) ;$$

dans le deuxième membre, $a_1(a_2 \wedge b_2)\ b_1(a_1 \wedge b_2)$, comme $b_1 \mid a_2 \wedge b_2$, on peut permuter les deuxième et troisième facteurs, puis supprimer $a_1 \wedge b_2 \leqslant a_2 \wedge b_2$. Pour prouver

$$a_{1,1} \wedge b_{2,1} = a_{1,2} \wedge b_{1,1} , \tag{6.4}$$

on utilise les égalités de Dedekind.

Pour le premier membre de (6.4), en appliquant deux fois les G-égalités de Dedekind, il devient

$$(a_1(b_1 \wedge a_2)) \wedge (b_1(b_2 \wedge a_2)) = (a_1\ b_1) \wedge a_2 \wedge (a_2\ b_1) \wedge b_2$$

$$= (a_1\ b_1) \wedge a_2 \wedge b_2 \quad \text{(en vertu de (5.(vii)))}.$$

Également par double application des G-égalités de Dedekind, le deuxième membre de (6.4) devient

$$(a_1(a_2 \wedge b_2)) \wedge (b_1(b_2 \wedge a_1)) = (a_1\ b_2) \wedge a_2 \wedge (b_1\ a_1) \wedge b_2 = (b_1\ a_1) \wedge a_2 \wedge b_2 \ .$$

Mais de $b_1 \lhd b_2$, on déduit (égalité 6.1)

$$(b_1\ a_1) \wedge b_2 = (a_1\ b_1) \wedge b_2 \ ,$$

ce qui démontre les égalités de correspondance.

d. La démonstration résultera de la proposition 6.6 ci-dessous. Calculons

$$U = a_{1,1} \wedge b_{1,1} = (a_1\ b_1) \wedge a_2 \wedge (b_1\ a_1) \wedge b_2 = (a_1\ b_1) \wedge a_2 \wedge b_2$$

(par double application de l'égalité de Dedekind et la remarque précédente. On voit de même que

$$(a_1 \wedge b_2)(a_2 \wedge b_1) = ((a_1 \wedge b_2)b_1) \wedge a_2 = (a_1\ b_1) \wedge b_2 \wedge a_2 = U \ .$$

De même

$$a_{1,2} \wedge b_{1,2} = (a_1\ b_2) \wedge a_2 \wedge (b_1\ a_2) \wedge b_2 = a_2 \wedge b_2 \ .$$

PROPOSITION 6.6. - Si 4 éléments de G sont tels que $a \lhd b$ et $c \lhd d$ et que les couples (a , b) et (c , d) sont correspondants, ils sont aussi correspondants au couple $(a \wedge c , b \wedge d)$.

Montrons d'abord

$$a(b \wedge d) = b(a \wedge c) \ .$$

Le premier membre s'écrit, en appliquant l'égalité de Dedekind, $(ad) \wedge b = (bc) \wedge b = b$, et le deuxième $b(b \wedge d) = b$. Puis

$$a \wedge b \wedge d = a \wedge a \wedge c = a \wedge c = b \wedge a \wedge c \ .$$

Des propositions 6.4 et 6.5, on déduit immédiatement les théorèmes de Schreier et de Jordan-Hölder pour les structures D , par l'emploi des intercalaires de Zassenhauss.

PROPOSITION 6.7.

a. Soient, dans une structure D , deux chaînes (non strictes) d'éléments de G , de mêmes extrémités, et finies, où chaque élément est normal dans le suivant $x_i \lhd x_{i+1}$ et $y_j \lhd y_{j+1}$; les deux chaînes

$$x_{ij} = x_i(x_{i+1} \wedge y_j) \quad \text{et} \quad y_{ij} = y_j(y_{j+1} \wedge x_i)$$

contiennent respectivement les éléments de x_i et de y_j. Chaque élément est normal dans le suivant, et les couples d'éléments des deux chaînes sont deux à deux correspondants (SCHREIER).

b. Deux chaînes maximales finies d'éléments de G, telles que chacun d'eux soit normal dans le suivant, et de mêmes extrémités, ont la même longueur (JORDAN-HÖLDER).

Remarques.

1° Les propositions 6.1, 6.2, 6.3, 6.4 et 6.6 qui n'exigent pas l'axiome (5.(ix)) sont valables aussi bien si D est l'ensemble des complexes d'un groupe, que le demi-groupe des relations binaires sur un ensemble E.

2° Les axiomes (5.(v)), (5.(vi)) et (5.(vii)) peuvent être remplacés par les conditions suivantes : D est unitaire, et il existe dans le demi-groupe D un antiautomorphisme involutif et isotone : $f(m) = m^0$, $\forall\ m \in D$. Les éléments de G vérifient alors

$e \leqslant g$ (réflexivité) ;
$g = g^0$ (symétrie) ;
$g^2 \leqslant g$ (transivité) .

(Dans les exemples précédents G sera respectivement l'ensemble des sous-groupes ou l'ensemble des équivalences de E.)

3° Les mêmes considérations permettent aussi de définir dans D, des notions duales de produit et d'intersection directe.

III. Autre démonstration du théorème de Jordan-Hölder dans le cas d'une relation de normalité.

7. Cas du demi-treillis.

La démonstration du théorème du § 2 peut s'appliquer dans un demi-treillis, à condition de définir de façon adéquate la relation de normalité ($a \mid b$: a normal pour b).

Nous admettrons :

(7.1) $a \mid a$ (Réflexivité) ;

(7.2) $a \mid b$ et $b' \leqslant b$ entraînent $a \mid b'$;

(7.3) $a \mid b$ et $a' \mid b \implies a \wedge a' \mid b$.

Nous poserons

$$a \trianglelefteq b \quad \text{si} \quad a \mid b \quad \text{et} \quad a \leqslant b \ ,$$

et nous dirons alors a normal dans b .

Dans l'ensemble G des sous-groupes d'un groupe Γ , la relation $a \mid b$, si et seulement si le complexe a est permutable avec tout élément de b , satisfait aux relations (7.1), (7.2) et (7.3).

Nous écrirons $a \preccurlyeq' b$ si $a \trianglelefteq c$, $c \trianglelefteq b$ entraîne $c = a$ ou $c = b$; $a \prec' b$ si $a \preccurlyeq' b$ et $a \neq b$.

Nous dirons qu'une chaîne, d'extrémités a et b , est normale et maximale si $x_i \prec' x_{i+1}$, $\forall\ i$, avec $a = x_0$, $b = x_m$.

Il est clair que, si on prend pour relation de normalité la relation universelle dans le demi-treillis G , la relation $\prec'$ coïncide avec la relation de couverture $\prec$.

Dans l'exemple des sous-groupes d'un groupe Γ , on a la relation

$$(7.4) \qquad a \prec' b \ \text{ et } \ z \mid b \implies a \wedge z \preccurlyeq' b \wedge z \ ,$$

comme nous le démontrerons au § 8 ci-dessous, qui généralise l'axiome de la compatibilité de la couverture. Le théorème de Jordan-Hölder prend ici la forme :

THÉORÈME de Jordan-Hölder. - Dans un $\wedge$-demi-treillis G satisfaisant aux axiomes (7.1), (7.2), (7.3) et (7.4), toutes les chaînes finies, normales, maximales, de mêmes extrémités, ont la même longueur.

<u>Démonstration</u>. - Soient deux chaînes normales, maximales, de mêmes extrémités

$$X : \ a = x_0 \prec' x_1 \prec' \dots \prec' x_i \prec' x_{i+1} \prec' \dots \prec' x_m = b \ ,$$

$$Y : \ a = y_0 \prec' y_1 \prec' \dots \prec' y_i \prec' y_{i+1} \prec' \dots \prec' y_n = b \ .$$

Comme $y_{n-1} \triangleleft x_m = b$, on en déduit d'après (7.2), $y_{n-1} \mid x_i$, $\forall\ i$, et par suite d'après (7.4)

$$x_i \wedge y_{n-1} \prec' x_{i+1} \wedge y_{n-1} \ .$$

Si h est l'indice maximal tel que $x_h \leqslant y_{n-1}$ $(0 \leqslant h < n)$, on a

$$\forall\ i \leqslant h \ , \qquad x_i \wedge y_{n-1} = x_i \quad \text{et} \quad x_{h+1} \wedge y_{n-1} < x_{h+1} \qquad \text{(inégalité stricte).}$$

Comme d'ailleurs $x_{h+1} \mid x_{h+1}$ (d'après (7.1)) et $y_{n-1} \mid x_{h+1}$, on déduit de (7.3)

$$x_{h+1} \wedge y_{n-1} \lhd x_{h+1} ,$$

et par suite

$$x_h = x_h \wedge y_{n-1} \preccurlyeq' x_{h+1} \wedge y_{n-1} \lhd x_{h+1}$$

et comme $x_h <' x_{h+1}$, on en tire $x_h = x_{h+1} \wedge y_{n-1}$, et la chaîne, d'extrémités a et y_{n-1} , normale, maximale, d'éléments $x_i \wedge y_{n-1}$, a une longueur certainement inférieure ou égale à $m - 1$. Donc, par récurrence, $n - 1 \leqslant m - 1$, et en renversant les rôles des deux chaînes, $n = m$.

8. Axiome de voisinage et axiome de compatibilité de la couverture.

PROPOSITION 8.1

a. Dans une structure D , satisfaisant aux axiomes (5.(i)) à (5.(vii)) du § 5, l'axiome

(8.1) $\qquad y <' xy \implies x \wedge y <' y$ (Axiome de voisinage)

entraîne l'axiome

(8.2) $\qquad x <' y$ et $z \mid y \implies x \wedge z \preccurlyeq' y \wedge z$,

à condition que $u \mid v$ et $u' \mid v \implies uu' \mid v$.

b. Si la relation de normalité est la relation universelle, l'axiome (8.2) et l'axiome (8.1) sont équivalents (c'est en particulier le cas des treillis).

Démonstration.

a. Montrons que la négation de (8.2) entraîne la négation de (8.1). Supposons $x <' y$; $\exists\, z$ et c tels que

$$x \wedge z \lhd c \lhd y \wedge z \quad \text{(inclusions strictes)}.$$

En posant $y \wedge z = X$ et $x = Y$, on a

$$X \wedge Y = x \wedge z \quad \text{et} \quad X \wedge Y \not<' X .$$

Mais d'ailleurs $x = Y \leqslant XY$ [Axiome (5.(vii))] et $XY = (y \wedge z)x \leqslant yx = y$ [Axiome (5.(iii)) et proposition 6.3, conséquence de (5.(iii)) et (5.(v))]. On a

$$x \lhd y \implies x \lhd x(y \wedge z) ,$$

et comme $x \lhd y$ et $(y \wedge z) \lhd y$, il s'en suit

$$x(y \wedge z) \lhd y .$$

Par suite, comme $x <' y$, $x \lhd x(y \wedge z) \trianglelefteq y$ entraine $x(y \wedge z) = x$ ou

$x(y \wedge z) = y$. La première éventualité est impossible car elle entraîne $y \wedge z \leqslant x$, et par suite, $x \wedge z = y \wedge z$, contrairement à l'hypothèse. Il reste donc

$$x(y \wedge z) = YX = y \quad \text{et} \quad Y <' YX \quad \text{avec} \quad X \wedge Y \not<' Y .$$

b. Si $z \mid y$, $\forall y , z$, de $y <' xy \Longrightarrow x \wedge y <' y$, on tire, en faisant $z = x$, et en appliquant (8.2),

$$y <' xy \Longrightarrow y \wedge x \leqslant' xy \wedge x \quad \text{ou} \quad y \wedge x \leqslant' x .$$

On ne peut avoir l'égalité, car alors $x \leqslant y$, et $xy = y$ et non $y <' xy$.

<u>Remarque</u>. - On voit immédiatement que les couples (y , xy) et $(x \wedge y , x)$ sont alors correspondants si $y \lhd xy$, ce qui peut servir à la démonstration classique du théorème de Schreier, sans les intercalaires de Zassenhauss. On en déduit alors que, dans deux chaînes normales, maximales, de mêmes extrémités, les couples sont deux à deux correspondants.

BIBLIOGRAPHIE

Pour le principe des démonstrations employées, nous renvoyons, par exemple, aux travaux suivants :

CHÂTELET (Albert). - Arithmétique et algèbre modernes, Vol. 1. - Paris, Presses universitaires de France, 1954 ("Euclides", 1re section).

en particulier, p. 176 et suivantes ;

CHÂTELET (Albert). - Les théorèmes de Jordan-Hölder et Schreier, Revue scient., t. 85, 1947, p. 579-596.

DUBREIL (Paul). - Algèbre, Vol. 1, 2e éd. - Paris, Gauthier-Villars, 1954 (Cahiers scientifiques, 20).

théorème 5, p. 173 ;

DUBREIL-JACOTIN (Mme M.-L.), LESIEUR (L.) et CROISOT(R.). - Leçons sur la théorie des treillis des structures algébriques ordonnées et des treillis géométriques. - Paris, Gauthier-Villars, 1953 (Cahiers scientifiques, 21).

notamment les chapitres VII et IX de la première partie ;

GLIVENKO (Valère). - Théorie générale des structures. - Paris, Hermann, 1938 (Act. scient. et ind., 652 ; exposés d'analyse générale, 9).

pages 22 et suivantes ;

LORENZEN (Paul). - Eine Bewerkung zum Schreierschen Verfeinerungssatz, Math. Z., t. 49, 1943/44 , p. 647-653.

VAN DER WAERDEN (B. L.). - Moderne Algebra, t. 1, 3te Auflage. - Berlin, Springer-Verlag, 1950 (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 33).

chapitre 5, n° 36, et chapitre 6, n° 48.