SÉMINAIRE DUBREIL.
ALGÈBRE ET THÉORIE
DES NOMBRES

ROGER DESQ

# Sous-modules isotypiques et sous-modules tertiaires d'un module

*Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres*, tome 17, n° 2 (1963-1964), exp. n° 25, p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1963-1964__17_2_A12_0>

# SOUS-MODULES ISOTYPIQUES ET SOUS-MODULES TERTIAIRES D'UN MODULE

par Roger DESQ

## 1. Immersion d'un module dans un module injectif.

Les anneaux considérés dans cet exposé contiennent un élément unité ; les modules sont des modules à gauche unitaires.

DÉFINITION 1. - Un $A$-module $M$ est dit injectif si, pour tout $A$-module $Q$, tout sous-module $P$ de $Q$, et tout homomorphisme $f$ de $P$ dans $M$, il existe un homomorphisme $\overline{f}$ de $Q$ dans $M$ prolongeant $f$.

Remarquons qu'un module $M$, somme directe de deux sous-modules, est injectif si et seulement si ces deux sous-modules sont injectifs.

PROPRIÉTÉ 1. - Pour que $M$ soit un $A$-module injectif, il faut et il suffit que, pour tout idéal à gauche $I$ de $A$ et tout homomorphisme $f$ de $I$ dans $M$, $f$ soit réalisé par une homothétie, c'est-à-dire qu'il existe $x_0 \in M$ tel que

$$f(a) = ax_0 \quad \text{pour tout} \quad a \in I .$$

La condition est nécessaire, car $f$ se prolonge en un homomorphisme $\overline{f}$ de $A$ dans $M$, et l'on a

$$f(a) = \overline{f}(a) = \overline{f}(ae) = a\overline{f}(e) .$$

Montrons que la condition est suffisante. Soient un $A$-module $Q$, un sous-module $P$ de $Q$ et un homomorphisme $f$ de $P$ dans $M$. Considérons la famille $\mathfrak{F}$ des couples $(P_\iota , f_\iota)$, où $P_\iota$ est un sous-module de $Q$ contenant $P$, et $f_\iota$ un homomorphisme de $P_\iota$ dans $M$ prolongeant $f$, avec la relation d'ordre définie par

$$(P_1 , f_1) \leqslant (P_2 , f_2) \iff P_1 \leqslant P_2 \quad \text{et} \quad f_2|P_1 = f_1 .$$

Cette famille est inductive et possède donc un élément maximal $(P_0 , f_0)$. Si $P_0$ est différent de $Q$, soit $x \in Q$, $x \notin P_0$. Considérons l'idéal

$$I = P_0 \,\dot{\cdot}\, x = \{a \in A ; \ ax \in P_0\}$$

et l'homomorphisme $i \to f_0(ix)$ de $I$ dans $M$. Par hypothèse, il existe $m \in M$, tel que $f_0(ix) = im$. Posons, pour $x_0 \in P_0$, $\lambda \in A$,

$$\overline{f}(x_0 + \lambda x) = f_0(x_0) + \lambda m ;$$

on vérifie que $\overline{f}$ est un homomorphisme de $P_0 + Ax$ dans $M$ qui prolonge $f_0$ ; ceci est contraire au choix de $(P_0 , f_0)$ ; $P_0$ est donc égal à $Q$ .

THÉORÈME 1. - Tout A-module peut être plongé dans un A-module injectif.

(Voir [1] [4] [5] [6].)

## 2. Enveloppe injective d'un module.

DÉFINITION 2. - $M$ étant un sous-module du A-module $E$ , on dit que $E$ est une extension essentielle de $M$ si, $X$ étant un sous-module de $E$ , la relation $M \cap X = 0$ implique $X = 0$ .

REMARQUE 1. - Si trois A-modules $M$ , $P$ , $E$ sont tels que $M \subset P \subset E$ , $E$ est extension essentielle de $M$ si, et seulement si, $E$ est extension essentielle de $P$ , et $P$ extension essentielle de $M$ .

REMARQUE 2. - Un module $E$ , contenant $M$ , est une extension essentielle de $M$ si, et seulement si, pour tout $x \in E - \{0\}$ , il existe $a \in A$ tel que $ax$ appartienne à $M - \{0\}$ .

PROPRIÉTÉ 2. - Si $M$ est sous-module injectif du module injectif $N$ , toute extension essentielle $E$ de $M$ est isomorphe (relativement à $M$ ) à un sous-module de $N$ contenant $M$ . Si $M$ est injectif, il ne possède pas d'extension propre essentielle.

Le plongement canonique de $M$ dans $N$ se prolonge en un homomorphisme $f$ de $E$ dans $N$ , avec $\operatorname{Ker} f \cap M = 0$ , et par suite $\operatorname{Ker} f = 0$ .

En particulier, si $M$ est injectif, on peut prendre $M = N$ , et $M$ ne possède pas d'extension propre essentielle.

Cette proposition montre que l'on peut se limiter à l'étude des extensions essentielles contenues dans un module injectif donné.

THÉORÈME 2. - $M$ étant un A-module donné, il existe un A-module $E$ , contenant $M$ , défini, à un isomorphisme près, relativement à $M$ , et ayant les propriétés suivantes équivalentes :

(a) $E$ est une extension essentielle maximale de $M$ .

(b) $E$ est une extension essentielle de $M$ , et $E$ est facteur direct de toute extension de $E$ .

(c) $E$ est une extension essentielle injective de $M$ .

(d) $E$ est une extension injective minimale de $M$ .

<u>Existence</u>. - Soit $N$ une extension injective de $M$ ; la famille des sous-modules de $N$, qui sont extension essentielle de $M$, est inductive et possède donc un élément maximal $E$. Aucune extension propre de $E$ n'est extension essentielle de $M$ ; sinon, ce serait une extension essentielle de $E$, et il en existerait une image isomorphe relativement à $E$ dans $N$ ; celle-ci serait aussi une extension essentielle de $M$, contrairement au choix de $E$.

(a) $\Longrightarrow$ (b). - Soit $F$ une extension de $E$, et soit $E'$ un sous-module maximal tel que $E \cap E' = 0$ (existence assurée par le théorème de Zorn). On a

$$F/E' \supseteq (E + E')/E' \simeq E .$$

Par construction, $F/E'$ est une extension essentielle de $(E + E')/E'$. $E$ n'admettant pas d'extension essentielle propre, on a

$$F = E + E' , \qquad E \cap E' = 0 .$$

(b) $\Longrightarrow$ (c). - Soit $N$ une extension injective de $E$ ; $E$ est facteur direct dans $N$ et, par suite, est injectif.

(c) $\Longrightarrow$ (d). - Soit $P$ une extension injective de $M$ contenue dans $E$ ; alors $E$ est extension essentielle de $P$ et, par suite, $P = E$.

(d) $\Longrightarrow$ (a). - Si $E$ n'était pas extension essentielle de $M$, $E$ contiendrait proprement une extension essentielle injective de $M$ puisque (a) $\Longrightarrow$ (d), contrairement à la minimalité de $E$. D'autre part, $E$ ne possède pas d'extension propre essentielle d'après la propriété 2, et constitue donc une extension essentielle maximale de $M$.

M-<u>isomorphisme</u>. - Soient $E$ et $E'$ deux extensions de $M$ ayant les propriétés précédentes. D'après la propriété 2,, $E'$ est isomorphe relativement à $M$ à un sous-module $E''$ de $E$ contenant $M$. Mais $E$ est une extension injective minimale de $M$, et on a $E'' = E$.

COROLLAIRE. - <u>Pour qu'un module soit injectif, il faut et il suffit qu'il soit facteur direct dans toutes ses extensions</u>.

Ceci résulte de l'équivalence de (b) et (d).

DÉFINITION 3. - Un module $E$ satisfaisant aux propriétés du théorème 3 s'appelle l'<u>enveloppe injective</u> de $M$, et se note $E(M)$.

EXEMPLE 1. - Soit $A$ un anneau intègre, ayant un élément unité, tel que $0$ ne soit pas l'intersection de deux idéaux à gauche non nuls ; il existe alors un corps $K$, contenant $A$, et qui est le corps des quotients à gauche ([2]), ensemble des éléments $b^{-1} a$ , avec $a, b \in A$ , $b \neq 0$ .

Nous allons montrer que $K$ est l'enveloppe injective de $A$ considéré comme $A$-module à gauche.

$K$ est une extension essentielle de $A$ ; en effet si $b^{-1} a \in K - \{0\}$, $b(b^{-1} a) \in A - \{0\}$ (remarque 2 après la définition 2).

Pour montrer que $K$ est un $A$-module injectif, nous allons utiliser la propriété 1. Soient $\Lambda$ un idéal à gauche de $A$ , et $\varphi$ un $A$-homomorphisme de $\Lambda$ dans $K$ . Si $\lambda \in \Lambda - \{0\}$ , on peut écrire $\varphi(\lambda) = \lambda(\lambda^{-1} \varphi(\lambda))$ . Si $\lambda , \mu \in A^*$ , $A\lambda \cap A\mu$ est différent de $\{0\}$ ; il existe donc un élément $\nu$ non nul avec $\nu = a\lambda = b\mu$ , d'où

$$\lambda^{-1} \varphi(\lambda) = \lambda^{-1} a^{-1} \varphi(a\lambda) = \nu^{-1} \varphi(\nu) = \mu^{-1} b^{-1} \varphi(b\mu) = \mu^{-1} \varphi(\mu) .$$

Donc $x = \lambda^{-1} \varphi(\lambda)$ est indépendant de $\lambda$ et $\varphi$ est bien réalisé par une homothétie.

## 3. Sous-modules isotypiques.

DÉFINITION 5. - On dit qu'un $A$-module $M$ est <u>indécomposable</u> si ses seuls facteurs directs sont $0$ et $M$ .

PROPRIÉTÉ 3. - *Soit $M$ un $A$-module. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

*(a) $0$ est $\cap$-irréductible dans $M$ .*

*(b) L'enveloppe injective $E(M)$ est indécomposable.*

*(c) $E(M)$ est l'enveloppe injective de tout sous-module non nul de $M$ .*

(a) $\Longrightarrow$ (b) . - Si $E(M)$ est décomposable, on a $E(M) = E_1 \oplus E_2$ , avec $E_1 \neq 0$, $E_2 \neq 0$ . On en déduit :

$$X_1 = E_1 \cap M \neq 0 , \qquad X_2 = E_2 \cap M \neq 0 , \qquad X_1 \cap X_1 \subseteq E_1 \cap E_2 = 0 .$$

(b) $\Longrightarrow$ (c) . - Soit $N$ un sous-module non nul de $M$ . $E(N)$ peut être considéré comme sous-module de $E(M)$ ; $E(N)$ est injectif et facteur direct de $E(M)$ , d'où $E(N) = E(M)$ .

(c) $\Longrightarrow$ (a) . - Si $0 = X_1 \cap X_2$ , où $X_1$ et $X_2$ sont deux sous-modules non nuls de $M$ , $E(M)$ ne peut être extension essentielle de $X_1$ .

COROLLAIRE. - *Pour que deux $A$-modules $M_1$ et $M_2$ , dans lesquels le sous-module nul est inter-irréductible, aient leurs enveloppes injectives isomorphes, il faut*

<u>et il suffit qu'il existe un sous-module non nul de</u> $M_1$ <u>isomorphe à un sous-module non nul de</u> $M_2$ .

La condition est suffisante d'après l'équivalence de (a) et (c) ; elle est nécessaire ; en effet, si $E(M_1)$ est isomorphe à $E(M_2)$ , $M_2$ est isomorphe à un sous-module $M_1'$ de $E(M_1)$ , et l'on a

$$M_1' \cap M_1 \neq 0 .$$

$M_1' \cap M_1$ est isomorphe à un sous-module de $M_2$ .

THÉORÈME 3. - <u>Soient</u> M <u>un</u> A-<u>module</u>, $X = X_1 \cap \dots \cap X_n$ <u>une décomposition d'un sous-module</u> X <u>comme intersection d'un nombre fini de sous-modules</u> $\cap$-<u>irréductibles sans élément superflu</u>. $E(M/X)$ <u>est somme directe de</u> n-<u>sous-modules isomorphes respectivement aux enveloppes injectives indécomposables des modules</u> $M/X_i$ .

Soit $\varphi_i$ l'application canonique de $M/X$ dans $M/X_i$ ;

$$\varphi(m) = (\varphi_1(m) , \dots , \varphi_n(m))$$

est une injection de $M/X$ dans $M/X_1 \oplus \dots \oplus M/X_n$ , donc dans

$$E = \bigoplus_{i=1}^{n} E(M/X_i) .$$

Il nous suffit d'établir que E est une extension essentielle de $\varphi(M/X)$ . Par hypothèse, $\forall\, i$ , il existe $m \in \bigcap_{j \neq i} X_j$ et $m \notin X_i$ , et par suite,

$$N_i = \varphi(M) \cap M/X_i \text{ est différent de } 0 .$$

D'après la propriété 3, $E(M/X_i)$ est l'enveloppe injective de $N_i$ . Soit x un élément de E , $x = (x_1 , \dots , x_n)$ . Pour toute composante non nulle $x_i$ , il existe $a_i \in A$ tel que $a_i x_i \in N_i - \{0\}$ , et par suite, il existe $s \in A$ tel que $sx \in \varphi(M/X) - \{0\}$ . Ceci prouve que E est extension essentielle de $\varphi(M/X)$ .

<u>Remarque</u>. - Les décompositions du théorème 3 existent pour tout X , si M est noethérien ou artinien.

Pour la démonstration d'un cas particulier du théorème d'Azumaya, nous allons utiliser le théorème de Kuroš-Ore.

THÉORÈME 4. - <u>Soit</u> L <u>un treillis modulaire. Si</u>

$$a = x_1 \cap \dots \cap x_r = x_1' \cap \dots \cap x_s'$$

<u>sont deux décompositions d'un élément</u> a <u>en éléments</u> $\cap$-<u>irréductibles sans élément superflu, on a</u> $r = s$ .

LEMME 1. - Si $L$ est modulaire, les applications $x \rightsquigarrow u \cup x$, $y \rightsquigarrow v \cap y$, sont deux applications réciproques entre

$$[u \cap v , v] \text{ et } [u , u \cup v] .$$

(Vérification immédiate.)

LEMME 2. - Dans les conditions du théorème 4, on peut remplacer chaque $x_i$ par un $x'_j$ convenable.

Posons

$$y_i = x_1 \cap \ldots \cap x_{i-1} \cap x_{i+1} \cap \ldots \cap x_r ; \qquad x_i \cap y_i = a .$$

Formons les éléments $z_j = y_1 \cap x'_j$. On a

$$y_i \geqslant z_j \geqslant a$$

et

$$z_j \leqslant x'_j \implies a \leqslant z_1 \cap \ldots \cap z_s \leqslant x'_1 \cap \ldots \cap x'_s = a .$$

Puis

$$[a = x_i \cap y_i , y_i] \simeq [x_i , x_i \cup y_i]$$

et, comme $x_i$ est $\cap$-irréductible dans le deuxième treillis, $a$ est $\cap$-irréductible dans le premier ; par suite, il existe $j$ avec $a = z_j$.

Pour finir de démontrer le théorème, supposons $r \leqslant s$ ; remplaçons les $x_i$ par $x'_{j(i)}$ successivement ; il vient

$$a = x'_{j(1)} \cap \ldots \cap x'_{j(r)} ,$$

ce qui donne $s \leqslant r$, d'où $s = r$.

THÉORÈME 5. - Soit $M$ un $A$-module. Pour deux décompositions de $M$ en somme directe d'un nombre fini de sous-modules injectifs indécomposables,

$$M = M_1 \oplus M_2 \oplus \ldots \oplus M_n = M'_1 \oplus M'_2 \oplus \ldots \oplus M'_{n'} ,$$

on a $n = n'$, et il existe une permutation $\sigma$ de l'ensemble $\{1 , 2 , \ldots , n\}$ telle que $M_i$ soit isomorphe à $M'_{\sigma(i)}$ pour tout $i$.

Posons

$$X_i = M_1 \oplus \ldots \oplus M_{i-1} \oplus M_{i+1} \oplus \ldots \oplus M_n ,$$

$$X'_{i'} = M'_1 \oplus \ldots \oplus M'_{i'-1} \oplus M'_{i'+1} \oplus \ldots \oplus M'_n$$

Les sous-modules $X_i$, $X'_{i'}$ sont $\cap$-irréductibles d'après la propriété 3, car on a, par exemple, $M/X_i \simeq M_i$ qui est un module injectif indécomposable.

D'autre part, on a

$$0 = X_1 \cap \dots \cap X_n = X'_1 \cap \dots \cap X'_{n'},$$

ces décompositions étant sans élément superflu, d'où résulte $n = n'$.

Récurrence sur $n$. - Le résultat est évident pour $n = 1$. D'après le lemme 2 du théorème 4, on a

$$0 = X'_{\sigma(1)} \cap X_2 \cap \dots \cap X_n = X'_{\sigma(1)} \cap M_1 ,$$

et par suite

$$M_1 \simeq (M_1 + X'_{\sigma(1)})/X'_{\sigma(1)} .$$

Mais ceci est un sous-module injectif non nul de $M/X'_{\sigma(1)} \simeq M'_{\sigma(1)}$ ; on en déduit

$$M'_1 \simeq M'_{\sigma(1)} .$$

De plus, on a $M = M_1 \oplus X'_{\sigma(1)}$, ce qui entraîne :

$$X'_{\sigma(1)} \simeq M/M_1 \simeq X_1 .$$

Il suffit alors d'appliquer l'hypothèse de récurrence aux deux modules isomorphes $X_1$ et $X'_{\sigma(1)}$.

COROLLAIRE. - Deux décompositions d'un module injectif $M$ comme somme directe d'un nombre fini de sous-modules injectifs indécomposables se déduisent l'une de l'autre par un automorphisme de $M$.

Remarque. - Cette propriété est encore vérifiée si $M$ est une somme directe infinie de sous-modules injectifs indécomposables.

PROPRIÉTÉ 4. - Si $A$ est un anneau noethérien à gauche, tout $A$-module injectif $M$ est somme directe de sous-modules injectifs indécomposables.

$A$ étant noethérien à gauche, toute somme directe même infinie de modules injectifs est un module injectif (propriété 1). Soit $C$ un sous-module maximal somme directe de sous-modules injectifs indécomposables de $M$ ; $C$ est injectif. On a $M = C \oplus C_1$ et, si $C_1 \neq 0$, prenons $x \in C_1 - \{0\}$ ; soit $O(x)$ l'annulateur de $x$ ; comme $A$ est noethérien, on a

$$O(x) = X_1 \cap \dots \cap X_n ,$$

où les $X_i$ sont des idéaux irréductibles de $A$, la décomposition étant sans élément superflu.

D'après le théorème 3, on a

$$E(Ax) \simeq E(A/O(x)) \simeq E(A/X_1) \oplus \dots \oplus E(A/X_n) ,$$

et $E(Ax) \subseteq C_1$ , car $C_1$ est injectif.

$C \oplus E(A/X_1) \oplus \dots \oplus E(A/X_n)$ est somme directe de modules injectifs indécomposables, ce qui contredit le caractère maximal de $C$ ; on a donc $M = C$ .

## 4. Décomposition en sous-modules isotypiques.

DÉFINITION 5. - On dit que $X$ est un <u>sous-module isotypique</u> de $M$ si l'enveloppe injective de $M/X$ est somme directe de sous-modules injectifs indécomposables tous isomorphes ; la classe $\pi$ d'isomorphie de tous les facteurs directs indécomposables de $E(M/X)$ s'appelle le type de $I$ ; $I$ est dit $\pi$-isotypique.

PROPRIÉTÉ 5. - <u>L'intersection de deux sous-modules $\pi$-isotypiques est un sous-module $\pi$-isotypique</u>.

Soit $X = X_1 \cap X_2$ , $X_1$ et $X_2$ étant $\pi$-isotypiques. On a

$$E(M/X) \subseteq E(M/X_1) \oplus E(M/X_2) ;$$

$E(M/X)$ étant facteur direct dans $E(M/X_1) \oplus E(M/X_2)$ , la propriété en résulte d'après le théorème 5.

Cette propriété et le théorème 3 donnent :

THÉORÈME 6. - <u>Tout sous-module $X$ d'un module artinien ou noethérien admet une décomposition réduite comme intersection de sous-modules isotypiques</u>.

Le théorème 5 donne :

THÉORÈME 7. - <u>Soient deux décompositions réduites</u> :

$$X = I_1 \cap \dots \cap I_n = I'_1 \cap \dots \cap I'_{n'},$$

<u>d'un même sous-module $X$ comme intersection de sous-modules isotypiques. On a $n = n'$ , et les types des $I_i$ sont les mêmes que les types des $I'_{i'}$</u> .

Nous considérons toujours un A-module $M$ noethérien ou artinien. Nous supposons, de plus, que la $(\mathcal{T})$-algèbre des sous-modules de $M$ satisfait à l'axiome D . (Voir [3].)

<u>Rappel</u>. - $\mathfrak{P} \in \mathrm{Ass}(M/X) \iff \mathfrak{P}$ est un résiduel essentiel de $X \iff \exists\, Y$ , avec $X \subset Y \subseteq M$ , tel que, $\forall\, Z$ , $X \subset Z \subseteq Y$ , on ait $\mathfrak{P} = X \,{}^{\bullet}.\, Z$ . Le sous-module

$Q$ est tertiaire si, et seulement si, $\mathrm{Ass}(M/Q)$ ne contient qu'un seul élément.

Remarque. - Si $E$ est un module injectif indécomposable, $\mathrm{Ass}(E)$ contient un élément et un seul. En effet $\mathrm{Ass}(E)$ n'est pas vide et, si $\mathfrak{P}_1 = 0 \cdot\!\!. X_1$, $\mathfrak{P}_2 = 0 \cdot\!\!. X_2$,

$$E = E(X_1) \Longrightarrow X_1 \cap X_2 \neq 0 \Longrightarrow \mathfrak{P}_1 = \mathfrak{P}_2 .$$

THÉORÈME 8. - *Si* $E(M/X) \simeq E_1 \oplus \dots \oplus E_n$, *on a*

$$\mathrm{Ass}(M/X) = \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{Ass}(E_i) .$$

Soit $\mathfrak{P} \in \mathrm{Ass}(M/X)$ ; on a $\mathfrak{P} = X \cdot\!\!. Y$, $Y/X \subseteq M/X$, d'où $E(Y/X) \subseteq E(M/X)$ ; d'après le théorème 5, il existe un $E_i' \simeq E_i$, avec $N_i = E_i' \cap Y/X \neq 0$ ; on a donc $0 \cdot\!\!. N_i = \mathfrak{P}$, et $\mathfrak{P}$ appartient à $\mathrm{Ass}(E_i') = \mathrm{Ass}(E_i)$.

Soit $\mathfrak{P} \in \mathrm{Ass}(E_i)$, $E_i \subseteq E(M/X) \Longrightarrow E_i \cap M/X \neq 0$ ; il existe $N_i \subset E_i \cap M/X$ tel que $\mathfrak{P} = 0 \cdot\!\!. N$ pour $0 < N \leqslant N_i$ ; on en déduit $\mathfrak{P} \in \mathrm{Ass}(M/X)$.

Ce théorème donne immédiatement :

PROPRIÉTÉ 6. - *Pour que le sous-module* $X$ *de* $M$ *soit tertiaire, il faut et il suffit que les facteurs directs indécomposables de l'enveloppe injective de* $M/X$ *aient tous le même idéal premier associé.*

PROPRIÉTÉ 7. - *Tout sous-module isotypique est tertiaire.*

PROPRIÉTÉ 8. - *Deux sous-modules isotypiques de même type ont même idéal premier associé.*

Le théorème 8 montre aussi que l'intersection de deux sous-modules $\mathfrak{P}$-tertiaires est un sous-module $\mathfrak{P}$-tertiaire. Il prouve donc l'existence des décompositions réduites comme intersection de sous-modules tertiaires.

Les réciproques des propriétés 7 et 8 sont inexactes comme le montre l'exemple suivant.

EXEMPLE 2. - Soient $R$ le corps des nombres réels, et $R(y)$ le corps des fractions rationnelles à coefficients dans $R$ et à une variable $y$. Considérons les polynômes à coefficients dans $R(y)$ et à une variable $x$ non permutable avec les coefficients, et imposons les relations :

$$x\, f(y) = f(y)\, x + f'(y) ,$$

où $f'(y)$ désigne la dérivée de $f(y)$ par rapport à $y$. Nous obtenons un anneau

$A$ dont les éléments peuvent se mettre d'une manière unique sous la forme :

$$P(x) = f_n(y)\ x^n + f_{n-1}(y)\ x^{n-1} + \dots + f_1(y)\ x + f_0(y)\ .$$

Tout idéal à gauche de $A$ est principal : il est engendré par chacun de ses polynômes de degré minimum. Par suite, $A$ est noethérien à gauche.

$A$ n'a pas de diviseur de zéro, l'idéal $0$ est donc premier. Il est aussi $\cap$-irréductible à gauche. En effet, supposons que nous ayons deux idéaux à gauche non nuls $X$ et $Y$ avec $0 = X \cap Y$ ; il en résulte

$$(a| \cap (b| = 0 \qquad ( a \in X\ ,\ \ (a| = \text{ idéal à gauche engendré par } a\ ).$$

Considérons la suite $I_n = (ab| + \dots + (ab^n|$ ; c'est une suite croissante d'idéaux, il existe donc $n$ , $a'$ , $a'_1$ , ... , $a'_n \in (a|$ , avec $a'b^{n+1} = a'_1\ b + \dots + a'_n\ b^n$ ; nous supposons de plus que $n$ est minimum. On en déduit

$$(a'b^n - a'_1 - \dots - a'_n\ b^{n-1})b = 0\ .$$

$A$ étant intègre et $b \neq 0$ , on a

$$a'b^n - a'_2\ b - \dots - a'_n\ b^{n-1} = a'_1\ ;$$

mais alors :

$$a'_1 \in (a| \cap (b| = 0\ ,$$

d'où

$$a'b^n = a'_2\ b + \dots + a'_n\ b^{n-1}\ ,$$

ce qui contredit la minimalité de $n$ .

L'enveloppe injective de $A$ est donc isomorphe à son corps des quotients à gauche $K$ (Exemple 1). $0$ est donc un idéal isotypique de type $K$ .

L'anneau $A$ n'a pas d'idéaux bilatères autres que $A$ et $0$ ; en effet, si $P(x)$ appartient à un idéal bilatère $I$ ,

$$Q(x) = P(x)\ f(y) - f(y)\ P(x)$$

est un polynôme non nul si $f(y)$ n'est pas constant, et de degré plus petit que le degré de $P$ . Par suite, puisque $A$ est unitaire, tous ses idéaux à gauche propres sont $0$-premiers à droite. Il en est ainsi en particulier des idéaux à gauche $X_a = (x - a|$ , avec $a \in \underset{\sim}{R}(y)$ , qui sont maximaux, donc $\cap$-irréductibles. Ces idéaux à gauche sont donc isotypiques et ont $0$ pour idéal premier associé.

Pourtant ils ne peuvent être du même type que l'idéal $0$ ; en effet, si $E(A/X_a) \simeq K$ , il existe $B \subset K$ avec $B \simeq A/X_a$ , $B$ étant un $A$-module ; mais ceci est impossible, car tout élément de $B$ a pour annulateur $0$ , alors que l'annulateur de l'élément $1$ de $A/X_a$ est $X_a$. La réciproque de la propriété 8 est donc inexacte.

$A/X_a$ est un $A$-module simple, donc $A/X_a$ et $A/X_b$ $(a \neq b)$ ne peuvent être de même type car ils sont simples et non isomorphes (corollaire, propriété 3). $X = X_a \cap X_b$ est un idéal 0-premier à droite mais non isotypique, car

$$E(A/X) = E(A/X_a) \oplus E(A/X_b) .$$

La réciproque de la propriété 7 est donc inexacte.

PROPRIÉTÉ 9. - Si $A$ est un anneau commutatif noethérien, il y a correspondance biunivoque entre les idéaux premiers de $A$ et les $A$-modules injectifs indécomposables.

Soit $E$ un $A$-module injectif indécomposable ; soit $\{\mathfrak{P}\} = \mathrm{Ass}(E)$. On a

$$\mathfrak{P} = \mathrm{Ann}(Ax) \ , \quad Ax \subset E \ ; \quad Ax \simeq A/\mathfrak{P} \quad \text{et} \quad E = E(Ax) = E(A/\mathfrak{P}) \ .$$

Inversement, si $\mathfrak{P}$ est un idéal premier de $A$, $\mathfrak{P}$ est $\cap$-irréductible, $E(A/\mathfrak{P})$ est injectif, indécomposable. De plus, si

$$E(A/\mathfrak{P}_1) \simeq E(A/\mathfrak{P}_2) \ ,$$

d'après le corollaire de la proposition 3, il existe un sous-module non nul de $A/\mathfrak{P}_1$ isomorphe à un sous-module de $A/\mathfrak{P}_2$ ; ce sous-module a pour annulateur $\mathfrak{P}_1$ et $\mathfrak{P}_2$ et par suite

$$\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{P}_2 \ .$$

La réciproque de la propriété 8 est donc valable lorsque $A$ est un anneau noethérien commutatif.

PROPRIÉTÉ 10. - Soit $Q$ un sous-module tertiaire du $A$-module $M$. Pour qu'il soit isotypique, il suffit que l'hypothèse suivante soit vérifiée :

(H) Les idéaux à gauche de $A$ qui sont annulateurs d'un sous-ensemble du $A$-module $M/Q$ vérifient la condition de chaîne descendante.

On peut supposer que $Q$ n'est pas $\cap$-irréductible. Soit alors $Q = \bigcap_{i=1}^{n} X_i$, décomposition en modules irréductibles sans élément superflu.

$$E(M/Q) = \bigoplus_{i=1}^{n} E(M/X_i) = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i \ .$$

Nous allons montrer, si $\{\mathfrak{P}\} = \mathrm{Ass}(M/Q)$, que $\mathfrak{P}$ est un sous-module isotypique de $A$ de type $E_i$, et ceci pour tout $i$.

Il existe $N \subseteq E_i \cap M/Q$ , avec $\wp = \operatorname{Ann} N$ , d'où

$$\wp = \bigcap_{x \in N} \operatorname{Ann} x \quad \text{et} \quad (H) \quad \text{entraîne} \quad \wp = \bigcap_{j=1}^{r} \operatorname{Ann} x_j \ .$$

Considérons l'homomorphisme $\varphi$ de $A/\wp$ dans $\bigoplus_{j=1}^{r} Ax_j$ , défini par

$$\varphi(\overline{a}) = (ax_1 , \dots , ax_j , \dots , ax_n)$$

où $a$ est un représentant de la classe $\overline{a}$ ; $\varphi$ est un monomorphisme. On en déduit,

$$E(A/\wp) \subseteq \bigoplus_{j=1}^{r} E(Ax_j) \ ,$$

mais $E_i = E(N) = E(Ax_j)$ (propriété 3), ce qui donne le résultat cherché.

PROPRIÉTÉ 11. - <u>Soit</u> $A$ <u>un anneau noethérien à gauche, et soit</u> (H') .

(H') <u>Si</u> $\alpha$ <u>est un idéal à gauche de</u> $A$ <u>et si</u> $\wp$ <u>est l'annulateur de</u> $A/\alpha$ , <u>il existe un nombre fini d'éléments</u> $x_1 , \dots , x_r$ <u>de</u> $A/\alpha$ <u>tels qu'on ait</u>

$$\wp = \bigcap_{i=1}^{r} \operatorname{Ann} x_i \ .$$

<u>Si la condition</u> (H') <u>est satisfaite, il existe une correspondance bijective entre modules injectifs indécomposables et idéaux premiers bilatères.</u>

C'est la correspondance qui, à un module injectif indécomposable $E$ , fait correspondre son idéal premier associé $A(E)$ .

Si $\wp$ est un idéal premier, considérons

$$E(A/\wp) = \bigoplus_{k=1}^{n} E_k \ ;$$

soit $M_k$ un sous-module de $E_k$ qui a pour annulateur $A(E_k)$ ; le sous-module $M_k \cap A/\wp$ $(\neq 0)$ a pour annulateur $\wp$ ainsi que $(E_k)$ ; on a donc

$$\wp = A(E_k) \ .$$

Soient $E_1$ et $E_2$ deux modules injectifs indécomposables qui ont même idéal premier associé :

$$A(E_1) = A(E_2) = \wp \ .$$

Il existe $N \subset E_1$ , $N$ sous-module principal, donc $N \simeq A/\alpha$ , avec $A(E_1) = \operatorname{Ann} N$ : la démonstration de la propriété 10 montre alors que $E(A/A(E_1))$ est un module injectif somme directe de sous-modules injectifs indécomposables isomorphes à $E_1$ . On en déduit

$$E_1 \simeq E_2 \ .$$

PROPRIÉTÉ 12. - L'hypothèse (H) est vérifiée quel que soit $Q$, sous-module tertiaire de $M$, dans l'un des cas suivants :

(1) L'anneau $A$ est artinien à gauche.

(2) Tous les idéaux à gauche de $A$ sont bilatères.

(3) Le module $M$ est noethérien, et l'anneau $A$ est un module à gauche de type fini sur le centre de $A$.

Cas (1) : évident.

Cas (2) : $Q \overset{\bullet}{.} x$ est un idéal à gauche, donc bilatère, et par suite,

$$Q \overset{\bullet}{.} x = Q \overset{\bullet}{.} Ax ;$$

la condition (H) résulte alors de la condition (D) des $\mathfrak{T}$-algèbres.

Cas (3) : Si $C$ désigne le centre de l'anneau $A$, le $A$-module $M$ est un $C$-module noethérien. $K$ étant un sous-ensemble quelconque de $M$, considérons les sous-modules $Q \,.^{\bullet}\, (Q \overset{\bullet}{.} K)$ de ce $C$-module. Puisqu'ils vérifient la condition de chaîne ascendante et que l'on a

$$Q \overset{\bullet}{.} K = Q \overset{\bullet}{.} [Q \,.^{\bullet}\, (Q \overset{\bullet}{.} K)] ,$$

les idéaux à gauche $Q \overset{\bullet}{.} K$ de $A$ vérifient la condition de chaîne descendante.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CARTAN (H.) and EILENBERG (S.). - Homological algebra. - Princeton, Princeton University Press, 1956 (Princeton mathematical Series, 19).

[2] DUBREIL (Paul). - Algèbre, Tome 1 : Equivalence, opérations, groupes, anneaux. 2e édition. - Paris, Gauthier-Villars, 1954 (Cahiers scientifiques, 20).

[3] GRAPPY (Jacques). - Eléments tertiaires d'une ($\mathfrak{T}$)-algèbre, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et Théorie des nombres, t. 17, 1963/64, n° 24, 7 p.

[4] LESIEUR (L.) et CROISOT (R.). - Algèbre noethérienne non commutative. - Paris, Gauthier-Villars, 1963 (Mémorial des Sciences mathématiques, 154).

[5] NORTHCOTT (D. G.). - An introduction to homological algebra. - Cambridge, at the University Press, 1960.

[6] RENAULT (Guy). - Sur les anneaux non commutatifs, III et IV, Séminaire Dubreil-Pisot, t. 15, 1961/62, 6 et 7 p.