Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Françoise Bertrandias

Caractérisation des ensembles S_q par la répartition modulo 1 en p-adique

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 17, n° 2 (1963-1964), exp. n° 11, p. 1-20
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1963-1964__17_2_A1_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
17e année, 1963/64, n° 11

24 février 1964

CARACTÉRISATION DES ENSEMBLES S_q PAR LA RÉPARTITION MODULO 1 EN p-ADIQUE

par Mme Françoise BERTRANDIAS

1. Définition des ensembles S.

On se propose de rechercher, pour les ensembles S_q, des caractérisations analogues à celles de l'ensemble S, au moyen de la répartition modulo 1.

1.1 Rappelons la définition de S, ensemble des nombres de Pisot ([4], [8]) : un élément θ de S est un entier algébrique sur Q, réel, supérieur à 1, dont tous les conjugués ont une valeur absolue strictement inférieure à 1.

L'étude du comportement modulo 1 de $\lambda\theta^n$ permet de caractériser θ soit parmi les nombres réels, soit parmi les nombres algébriques :

THÉORÈME A. - Soit un nombre réel $\theta > 1$. θ appartient à S si et seulement s'il existe un réel $\lambda \neq 0$ tel que

$$\sum_{n=1}^{N} n((\lambda\theta^n))^2 = o(N) .$$

THÉORÈME B. - Soit un nombre algébrique réel $\theta > 1$. θ appartient à S si et seulement s'il existe un réel $\lambda \neq 0$ tel que

$$((\lambda\theta^n)) \to 0 \qquad \text{quand} \quad n \to +\infty$$

(Notation : pour un α réel : $\alpha = [[\alpha]] + ((\alpha))$ où $[[\ ]] \in Z$ et $1/2 \leq ((\ )) < \frac{1}{2}$).

Remarque. - L'hypothèse du théorème A est vérifiée, par exemple si

$$\sum_{n=1}^{\infty} ((\lambda\theta^n))^2 < +\infty$$

ou si

$$|((\lambda\theta^n))| = o(\frac{1}{\sqrt{n}}) .$$

1.2 Rappelons la définition des ensembles S_q et $S_q^{(p)}$ [5]. Soit un polynôme

$$P(x) = q\,x^s + q_1\,x^{s-1} + \dots + q_o \qquad (q_i \in Z)$$

vérifiant les conditions :

(C) $q = \prod_{i \in \mathfrak{I}} p_i^{e_i}$ (p_i i-ième nombre premier $\mathfrak{I}$ ensemble fini d'indices distincts)

$q_o \neq 0$.

(C_o) $P(x)$ possède une racine réelle $\theta_o > 1$; les autres racines de $P(x)$ dans C ont une valeur absolue < 1 .

$(\overline{C_i})$ $(i \in \mathfrak{I})$ $P(x)$ possède une racine θ_i dans Q_{p_i} et $|\theta_i|_{p_i} > 1$; les autres racines de $P(x)$ dans Ω_{p_i} ont une valeur absolue p_i-adique $\leqslant 1$

(Notations : C corps des complexes, Q_p corps des nombres p-adiques, Ω_p complétion de la clôture algébrique de Q_p).

(F) Il existe un polynôme $A(x)$ de $Z[x]$ tel que :

$$|A(x)| \leqslant |P(\tfrac{1}{x})| \qquad \text{pour} \quad |x| = 1 \quad \text{dans} \quad C ,$$

$$|A(o)| \geqslant q \qquad \text{et} \qquad |A(o)|_{p_i} > |q|_{p_i} .$$

L'ensemble S_q est l'ensemble des nombres réels θ_o racines d'un polynôme $P(x)$ vérifiant les conditions (C) , (C_o) , $(\overline{C_i})$ et (F) .

L'ensemble $S_q^{(p_i)}$ est l'ensemble des nombres θ_i de Q_{p_i} racines d'un polynôme vérifiant les mêmes conditions.

Lorsque l'ensemble $\mathfrak{I}$ est vide, l'ensemble $S_q = S_1$ est identique à l'ensemble S ((F) est vérifiée pour $A(x) = P(x)$).

C. PISOT a démontré que l'ensemble S_q est fermé dans C (ce qui généralise la propriété remarquable de S) ; et que $S_q^{(p_i)}$ est fermé dans Q_{p_i} . Si l'on supprime la condition (F), on ne sait pas si les ensembles obtenus sont fermés.

1.3 Définition de l'ensemble S_{q^*} . - On peut définir simultanément les ensembles S_q de R et $S_q^{(p_i)}$ de Q_{p_i} en se plaçant dans le produit cartésien $R \times \prod_{i \in \mathfrak{I}} Q_{p_i}$, que l'on notera $Q_{(p_i)^*_{i \in \mathfrak{I}}}$ ou, en abrégé $Q_{(p_i)^*}$. Un élément

$\xi = (\xi_0 , \ldots , \xi_i , \ldots)$ de $Q_{(p_i)*}$ est défini par la donnée de ses composantes réelle ξ_0, et p_i-adique ξ_i $(i \in \mathfrak{J})$. La définition de l'addition et de la multiplication sur les composantes donne à $Q_{(p_i)*}$ une structure d'anneau et

$$\|\xi\| = \sup\{ |\xi_0| , |\xi_i|_{p_i} \}$$

définit une pseudo-valuation sur cet anneau

$$(\|\xi\| = 0 \iff \xi = 0 , \quad \|\xi + \xi'\| \leqslant \|\xi\| + \|\xi'\| \quad \text{et} \quad \|\xi\xi'\| \leqslant \|\xi\| \, \|\xi'\|) .$$

DÉFINITION. - L'ensemble $\mathbb{S}_{q^*}$ est l'ensemble des éléments θ de l'anneau $Q_{(p_i)*}$, de composantes réelle θ_0 et p_i-adique θ_i, qui sont racines d'un polynôme $P(x)$ vérifiant les conditions (C), (C_0) et $(\overline{C_i})$.

(" θ racine de $P(x)$ " signifie $P(\theta) = 0$, c'est-à-dire $P(\theta_0) = 0$, $P(\theta_i) = 0$ $(i \in \mathfrak{J})$.) On remarque que les rationnels $\frac{n}{q}$ avec $n > q$ appartiennent à $\mathbb{S}_{q^*}$.

Si l'on se limite aux éléments θ de $\mathbb{S}_{q^*}$, tels que le polynôme $P(x)$ vérifie la condition (F), on obtient un ensemble fermé dans $Q_{(p_i)*}$ muni de la pseudo-valuation $\| \ \|$, les composantes réelle S_q et p_i-adique $S_q^{(p_i)}$ de cet ensemble étant fermées respectivement dans R et dans Q_{p_i}.

Dans la suite, on s'intéressera aux ensembles $\mathbb{S}_{q^*}$, sans imposer la condition supplémentaire (F).

Dans le § 2, on définira une application de $Q_{(p_i)*}$ dans les réels modulo 1, généralisant le reste modulo 1 de R.

Dans le § 3, cette application permettra de généraliser à $\mathbb{S}_{q^*}$ les caractérisations A et B de S.

1.4 Définition de l'ensemble $\mathbb{S}_q$. - Parallèlement à l'étude des ensembles $\mathbb{S}_{q^*}$, on peut mener celle des ensembles $\mathbb{S}_q$ correspondant à une famille de polynômes $P(x)$ vérifiant les conditions (C), $(\overline{C_i})$ $(i \in \mathfrak{J})$, et (C'_0) :

(C'_0) les racines de $P(x)$ dans C ont une valeur absolue < 1.

C. PISOT a montré [6] que la famille des fractions rationnelles $\dfrac{A(x)}{x^s P(1/x)}$

constitue une famille normale dans le cercle $|x| < 1$ de C , lorsque $P(x)$ vérifie les conditions (C) , (C'_o) , $(\overline{C_i})$ et (F) .

On peut définir simultanément les racines θ_i de $P(x)$ dans Q_{p_i} en se plaçant dans le produit cartésien $\prod_{i\in\mathfrak{J}} Q_{p_i}$ que l'on notera $Q_{(p_i)_{i\in\mathfrak{J}}}$ ou, en abrégé, $Q_{(p_i)}$. Comme pour $Q_{(p_i)*}$, on définit dans $Q_{(p_i)}$ une structure d'anneau, que l'on munit de la pseudo-valuation

$$\|\xi\| = \sup_{i\in\mathfrak{J}} |\xi_i|_{p_i} \ .$$

DÉFINITION. - <u>L'ensemble</u> $\mathcal{S}_q$ <u>est l'ensemble des éléments</u> θ <u>de l'anneau</u> $Q_{(p_i)}$, <u>de composante</u> p_i<u>-adique</u> θ_i , <u>qui sont racine d'un polynôme</u> $P(x)$ <u>vérifiant les conditions</u> (C) , (C'_o) et $(\overline{C_i})$.

On remarque que les rationnels $\frac{n}{q}$ avec $|n| < q$ appartiennent à $\mathcal{S}_q$.

Lorsque l'ensemble $\mathfrak{J}$ se réduit à un seul indice, on retrouve des ensembles étudiés par C. CHABAUTY [3] (ensemble $\mathcal{C}$).

2. Propriétés des anneaux $Q_{(p_i)}$ et $Q_{(p_i)*}$.

2.1 DÉFINITIONS. Soit $V(Q)$ l'ensemble des éléments $\xi = (\xi_o, \xi_1, \dots, \xi_n, \dots)$ du produit cartésien de R par tous les corps p-adiques $(\xi_o \in R, \dots, \xi_n \in Q_{p_n}, \dots)$ tels que $|\xi_n|_{p_n} \leqslant 1$, sauf, au plus, pour un nombre fini d'indices n . L'addition et la multiplication des composantes donnent à $V(Q)$ une structure d'anneau et

$$\|\xi\| = \sup \{ |\xi_o| , \dots , |\xi_n|_{p_n} , \dots \}$$

définit dans cet anneau une pseudo-valuation.

$V(Q)$ <u>contient des sous-anneaux remarquables</u> :

$\{\xi \in V(Q) : \xi_n = 0 \text{ si } n \geqslant 1 \text{ et } n \notin \mathfrak{J}\}$ sous-anneau isomorphe à $Q_{(p_i)*}$, que l'on désignera par le même nom.

$\{\xi \in V(Q) : \xi_o = 0 , \xi_n = 0 \text{ si } n \notin \mathfrak{J}\}$ sous-anneau isomorphe à $Q_{(p_i)}$,

$\{\xi \in V(Q) : \xi_o = \xi_1 = \dots = \xi_n = \dots = r \text{ avec } r \in Q\}$ sous-anneau isomorphe à Q que l'on notera encore par Q .

On notera $Z(p_i^\infty)_{i\in\mathfrak{J}}$ ou, en abrégé, $Z(p_i^\infty)$, l'anneau des rationnels de la forme

$$\frac{m}{\prod_{i\in\mathfrak{I}} (p_i)^{\lambda_i}} \qquad (m , \lambda_i \in Z) .$$

2.2 Théorème d'Artin [1]. Pour tout élément ξ de $V(Q)$, il existe une décomposition unique

$$\xi = H(\xi) + \varepsilon(\xi)$$

où $H(\xi)$ appartient à Q et $\varepsilon(\xi)$ est un élément de $V(Q)$ vérifiant les conditions :

$$-\frac{1}{2} \leqslant \varepsilon_o(\xi) < \frac{1}{2}$$

$$|\varepsilon_n(\xi)|_{p_n} \leqslant 1 \qquad (n = 1 , 2 , \ldots)$$

($\varepsilon_o(\xi)$, $\varepsilon_n(\xi)$ désignent les composantes réelle et p_n-adique de $\varepsilon(\xi)$).

Démonstration. – Dans Q_{p_n}, d'après le développement de Hensel de ξ_n, on a

$$\xi_n = \frac{m}{(p_n)^k} + \eta \qquad \text{où } |\eta|_{p_n} \leqslant 1 ,$$

qu'on notera

$$\xi_n = H_{p_n}(\xi_n) + \eta_{p_n}(\xi_n) .$$

On remarque que $H_{p_n}(\xi_n)$ est unique modulo 1. Si $|\xi_n|_{p_n} \leqslant 1$, on prendra $H_{p_n}(\xi_n) = 0$ ($H_{p_n}(\xi_n) \neq 0$ pour un nombre fini de n).

En prenant

$$\varepsilon_o(\xi) = ((\xi_o - \sum_{n=1}^{\infty} H_{p_n}(\xi_n))) ,$$

$$H(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} H_{p_n}(\xi_n) + [[\xi_o - \sum_{n=1}^{\infty} H_{p_n}(\xi_n)]] ,$$

$$\varepsilon_n(\xi) = \eta_{p_n}(\xi_n) - \sum_{m\neq n} H_{p_m}(\xi_m) - [[\xi_o - \sum_{n=1}^{\infty} H_{p_n}(\xi_n)]]$$

on obtient la décomposition cherchée.

Supposons qu'il existe deux décompositions distinctes $H(\xi) + \varepsilon(\xi) = H'(\xi) + \varepsilon'(\xi)$;

on a

$$-1 < \varepsilon_o - \varepsilon'_o < 1$$

$$|\varepsilon_n - \varepsilon'_n|_{p_n} \leqslant 1$$

d'où

$$|H - H'| \prod_{n=1}^{\infty} |H - H'|_{p_n} < 1$$

et $H - H'$ étant rationnel $H - H' = 0$.

COROLLAIRE 1. - <u>Pour tout élément</u> ξ <u>de</u> $Q_{(p_i)^*}$ <u>ou de</u> $Q_{(p_i)}$, <u>il existe une décomposition unique</u>

$$\xi = H(\xi) + \varepsilon(\xi)$$

<u>où</u> $H(\xi)$ <u>appartient à</u> $Z(p_i^\infty)$ <u>et où</u> $\varepsilon(\xi)$ <u>est un élément de</u> $Q_{(p_i)^*}$ <u>vérifiant les conditions</u> :

$$-1/2 \leqslant \varepsilon_o(\xi) < \frac{1}{2}$$

$$|\varepsilon_i(\xi)|_{p_i} \leqslant 1 \qquad (i \in \mathfrak{J}) .$$

L'existence se déduit de l'expression de la décomposition trouvée dans le théorème d'Artin et l'unicité comme ci-dessus, en faisant intervenir dans la formule du produit seulement les valeurs absolues réelles et p_i-adiques $(i \in \mathfrak{J})$.

On remarque que si $\xi \in Q_{(p_i)}$,

$$\varepsilon_o(\xi) = - H(\xi) ;$$

si l'ensemble $\mathfrak{J}$ est vide,

$$Q_{(p_i)^*} = R \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_o(\xi) = ((\xi)) .$$

COROLLAIRE 2. - <u>L'anneau</u> $Q_{(p_i)^*}$ (<u>resp.</u> $Q_{(p_i)}$) <u>est le complété de</u> Q <u>pour la pseudo-valuation</u>

$$\|\xi\| = \sup \{ |\xi_o| , |\xi_i|_{p_i} \}$$

(resp. $\|\xi\| = \sup \{ |\xi_i|_{p_i} \}$).

<u>Démonstration</u>. - Q est dense dans $Q_{(p_i)^*}$ pour la pseudo-valuation choisie. En effet, on peut trouver un rationnel ξ tel que, pour un ξ choisi dans $Q_{(p_i)^*}$ (resp. $Q_{(p_i)}$), on ait

$$\|\xi - r\| \leqslant \frac{1}{K} \,.$$

Il suffit de choisir deux entiers rationnels a et b tels que

$$|a|_{p_i} = 1 \qquad (i \in \mathfrak{I})$$

$$b = \prod_{i \in \mathfrak{I}} (p_i)^{\lambda_i} \qquad \text{avec} \quad (p_i)^{\lambda_i} \geqslant K$$

et

$$a \geqslant K \prod_{i \in \mathfrak{I}} (p_i)^{\lambda_i} \,.$$

Alors $\|\frac{a}{b}\xi - H(\frac{a}{b}\xi)\| \leqslant 1$ entraîne

$$\frac{a}{b}\,|\xi_o - \frac{b}{a}H| \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad (p_i)^{\lambda_i}|\xi_o - \frac{b}{a}H|p_i \leqslant 1 \,.$$

D'où le résultat cherché en prenant $r = \frac{b}{a}H(\frac{a}{b}\xi)$.

2.3 Un élément α de $Q_{(p_i)^*}$ ou de $Q_{(p_i)}$, est dit <u>algébrique sur</u> Q s'il est racine d'un polynôme $P(x)$ de $Z[x]$.

Soit $A(x)$ un polynôme de degré minimum n , tel que $A(\alpha) = 0$. Tout polynôme $B(x)$, tel que $B(\alpha) = 0$, est multiple de $A(x)$, comme on le voit en effectuant la division de B par A . $A(x)$ est unique, à un facteur près, et s'appelle <u>polynôme minimal de</u> α . α est dit algébrique de degré n .

Une composante α_o ou α_i de α est algébrique sur Q , dans R ou Q_{p_i} , de degré $\leqslant n$. Soient $A_o(x)$ le polynôme irréductible dont α_o est racine, $A_i(x)$ le polynôme irréductible dont α_i est racine.

On a évidemment :

$$A(x) = \text{p. p. c. m. } \{A_o(x) \,,\, A_i(x)\} \qquad \text{si} \quad \alpha \in Q_{(p_i)^*}$$

et

$$A(x) = \text{p. p. c. m. } \{A_i(x)\} \qquad \text{si} \quad \alpha \in Q_{(p_i)} \,.$$

$A(x)$ a donc toutes ses racines distinctes.

Remarque. - Un élément θ d'un ensemble $\mathbb{S}_{q^*}$ (§ 1.3) est par définition un élément algébrique de $Q_{(p_i)^*}$. On voit facilement que le polynôme $P(x)$ vérifiant les conditions (C) , (C_o) et $(\overline{C_i})$ (§ 1.2) est le polynôme minimal de θ. Supposons en effet que

$$P(x) = P^{(1)}(x).P^{(2)}(x)$$

où θ est racine de $P^{(1)}(x)$. D'après (C_o), les racines de $P^{(2)}(x)$ dans C ont une valeur absolue < 1. D'après $(\overline{C_i})$, les racines de $P^{(2)}(x)$ dans Ω_{p_i} ont une valeur absolue p_i-adique $\leqslant 1$. Ceci, joint à la condition (C), entraîne :

$$P^{(2)}(x) = x^t + q_1^{(2)} x^{t-1} + \dots + q_t^{(2)} ,$$

où $q_h^{(2)} \in Z$ et $q_t^{(2)} \neq 0$. D'où $|q_t^{(2)}| \geqslant 1$, ce qui est contradictoire avec le fait que toutes les racines dans C sont de valeur absolue < 1.

On démontre de même que le polynôme $P(x)$ intervenant dans la définition d'un élément θ d'un ensemble $\mathbb{S}_q$ de $Q_{(p_i)}$ est le polynôme minimal de θ.

3. Caractérisation des ensembles $\mathbb{S}_{q^*}$ et $\mathbb{S}_q$.

3.1 On obtient les deux théorèmes suivants, analogues aux caractérisations A et B de l'ensemble S, $\varepsilon_o(\xi)$ jouant dans $Q_{(p_i)^*}$ le rôle du reste modulo 1 dans R :

THÉORÈME A'. - Soit θ un élément de $Q_{(p_i)^*}$ (resp. $Q_{(p_i)}$) tel que $\theta_o > 1$, $|\theta_i|_{p_i} > 1$ (resp. $|\theta_i|_{p_i} > 1$). θ appartient à un ensemble $\mathbb{S}_{q^*}$ (resp. $\mathbb{S}_q$) si, et seulement s'il existe un élément inversible λ de $Q_{(p_i)^*}$ (resp. $Q_{(p_i)}$) tel que

$$\sum_{n=1}^{N} n(\varepsilon_o(\lambda\theta^n))^2 = o(N) .$$

THÉORÈME B'. - Soit θ un élément algébrique de $Q_{(p_i)^*}$ (resp. $Q_{(p_i)}$) tel que $\theta_o > 1$, $(\theta_i|_{p_i} > 1$ (resp. $|\theta_i|_{p_i} > 1$). θ appartient à un ensemble $\mathbb{S}_{q^*}$ (resp. $\mathbb{S}_q$) si, et seulement s'il existe un élément inversible λ de $Q_{(p_i)^*}$ (resp. $Q_{(p_i)}$)

tel que : $\varepsilon_o(\lambda\theta^n) \to 0$ quand $n \to +\infty$.

3.2 Démonstration des parties directes. Soit θ un élément d'un ensemble $\mathbb{S}_{q^*}$ de $Q_{(p_i)^*}$. Le polynôme minimal de θ a toutes ses racines distinctes. On les notera :

$$\theta_o \, , \, \theta_o^{(2)} \, , \, \dots \, , \, \theta_o^{(o)} \quad \text{dans } C \, , \quad \theta_i \, , \, \theta_i^{(2)} \, , \, \dots \, , \, \theta_i^{(o)} \quad \text{dans } \Omega_{p_i} \, .$$

Posons

$$u_n = \theta_o^n + \theta_o^{(2)^n} + \dots + \theta_o^{(s)^n} = \theta_i^n + \theta_i^{(2)^n} + \dots + \theta_i^{(s)^n} \, .$$

Soit

$$\rho = \sup |\theta_o^{(2)}| \, , \, \dots \, , \, |\theta_o^{(s)}| < 1 \, ,$$

d'après la condition (C_o) ; on a

$$|\theta_o^n - u_n| \leqslant (s-1)\rho^n \, , \qquad |\theta_i^{(n)} - u_n|_{p_i} \leqslant 1$$

d'après la condition $(\overline{C_i})$.

u_n appartient à $Z(p_i^\infty)$ d'après la condition (C). Le théorème d'Artin montre donc que, pour n assez grand, $u_n = H(\theta^n)$. Donc

$$\varepsilon_o(\theta^n) = (\theta^{(2)^n} + \dots + \theta^{(s)^n}) \, ,$$

d'où

$$|\varepsilon_o(\theta^n)| \leqslant (s-1)\rho^n \, .$$

$\varepsilon_o(\theta^n)$ tend vers zéro comme une progression géométrique, ce qui démontre les parties directes des théorèmes A' et B' pour les ensembles $\mathbb{S}_{q^*}$.

Dans le cas de $\mathbb{S}_q$, on a de manière analogue :

$$u_n = \theta_o^{(1)^n} + \dots + \theta_o^{(s)^n} = \theta_i^n + \dots + \theta_i^{(s)^n}$$

et $u_n = H(\theta^n)$ d'après les conditions (C), (C_o') et $(\overline{C_i})$, avec $|u_n| < s\rho^n$. D'où le même résultat, puisque $\varepsilon_o(\theta^n) = -H(\theta^n)$.

3.3 Partie réciproque du théorème B'. Soit $A(x) = a_o x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m$ $(a_i \in Z)$ un polynôme dont θ est racine. La suite $\{\lambda\theta^n\}$ vérifie la relation de récurrence : $a_o(\lambda\theta^n) + a_1(\lambda\theta^{n-1}) + \dots + a_m(\lambda\theta^{n-m}) = 0 \quad (n \geqslant m)$.

Posons $H(\lambda\theta^n) = u_n$ et $\varepsilon(\lambda\theta^n) = \eta_n$ ($\eta_{o,n}$ et $\eta_{i,n}$ représentent les composantes de η_n). On a

$$V_n = a_o u_n + a_1 u_{n-1} + \dots + a_m u_{n-m} = -(a_o \eta_{o,n} + \dots + a_m \eta_{o,n-m})$$
$$= -(a_o \eta_{i,n} + \dots + a_m \eta_{i,n-m}) \quad (i \in \mathfrak{I}).$$

Par hypothèse, $\varepsilon_o(\lambda\theta^n) = \eta_{o,n} \to 0$ quand $n \to +\infty$. D'autre part

$$|\varepsilon_i(\lambda\theta^n)|_{p_i} = |\eta_{i,n}|_{p_i} \leqslant 1 .$$

D'où

$$|V_n| \prod_{i\in\mathfrak{I}} |V_n|_{p_i} \to 0 \qquad \text{quand } n \to \infty .$$

Comme $V_n \in Z(p_i^\infty)$, $V_n = 0$ pour $n > n_o$. Dans Ω_{p_i} ,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_i \theta_i^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \eta_{i,n} x^n ,$$

où $\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ est le développement d'une fraction rationnelle, et où $\sum_{n=0}^{\infty} \eta_{i,n} x^n$ est analytique dans $|x|_{p_i} \leqslant 1$. Comme $\lambda_i \neq 0$ et $|\theta_i|_{p_i} > 1$, $1/\theta_i$ est un pôle de la fraction $\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ et les autres pôles ont une valeur absolue p_i-adique $\geqslant 1$. Il en résultera la condition $(\overline{C_i})$.

Dans C ,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_o \theta_o^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \eta_{o,n} x^n \qquad \text{si } \theta \in Q_{(p_i)^*}$$

et

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \eta_{o,n} x^n \qquad \text{si } \theta \in Q_{(p_i)} ,$$

où $\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ est le développement d'une fraction rationnelle, et où $\sum_{n=0}^{\infty} \eta_{o,n} x^n$ est analytique dans $|x| < 1$. Il en résulte que les inverses des pôles de $\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ (autres que θ_o dans le 1er cas, grâce à la condition $\lambda_o \neq 0$) sont de valeur absolue $\leqslant 1$. Or on sait que la fraction rationnelle $\sum_{n=0}^{\infty} \eta_{o,n} x^n$, qui est telle que $\eta_{o,n} \to 0$ quand $n \to +\infty$, ne peut avoir de pôle de valeur absolue égale à 1:

tous ses pôles sont de valeur absolue > 1. La condition (C_o) ou (C'_o), suivant le cas choisi, est donc vérifiée.

Soit $Q(x) = q + q_1 x + \dots + q_s x^s$ le dénominateur de la fraction rationnelle $\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$, mise sous forme irréductible et vérifiant : p. g. c. d. $(q, q_1, \dots, q_s) = 1$
La suite u_n vérifie la relation de récurrence :

$$q\, u_n + q_1\, u_{n-1} + \dots + q_s\, u_{n-s} = 0 \qquad (n > n_1)\ .$$

Or $u_n \in Z(p_i^{\infty})$, et si l'on pose

$$|\lambda_i|_{p_i} = (p_i)^{\ell_i}\ , \quad |\theta_i|_{p_i} = (p_i)^{t_i} \qquad (t_i > 0)$$

et

$$L = \prod_{i \in \mathfrak{J}} (p_i)^{\ell_i}\ , \qquad T = \prod_{i \in \mathfrak{J}} (p_i)^{t_i}\ ,$$

on a

$$u_n = \frac{u'_n}{L\, T^n} \qquad \text{où} \quad u'_n \in Z$$

La suite (u'_n) vérifie la relation de récurrence :

$$q\, u'_n + q_1\, T\, u'_{n-1} + \dots + q_s\, T^s\, u'_{n-s} = 0\ .$$

Le théorème de Fatou montre que q divise le p. g. c. d. de $q_1 T, \dots, q_s T^s$ c'est-à-dire T. Il en résulte que q vérifie la condition (C).

3.4 Partie réciproque du théorème A'. Soit D_n le déterminant de Kronecker attaché à la suite $u_n = H(\lambda\theta^n)$:

$$D_n = \det(u_{h+k}) \qquad 0 \leqslant h\ , k \leqslant n\ .$$

On majore les valeurs absolues ordinaire et p_i-adique de D_n en utilisant des combinaisons entre les colonnes définies, respectivement par

$$V_{o,n} = u_n - \theta_o\, u_{n-1} \qquad \text{si } \theta \in Q_{(p_i)}*$$

$$V_{o,n} = u_n \qquad \text{si } \theta \in Q_{(p_i)}$$

$$V_{i,n} = u_n - \theta_i\, u_{n-1} \qquad (i \in \mathfrak{J})\ ,$$

c'est-à-dire

$$D_n = \begin{vmatrix} u_o\ V_{o,1} & \cdots & V_{o,n} \\ u_1\ V_{o,2} & \cdots & V_{o,n+1} \\ u_n\ V_{o,n+1} & \cdots & V_{o,2n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_o\ V_{i,1} & \cdots & V_{i,n} \\ u_1\ V_{i,2} & \cdots & V_{i,n+1} \\ u_n\ V_{i,n+1} & \cdots & V_{i,2n} \end{vmatrix} .$$

En reprenant les notations du § 3.3, on a :

$$V_{o,n} = -(\eta_{o,n} - \theta_o\,\eta_{o,n-1}) \quad \text{si} \quad \theta \in Q_{(p_i)}* \qquad \text{et} \quad V_{o,n} = -\eta_{o,n} \quad \text{si} \quad \theta \in Q_{(p_i)} ,$$

$$V_{i,n} = -(\eta_{i,n} - \theta_i\,\eta_{i,n-1}) .$$

Cette dernière égalité entraîne

$$|V_{i,n}|_{p_i} \leqslant |\theta_i|_{p_i} .$$

D'où la majoration :

$$|D_n|_{p_i} < (\sup_{j=0,1,\dots,n} |u_j|_{p_i})\ |\theta_i|^n_{p_i} .$$

D'autre part,

$$|u_n|_{p_i} = |\lambda_i|_{p_i}\ |\theta_i|^n_{p_i} .$$

D'où

$$(3.4.1) \qquad |D_n|_{p_i} \leqslant |\lambda_i|_{p_i}\ |\theta_i|^{2n}_{p_i} .$$

Pour l'étude de la valeur absolue ordinaire, on utilise la majoration d'Hadamard :

$$(3.4.2) \quad |D_n|^2 \leqslant (u_o^2 + u_1^2 + \dots + u_n^2)(V^2_{o,1} + \dots + V^2_{o,n+1}) \dots (V^2_{o,n} + \dots + V^2_{o,2n}) .$$

D'autre part, en utilisant l'inégalité entre moyenne géométrique et moyenne arithmétique, on trouve :

$$(V^2_{o,1} + \dots + V^2_{o,n+1}) \dots (V^2_{o,n} + \dots + V^2_{o,2n}) \leqslant \left(\frac{V^2_{o,1} + 2V^2_{o,2} + \dots + nV^2_{o,n} + nV^2_{o,n+1} + \dots + V^2_{o,2n}}{n}\right)^n$$

$$\leqslant \left(2\,\frac{V^2_{o,1} + 2V^2_{o,2} + \dots + 2nV^2_{o,2n}}{2n}\right)^n .$$

Par hypothèse,

$$\eta^2_{o,1} + 2\eta^2_{o,2} + \dots + N\eta^2_{o,N} = o(N) .$$

Il en résulte évidemment

$$V_{o,1}^2 + 2V_{o,2}^2 + \dots + NV_{o,N}^2 = o(N) .$$

Quel que soit le nombre positif ε , il existe donc un entier $N_o(\varepsilon)$ tel que, si $n > N_o(\varepsilon)$:

$$(3.4.3) \qquad (V_{o,1}^2 + \dots + V_{o,n+1}^2) \dots (V_{o,n}^2 + \dots + V_{o,2n}^2) \leqslant \varepsilon^n .$$

Si $\theta \in Q_{(p_i)}$, $|u_n| \leqslant \frac{1}{2}$, d'où :

$$u_o^2 + \dots + u_n^2 \leqslant \frac{1}{4}(n+1) .$$

Si $\theta \in Q_{(p_i)^*}$, $|u_n| \leqslant |\lambda_o||\theta_o|^n + 1 \leqslant C_o(\lambda_o , \theta_o)|\theta_o|^n$. D'où

$$u_o^2 + \dots + u_n^2 \leqslant C(\lambda_o , \theta_o)|\theta_o|^{2n} .$$

Ces inégalités, jointes aux inégalités (3.4.1) , (3.4.2) et (3.4.3) entraînent

$$|D_n| \prod_{i \in \mathfrak{I}} |D_n|_{p_i} \leqslant \Gamma(\theta , \lambda) \ \Omega(\theta)^n \ \varepsilon \ n/2 \qquad (n > N_o(\varepsilon)) .$$

Pour un choix convenable de ε le membre de droite est inférieur à 1 pour n assez grand. Comme $D_n \in Z(p_i^\infty)$, il en résulte : $D_n = 0$ à partir d'un certain rang.

La suite (u_n) vérifie donc une relation de récurrence. L'étude de la fraction rationnelle de développement $\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ dans C et dans Ω_{p_i} montre qu'elle admet pour pôle dans C : $\frac{1}{\theta_o}$ (si $\theta \in Q_{(p_i)^*}$) et pour pôle dans Ω_{p_i} : $\frac{1}{\theta_i}$. θ est donc un élément algébrique de $Q_{(p_i)^*}$ (ou de Q_{p_i}) : on est ramené aux hypothèses du théorème B', ce qui achève la démonstration.

4. Etude des ensembles $\mathfrak{M}_{q^*}^j$ et $\mathfrak{M}_q^j$.

L'étude du § 3 fait jouer un rôle particulier à la composante réelle $\eta_{o,n}$ de l'élément $\varepsilon_o(\lambda\theta^n)$ de $Q_{(p_i)^*}$. Dans le théorème d'Artin (§ 2.2), les composantes réelle et p_i-adique de $\varepsilon(\xi)$ jouent des rôles analogues. D'où l'idée de mener une étude parallèle à celle du § 3, en imposant des conditions, non plus à la composante réelle de $\varepsilon(\lambda\theta^n)$, mais à une composante p_i-adique particulière. On est ainsi amené à la définition des ensembles $\mathfrak{M}$.

4.1 DÉFINITIONS. Par la suite, j désignera un indice particulier fixé de l'ensemble $\mathfrak{J}$.

(4.1.1) L'ensemble $\mathfrak{M}^j_{q*}$ est l'ensemble des éléments θ de l'anneau $Q_{(p_i)*}$ de composantes réelle θ_o et p_i-adique θ_i , qui sont racine d'un polynôme $P(x)$ vérifiant les conditions : (C) , $(\overline{C_o})$, $(\overline{C_i})$ (pour $i \in \mathfrak{J}$ et $i \neq j$), et (C_j).

Les conditions (C) et $(\overline{C_i})$ sont celles du § 1.2. Les conditions $(\overline{C_o})$ et (C_j) sont les suivantes :

$(\overline{C_o})$: $P(x)$ possède une racine réelle $\theta_o > 1$; les autres racines de $P(x)$ dans C ont une valeur absolue $\leqslant 1$;

(C_j) : $P(x)$ possède une racine θ_j dans Q_{p_j} et $|\theta_j|_{p_j} > 1$; les autres racines de $P(x)$ dans Ω_{p_j} ont une valeur absolue p_j-adique < 1 .

(4.1.2) L'ensemble $\mathfrak{M}^j_q$ est l'ensemble des éléments θ de l'anneau $Q_{(p_j)}$, de composante p_i-adique θ_i , qui sont racines d'un polynôme $P(x)$ vérifiant les conditions : (C) , $(\overline{C'_o})$, $(\overline{C_i})$ (pour $i \in \mathfrak{J}$ et $i \neq j$), et (C_j).

Les conditions (C) et $(\overline{C_i})$ sont celles du § 1.2. (C_j) est la condition du § (4.1.1). La condition $(\overline{C'_o})$ est la suivante :

(C'_o) : Les racines de $P(x)$ dans C ont une valeur absolue $\leqslant 1$.

Remarque. - Lorsque $\mathfrak{J}$ se réduit au seul indice j , on retrouve pour les ensembles $\mathfrak{M}^j_q$ des ensembles étudiés par C. CHABAUTY [3] (ensemble $\mathfrak{B}$).

4.2 On obtient des caractérisations analogues à celles des ensembles $\mathfrak{S}$. Le théorème A" est dû à C. PISOT.

THÉORÈME A". - Soit θ un élément de $Q_{(p_i)*}$ (resp. $Q_{(p_i)}$) tel que $\theta_o > 1$, $|\theta_i|_{p_i} > 1$ (resp. $|\theta_i|_{p_i} > 1$). θ appartient à un ensemble $\mathfrak{M}^j_{q*}$ (resp. $\mathfrak{M}^j_q$) si, et seulement s'il existe un élément inversible λ de $Q_{(p_i)*}$ (resp. $Q_{(p_i)}$) tel que :

$$\sum_{n=1}^{N} n|\varepsilon_j(\lambda\theta^n)|^2_{p_j} = o(N) .$$

THÉORÈME B". - Soit θ un élément algébrique de $Q_{(p_i)*}$ (resp. $Q_{(p_i)}$) tel

<u>que</u> $\theta_o > 1$, $|\theta_i|_{p_i} > 1$ (<u>resp.</u> $|\theta_i|_{p_i} > 1$). θ <u>appartient à un ensemble</u> $\mathfrak{M}_{q*}^{j}$ (<u>resp.</u> $\mathfrak{M}_q^j$) <u>si, et seulement s'il existe un élément inversible</u> λ <u>de</u> $Q_{(p_i)*}$ (<u>resp.</u> $Q_{(p_i)}$) <u>tel que</u> :

$$|\varepsilon_j(\lambda\theta^n)|_{p_j} \to 0 \quad \text{quand} \quad n \to +\infty .$$

4.3. <u>Démonstration des parties directes des théorèmes</u> A" <u>et</u> B" . Soit θ un élément d'un ensemble $\mathfrak{M}_{q*}^{j}$ de $Q_{(p_i)*}$. On voit, comme dans le § 3.2, en faisant intervenir le polynôme minimal de θ , et en posant

$$u_n = \frac{1}{(p_j)^k}\,(\theta_o^n + \theta_o^{(2)^n} + \dots + \theta_o^{(s)^n}) = \frac{1}{(p_j)^k}\,(\theta_i^n + \dots + \theta_i^{(s)^n}) ,$$

que $u_n = H(\frac{\theta^n}{(p_j)^k})$ pour $n > n_o$ (k entier positif, tel que $(p_j)^k > 2s$). Il en résulte :

$$\varepsilon_j(\frac{\theta^n}{(p_j)^k}) = -\frac{1}{(p_j)^k}\,(\theta_j^{(2)^n} + \dots + \theta_j^{(s)^n}) \qquad (n > n_o) .$$

Or, d'après la condition $(C_j^!)$: $\rho_j = \sup\{|\theta_j^{(2)}|_{p_j}, \dots , |\theta_j^{(s)}|_{p_j}\} < 1$. Donc, $|\varepsilon_j(\frac{\theta^n}{\rho^k})| \leqslant (\rho_j)^n$; $|\varepsilon_j(\frac{\theta^n}{\rho^k})|_{p_j}$ tend vers zéro comme une progression géométrique (partie directe du théorème A" ou B", avec le choix $\lambda = \frac{1}{(p_j)^k}$ dans le cas de $\mathfrak{M}_{q*}^{j}$). La démonstration est analogue dans le cas d'un élément θ d'un ensemble $\mathfrak{M}_q^j$.

4.4 <u>Partie réciproque du théorème</u> B". θ étant un élément algébrique de $Q_{(p_i)*}$ (resp. $Q_{(p_i)}$) on montre, comme dans le § 3.3, que la suite $u_n = H(\lambda\theta^n)$ vérifie la même relation de récurrence linéaire à coefficients entiers que la suite $\lambda\theta^n$. On montre également de manière analogue les résultats suivants : dans C , $1/\theta_o$ est un pôle de la fraction rationnelle $\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ et tous les autres pôles ont une valeur absolue $\geqslant 1$ (resp. tous les pôles de la fraction rationnelle $\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ ont une valeur absolue $\geqslant 1$) ; dans Ω_{p_i} , $1/\theta_i$ est un pôle de la fraction rationnelle $\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ et tous les autres pôles ont une valeur absolue p_i-adique $\geqslant 1$.

Les conditions $(\overline{C_o})$ et $(\overline{C_i})$ $(i \in \mathcal{J})$ en résultent. Il reste à démontrer (C_j), c'est-à-dire : dans Ω_{p_j} les pôles de valeur absolue 1 sont exclus pour la fraction rationnelle $\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$.

La fraction rationnelle $\sum_{n=0}^{\infty} \eta_{j,n} x^n$ (notations du § 3.3) a tous ses pôles dans $|x|_{p_j} \geqslant 1$. De plus, $|\eta_{j,n}|_{p_j} \to 0$ quand $n \to +\infty$. Soit ρ_j le maximum des valeurs absolues p_j-adiques des inverses des pôles de cette fraction ($\rho_j \leqslant 1$). On sait [2] qu'on peut trouver des constantes positives μ telles que

$$|\eta_{j,n}|_{p_j} = \mu \rho_j^n$$

pour une infinité de n positifs. L'hypothèse $|\eta_{j,n}|_{p_j} \to 0$ quand $n \to +\infty$ entraîne donc :

$$\rho_j < 1 .$$

Le théorème B" est démontré.

<u>Remarque</u>. – <u>Les éléments</u> θ <u>de</u> $\mathfrak{M}^j_{q*}$ <u>dont le polynôme minimal</u> $P(x)$ <u>est irréductible sur</u> Q <u>sont tels que</u> $P(x)$ <u>vérifie la condition</u> (C_o), <u>(plus forte que</u> $(\overline{C_o})$<u>)</u>. En effet, si θ_o avait un conjugué sur la circonférence $|x| = 1$ de C, le polynôme $P(x)$ serait réciproque. Dans Ω_{p_i}, par suite de la condition $(\overline{C_i})$, toutes les racines de $P(x)$ autres que θ_i et $1/\theta_i$ appartiendraient à la circonférence $|x|_{p_i} = 1$ de Ω_{p_i}. Dans Ω_{p_j}, la condition (C_j) ne peut donc être vérifiée que si $P(x)$ est de degré 2 :

$$P(x) = qx^2 + q_1 x + q ;$$

mais dans ce cas (C_o) est également vérifiée.

Un raisonnement analogue montre la propriété suivante : <u>les éléments</u> θ <u>de</u> $\mathfrak{M}^j_q$ <u>dont le polynôme minimal</u> $P(x)$ <u>est irréductible sur</u> Q <u>sont tels que</u> $P(x)$ <u>vérifie la condition</u> (C'_o), <u>sauf si</u> $P(x)$ <u>est de degré</u> 2 (et dans ce cas, $P(x) = qx^2 + q_1 x + q$ avec $q_1^2 - 4q^2 < 0$).

4.5 <u>Partie réciproque du théorème</u> A". On utilise, comme dans le § 3.4, et avec les mêmes notations, le déterminant de Kronecker D_n.

Pour $i \in \mathcal{J}$, $i \neq j$, on a la même majoration :

$$|D_n|_{p_i} \leqslant |\lambda_i|_{p_i} \; |\theta_i|_{p_i}^{2n} .$$

Pour la valeur absolue p_j-adique, on utilise la majoration :

$$|D_n|_{p_j} \leqslant \sup_{(i_o, i_1, \dots, i_n)} \{ |u_{i_o - 1}|_{p_j} \; |V_{j,i_1}|_{p_j} \cdots |V_{j,n-1+i_n}|_{p_j} \},$$

$(i_o , i_1 , \dots , i_n)$ étant une permutation de $(1 , 2 , \dots , n + 1)$.

D'autre part :

$$n! \, |V_{j,i_1}|_{p_j}^2 \cdots |V_{j,n-1+i_n}|_{p_j}^2 \leqslant i_1 |V_{j,i_1}|_{p_j}^2 \times i_2 |V_{j,1+i_2}|_{p_j}^2 \times \dots \times i_n |V_{j,n-1+i_n}|_{p_j}^2$$

$$\leqslant \left(\frac{i_1 |V_{j,i_1}|_{p_j}^2 + i_2 |V_{j,1+i_2}|_{p_j}^2 + \dots + i_n |V_{j,n-1+i_n}|_{p_j}^2}{n} \right)^n$$

(en utilisant l'inégalité entre moyenne géométrique et moyenne arithmétique), or

$$i_1 |V_{j,i_1}|_{p_j}^2 + \dots + i_n |V_{j,n-1+i_n}|_{p_j}^2 \leqslant |V_{j,1}|_{p_j}^2 + 2|V_{j,2}|_{p_j}^2 + \dots + 2n |V_{j,2n}|_{p_j}^2 .$$

Il en résulte, comme $|u_m|_{p_j} \leqslant |\lambda_j|_{p_j} \; |\theta_j)^n$ pour $0 \leqslant m \leqslant n$,

$$|D_n|_{p_j} \leqslant |\lambda_j|_{p_j} \; |\theta_j|^n \left(\frac{|V_{j,1}|_{p_j}^2 + \dots + 2n |V_{j,2n}|_{p_j}^2}{2n} \times 2 \right)^{n/2} \frac{1}{(n!)^{1/2}} .$$

Or, par hypothèse :

$$|\eta_{j,1}|_{p_j}^2 + 2|\eta_{j,2}|_{p_j}^2 + \dots + n|\eta_{j,n}|_{p_j}^2 = o(n) .$$

La relation : $v_{j,n} = - \eta_{j,n} + \theta_j \, \eta_{j,n-1}$ entraîne évidemment :

$$|V_{j,1}|_{p_j}^2 + 2|V_{j,2}|_{p_j}^2 + \dots + n|V_{j,n}|_{p_j}^2 = o(n) .$$

Il en résulte :

$$|D_n|_{p_j} \leqslant |\lambda_j|_{p_j} \; |\theta_j|_{p_j}^n \, \varepsilon^n \frac{1}{(n!)^{1/2}} \qquad \text{pour} \qquad n > N_o(\varepsilon) .$$

Pour la valeur absolue ordinaire, on utilise la majoration d'Hadamard :

$$|D_n| \leqslant (|\lambda_o| + 1)(1 + \theta_o)^{2n} \, (n + 1)^{n/2} \qquad \text{si } \theta \in Q_{(p_i)^*} ,$$

$$|D_n| \leqslant \frac{1}{2} \, (n + 1)^{(n+1)/2} \qquad \text{si } \theta \in Q_{(p_i)} .$$

D'où, dans tous les cas :

$$|D_n| \prod_{i\in\mathfrak{J}} |D_n|_{p_i} \leqslant \Gamma(\lambda , \theta)\ \Omega(\theta)^n\ \Omega'(\varepsilon)\ \frac{(n+1)^{n/2}}{(n!)^{1/2}}\ \varepsilon^n$$

pour $n > N_o(\varepsilon)$.

On en déduit $D_n = 0$, à partir d'un certain rang θ , est donc un élément algébrique : on est ramené aux hypothèses du théorème B".

5. Généralisation des ensembles $\mathcal{S}_{q^*}$.

C. PISOT a défini dans [7] des ensembles S_q plus généraux que ceux définis dans le § 1.2, en admettant pour le polynôme $P(x)$ dans Ω_{p_i} plusieurs racines de valeur p_i-adique > 1 , et n'appartenant pas nécessairement à Q_{p_i} .

Il est possible d'obtenir des caractérisations analogues aux précédentes, si l'on impose aux racines de $P(x)$ de valeur absolue p_i-adique > 1 d'appartenir à des extensions algébriques fixées de Q_{p_i} .

5.1 DÉFINITIONS.

(5.1.1) On notera $Q_{p_i}(\alpha_1) \dots Q_{p_i}(\alpha_j) \dots Q_{p_i}(\alpha_{k_i})$, k_i-extensions algébriques distinctes de Q_{p_i} , et $A_* = R \times \prod_{i\in\mathfrak{J}} Q_{p_i}(\alpha_1) \times \dots \times Q_{p_i}(\alpha_{k_i})$ le produit cartésien de R par un nombre fini de corps $Q_{p_i}(\alpha_j)$. Les éléments de A_* seront notés $X = (X_o , \dots , X_{i,1} , \dots , X_{i,j} , \dots)$. X_o est la composante de X dans R , $X_{i,j}$ la composante de X dans $Q_{p_i}(\alpha_j)$.

On notera $X \to T(x)$ l'application de A_* dans $Q_{(p_i)*}$ définie par :

$$T_o(X) = X_o , \qquad T_i(X) = \sum_{j=1}^{k_i} Tr_{Q_{p_i}(\alpha_j)/Q_{p_i}} (X_{i,j})$$

($T_o(X)$ composante réelle de $T(X)$, $T_i(X)$ composante p_i-adique de $T(X)$).

(5.1.2) <u>L'ensemble</u> $\mathcal{G}_{q^*}$ <u>est l'ensemble des éléments</u> Θ <u>de l'anneau</u> A_* <u>racines d'un polynôme</u> $P(x)$ <u>vérifiant les conditions</u> (C) , (C_o) , $(\mathcal{C}_i)$ $(i \in \mathfrak{J})$ [Θ <u>ayant pour composante dans</u> R_i , Θ_o , <u>et dans</u> $Q_{p_i}(\alpha_j)$, $\Theta_{i,j}$].

(C) et (C_o) sont les conditions du § 1.2. La condition $(\mathcal{C}_i)$ est la suivante :
$(\overline{\mathcal{C}_i})$: $P(x)$ <u>possède une racine</u> $\Theta_{i,1}$ <u>dans</u> $Q_{p_i}(\alpha_1)$ <u>et</u> $|\Theta_{i,1}|_{p_i} > 1$. $P(x)$

possède une racine Θ_{i,k_i} dans $Q_{p_i}(\alpha_{k_i})$ et $|\Theta_{i,k_i}|_{p_i} > 1$. Les racines de $P(x)$ dans Ω_{p_i}, autres que les précédentes et leurs conjuguées respectives par rapport à Q_{p_i}, ont une valeur absolue p_i-adique $\leqslant 1$.

5.2 On trouve les caractérisations suivantes de $\mathfrak{S}_{q^*}$:

THÉORÈME A"1 - Soit Θ un élément de l'anneau A_* tel que :

$$\Theta_o > 1 \, , \qquad |\Theta_{i,j}|_{p_i} > 1 \qquad (i \in \mathfrak{I} \, , \quad 1 \leqslant j \leqslant k_i) \, .$$

Θ appartient à un ensemble $\mathfrak{S}_{q^*}$ si, et seulement s'il existe un élément inversible Λ de A_* tel que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\varepsilon_o(T(\Lambda\Theta^n)))^2 < +\infty \, .$$

THÉORÈME B"'. - Soit Θ un élément algébrique de l'anneau A_* tel que $\Theta_o > 1$, $|\Theta_{i,j}|_{p_i} > 1$ $(i \in \mathfrak{I} \, , \; 1 \leqslant j \leqslant k_i)$. Θ appartient à un ensemble $\mathfrak{S}_{q^*}$ si, et seulement s'il existe un élément inversible Λ de A_* tel que :

$$\varepsilon_o(T(\Lambda\Theta^n)) \to 0 \quad \text{quand} \quad n \to +\infty \, .$$

5.3 Principe de la démonstration. Pour la démonstration des parties directes de ces théorèmes, on considère comme précédemment le rationnel u_n égal à la somme des puissances n-ièmes de toutes les racines de $P(x)$. Mais on n'a $u_n = H(T(\Theta^n))$ que dans le cas où $\Theta_{i,j}$ est un élément primitif du corps $Q_{p_i}(\alpha_j)$ pour tout $i \in \mathfrak{I}$ et $1 \leqslant j \leqslant k_i$. Dans le cas général, $u_n = H(T(\Lambda\Theta^n))$ où les $\Lambda_{i,j}$ sont des rationnels et $\Lambda_o = 1$.

Pour les majorations des valeurs absolues du déterminant D_n (partie réciproque du théorème A"), on utilise les combinaisons entre les colonnes définies par :

$$w_{i,n} = u_n + a_{i,1} u_{n-1} + \dots + a_{i,m} u_{n-m}$$

où le polynôme $x^m + a_{i,1} x^{m-1} + \dots + a_{i,m}$ de $Q_{p_i}[x]$ a pour racines dans Ω_{p_i} : $\Theta_{i,1}, \dots, \Theta_{i,j}, \dots, \Theta_{i,k_i}$ et leurs conjugués par rapport à Q_{p_i}.

5.4 On peut de manière analogue définir, dans l'anneau

$$A = \prod_{i \in \mathfrak{I}} Q_{p_i}(\alpha_1) \times \dots \times Q_{p_i}(\alpha_{k_i}) \, ,$$

des ensembles $\mathfrak{S}_q$ généralisant les ensembles S_q de $Q_{(p_i)}$ et on trouve encore les caractérisations A et B .

BIBLIOGRAPHIE

[1] ARTIN (Emil). - Algebraic numbers and algebraic functions. - Princeton, Princeton University, 1951 (multigraphié).

[2] BERTRANDIAS (Françoise). - Séries de Taylor à coefficients rationnels, Séminaire Delange-Pisot : Théorie des nombres, t. 4, 1962/63, n° 17, 11 p.

[3] CHABAUTY (Claude). - Sur la répartition modulo 1 de certaines suites p-adiques, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 231, 1950, p. 465-466.

[4] PISOT (Charles). - La répartition modulo 1 et les nombres algébriques, Annali di Mat., t. 7, 1938, p. 205-248 (Thèse Sc. math. Paris, 1938).

[5] PISOT (Charles). - Familles normales de fractions rationnelles et ensembles fermés de nombres algébriques, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et Théorie des nombres, t. 16, 1962/63, n° 14, 12 p.

[6] PISOT (Charles). - Une famille normale de fractions rationnelles, Séminaire Delange-Pisot : Théorie des nombres, t. 4, 1962/63, n° 7, 6 p.

[7] PISOT (Charles). - Ensembles fermés de nombres algébriques et familles normales de fractions rationnelles, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 256, 1963, p. 1418-1419.

[8] SALEM (Raphaël). - Algebraic numbers and Fourier analysis. - Boston, D. C. Heath and Compagny, 1963 (Heath mathematical Monographs).