Marie-Louise Dubreil-Jacotin

Sur les applications homomorphes d'un demi-groupe ordonné sur un groupe ordonné

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 17, nº 1 (1963-1964), exp. nº 10, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1963-1964__17_1_A9_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
17e année, 1963/64, n° 10

17 février 1964

SUR LES APPLICATIONS HOMOMORPHES D'UN DEMI-GROUPE ORDONNÉ SUR UN GROUPE ORDONNÉ

par Mme Marie-Louise DUBREIL-JACOTIN

§ 1

Dans ce qui suit nous considérerons deux ensembles S et $\overline{S}$ munis chacun :

1° d'une loi de composition interne notée multiplicativement,

2° d'une relation d'ordre notée $\leqslant$.

La relation d'ordre étant isotone par rapport à la multiplication :

$$a \leqslant b \quad \Rightarrow \quad xa \leqslant xb \quad \text{et} \quad ax \leqslant bx \quad \text{quel que soit} \quad x \in S ,$$

$$\overline{a} \leqslant \overline{b} \quad \Rightarrow \quad \overline{x}\overline{a} \leqslant \overline{x}\overline{b} \quad \text{et} \quad \overline{a}\overline{x} \leqslant \overline{b}\overline{x} \quad \text{quel que soit} \quad \overline{x} \in \overline{S} .$$

On dit que $\overline{S}$ <u>est image homomorphe de</u> S , s'il existe une application surjective h de S sur $\overline{S}$ qui est :

1° un homomorphisme pour la multiplication $\overline{ab} = \overline{a}\overline{b}$,

2° isotone pour l'ordre : $a \leqslant b \to \overline{a} \leqslant \overline{b}$,

nous appellerons h un <u>homomorphisme isotone de</u> S <u>sur</u> $\overline{S}$.

Soient h un homomorphisme isotone de S sur $\overline{S}$, $\mathcal{R}$ l'équivalence d'application, S/R l'ensemble quotient ; $A \in S/R$ sera la classe des éléments $a_\nu \in S$ tels que $h(a_\nu) = \overline{a} \in \overline{S}$.

Ordonnons S/R par $A \leqslant B \iff \overline{a} \leqslant \overline{b}$: les ensembles S/R et $\overline{S}$ sont alors isomorphes en tant qu'ensembles ordonnés ; le théorème d'homomorphisme pour les groupoïdes nous apprend aussi qu'en définissant AB comme la classe des éléments ab , $a \in A$, $b \in B$, S/R est isomorphe à $\overline{S}$ en tant que groupoïde. De sorte qu'en tant que groupoïde ordonné, S/R est image isomorphe de $\overline{S}$, <u>et l'application canonique</u> $a \xrightarrow{i} A$ <u>fournit un homomorphisme isotone de</u> S <u>sur</u> S/R .

Réciproquement, à toute équivalence $\mathcal{R}$ de S , compatible avec l'opération, correspond, par l'application canonique, l'image homomorphe S/R , et l'application canonique est isotone si l'on peut ordonner S/R pour qu'il en soit ainsi, ce qu'on exprime en disant que $\mathcal{R}$ <u>est compatible avec la relation d'ordre</u>. Rappelons la <u>condition nécessaire et suffisante</u> pour qu'il en soit ainsi.

Soient A , A_1 , ... , A_n une suite finie de classes toutes distinctes. Nous dirons qu'elles forment <u>une chaîne issue de</u> A si :

$$\exists \quad a_0 \in A , \quad a_1 \in A_1, \quad \dots , \quad a_n \in A_n , \quad a'_1 \in A_1 , \quad \dots , \quad a'_{n-1} \in A_{n-1}$$

tels que $a_0 < a_1$, $a'_1 < a_2$, $< \dots$, $a'_{n-1} < a_n$.

$\mathcal{R}$ <u>est compatible avec la relation d'ordre si et seulement s'il **n'existe**, dans aucune classe distincte de</u> A <u>d'une chaîne issue de</u> A , <u>un élément de</u> S <u>plus petit qu'un élément de</u> A .

On définit alors dans S/R la relation d'ordre par :

(si $A \neq B$) $A < B$ <u>si</u> B <u>fait partie d'une chaîne issue de</u> A .

Cette relation n'est autre que la fermeture transitive de la relation

$$A \text{ précède } B \text{ si } \exists \quad a \in A \text{ et } b \in B \text{ avec } a < b .$$

Signalons encore la propriété suivante : <u>Chaque classe d'une équivalence compatible avec la relation d'ordre est convexe</u>.

<u>La recherche des homomorphismes isotones de</u> S <u>est donc équivalente à celle des équivalences de</u> S <u>compatibles avec l'opération et avec la relation d'ordre</u>.

<u>Cas particuliers.</u>:

1° Si S est un groupe : il est bien connu qu'une équivalence dans S est compatible pour l'opération et pour l'ordre si et seulement si sa partition est la décomposition en classes par rapport à un sous-groupe à la fois <u>distingué et convexe</u>. (La compatibilité avec l'ordre résulte ici de la propriété plus forte, facile à vérifier : si $a \neq b$, $a < b$, $\forall$ $a' \equiv a$, $\exists$ $b' \equiv b$ avec $a' < b'$.)

2° Si l'ordre dans S est $a \parallel b$ pour $a \neq b$, toute image homomorphe $\overline{S}$ de S répond à la question, quel que soit l'ordre de $\overline{S}$.

3° Si l'ordre dans $\overline{S}$ est $\overline{a} \parallel \overline{b}$ si $\overline{a} \neq \overline{b}$, et s'il existe un homomorphisme isotone de S sur $\overline{S}$, il est évident que l'équivalence d'application est moins fine que l'équivalence "zig-zag" utilisée avec succès par BLYTH pour étudier la structure, en tant qu'ensemble ordonné, d'un groupoïde résidué.

Je rappelle la définition de cette équivalence, dont les classes sont les "parties détachées" du diagramme de Hasse :

$$a \equiv a' \quad (\rho) \iff \exists \; a_1 , \dots , a_n$$

en nombre fini tels que

$$a \not\parallel a_1 , \dots , a_i \not\parallel a_{i+1} , \dots , a_n \not\parallel a' .$$

D'après sa définition et l'isotonie de la multiplication par rapport à la relation d'ordre cette équivalence est régulière à gauche et à droite, et S/ρ fournit une image homomorphe et isotone de S .

BLYTH a montré dans sa thèse que S/ρ est un quasi-groupe si S est résidué, quasi-groupe qui est un groupe si S est un demi-groupe.

A vrai dire on voit facilement que ces propriétés subsistent dans des conditions plus générales.

L'existence des quotients est assurée si S est "quasi-résidué" au sens suivant : $\forall$ a et $b \in S$,

$$\langle a \,^{\bullet}\!.\, b\rangle = \{x \; ; \; xb \leqslant a\} \neq \emptyset$$

$$\langle a \,.\!^{\bullet}\, b\rangle = \{x \; ; \; bx \leqslant a\} \neq \emptyset$$

ce que nous exprimerons par $\langle a \,^{\bullet}\!.\, b\rangle$ et $\langle a \,.\!^{\bullet}\, b\rangle$ existent, et la règle de simplification pour ρ est également vraie si S est "fortement quasi-résidué" au sens suivant : Quels que soient a et $b \in S$ les quasi-résiduels à gauche et à droite $\langle a \,^{\bullet}\!.\, b\rangle$ et $\langle a \,.\!^{\bullet}\, b\rangle$ de a par b sont filtrants supérieurement, ce qui est a fortiori vrai si S est résidué, c'est-à-dire si les $\langle a \,^{\bullet}\!.\, b\rangle$ et $\langle a \,.\!^{\bullet}\, b\rangle$ ont chacun un élément maximun.

Ceci résulte de la propriété suivante : Si S est fortement quasi-résidué et si $u \equiv v \quad (\rho)$, $\forall \; x$, tout élément de $\langle u \,^{\bullet}\!.\, x\rangle$ est congru mod ρ à tout élément de $\langle v \,^{\bullet}\!.\, x\rangle$.

Si on a alors $ax \equiv bx \quad (\rho)$, puisque $a \in \langle ax \,^{\bullet}\!.\, x\rangle$ et $b \in \langle bx \,^{\bullet}\!.\, x\rangle$, on en déduit $a \equiv b \quad (\rho)$, et une démonstration analogue donne la règle de simplification à gauche.

On peut donc énoncer en particulier :

Si D est un demi-groupe fortement quasi-résidué, ρ l'équivalence zig-zag : D/ρ est un groupe image homomorphe et isotone de D .

4° Enfin un cas particulier fondamental du problème général est fourni par la théorie d'Artin-Prüfer.

S est alors un treillis multiplicatif avec élément unité : c'est le treillis $\mathfrak{J}$ des idéaux fractionnaires d'un anneau $\mathfrak{A}$ commutatif intègre et unitaire. On sait que $\mathfrak{J}$ est résidué.

L'équivalence d'application de la fermeture considérée par PRÜFER :

$$\mathfrak{A} \to \overline{\mathfrak{A}} = e : (e : \mathfrak{A})$$

(où e, élément unité de $\mathfrak{J}$, est l'anneau $\mathfrak{A}$), équivalence qui est aussi l'équivalence d'Artin :

$$\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{A}' \quad \text{si} \quad e : \mathfrak{A} = e : \mathfrak{A}'$$

donne une image homomorphe et isotone de S, $\overline{S} = S/\mathfrak{A}_e$ qui est un groupe si et seulement si $\mathfrak{J}$ est intégralement fermé, c'est-à-dire $\mathfrak{A} : \mathfrak{A} = e$ pour tout $\mathfrak{A} \in \mathfrak{J}$ (propriété qui a lieu si $\mathfrak{A}$ est complètement entier fermé).

§ 2

Les résultats dont je vais parler maintenant généralisent ceux d'ARTIN-PRÜFER et aussi les généralisations qui ont été faites par I. MOLINARO et J. QUERRÉ. Ils sont contenus dans un article présenté par L. FUCHS [3] aux Acta de Szeged en décembre 1962 et dans un article du Bulletin de la Société mathématique de France [2].

Dans la théorie d'Artin-Prüfer, l'élément unité e de S est élément maximum de sa classe, et tout élément dont l'image est plus petite que $\overline{e}$ est lui-même plus petit que e.

Nous nous limiterons, dans ce qui suit, à l'étude des images homomorphes et isotones $\overline{S}$ de S qui sont unitaires et telles que, R étant l'équivalence d'application, le noyau $N = h^{-1}(\overline{e})$ ait un élément maximum ξ, et qui satisfont à la condition :

$$\otimes \qquad h^{-1}(\overset{\leqslant}{\overline{e}}) \subseteq \overset{\leqslant}{\xi}$$

en désignant par $\overset{\leqslant}{a}$ la section commençante de a, ensemble des éléments de S qui sont $\leqslant a$.

Il est essentiel de remarquer :

1° La condition imposée $\otimes$ est automatiquement satisfaite pour les équivalences d'application $\mathcal{E}_\varphi$ d'une application de fermeture φ de S dans S.

En effet, $\overline{S} = \varphi(S)$ est ordonné par la relation d'ordre de S, et l'isotomie de φ est précisément un des axiomes de fermeture. Si l'équivalence d'application $\mathcal{E}_\varphi$ est compatible avec la multiplication, $S/\mathcal{E}_\varphi$ ordonné par $A < B \Leftrightarrow \bar{a} < \bar{b}$ (A classe ayant $\bar{a}$ comme élément maximum) est image homomorphe et isotone de S, et il en est de même de $\bar{S}$, avec dans $\bar{S}$ l'opération $\bar{a} \times \bar{b} = \overline{ab}$. Si cette image est unitaire, la classe unité N admet un élément maximum ξ, et $A < N$ est équivalent à $\bar{a} < \xi$; donc $A \subseteq \overset{\leq}{\xi}$, et $\otimes$ est vérifiée.

2° <u>On peut trouver dans un p. o. demi-groupe</u> S^* <u>convenable une équivalence</u> $\mathcal{R}$ <u>telle que</u> $S^*/\mathcal{R}$ <u>fournisse une image homomorphe et isotone de</u> S^* <u>qui soit un groupe, et telle que la condition</u> $\otimes$ <u>soit satisfaite, mais telle que</u> $\mathcal{R}$ <u>ne soit pas équivalence d'application d'une fermeture de</u> S^* <u>dans</u> S^*.

<u>Les solutions trouvées comprendront donc seulement comme cas particulier celles fournies par les fermetures</u>.

§ 3

Etudions maintenant les propriétés entraînées pour S par l'existence d'une image homomorphe et isotone $\bar{S} = h(S)$ vérifiant la condition $\otimes$.

1° $\langle \xi \,\dot{.}\, a\rangle$ <u>existe pour tout</u> $a \in S$ <u>dont l'image</u> $\bar{a}$ <u>est inversible à gauche</u>.

Soient $\bar{a}'.\bar{a} = \bar{e}$ et $a' \in h^{-1}(\bar{a}')$; on a : $h(a'a) = \bar{a}'\bar{a} = \bar{e}$, donc $a'a \leq \xi$, c'est-à-dire $a' \in \langle \xi \,\dot{.}\, a\rangle$.

2° <u>On a</u> $\langle \xi \,\dot{.}\, \xi\rangle = \langle \xi \,.\dot{}\, \xi\rangle = \overset{\leq}{\xi}$, c'est-à-dire : <u>le résiduel à gauche et à droite de</u> ξ <u>existe et est</u> ξ.

On a $h(\xi^2) = \bar{e}.\bar{e} = \bar{e}$, donc $\xi^2 \leq \xi$, d'où $\xi \in \langle \xi \,\dot{.}\, \xi\rangle$ et $\xi \in \langle \xi \,.\dot{}\, \xi\rangle$. De plus, $u \leq \xi \Rightarrow u\xi \leq \xi^2 \leq \xi$, donc $u \in \langle \xi \,\dot{.}\, \xi\rangle$, et de même $u \in \langle \xi \,.\dot{}\, \xi\rangle$.

Enfin si $v \in \langle \xi \,\dot{.}\, \xi\rangle$, on a $v\xi \leq \xi$; donc $h(v)\, h(\xi) \leq h(\xi) = \bar{e}$, c'est-à-dire $\bar{v} \leq \bar{e}$, et $\otimes$ entraîne $v \leq \xi$.

3° <u>Si</u> a <u>et</u> b <u>ont même image dans</u> $\bar{S}$, $\langle \xi \,\dot{.}\, a\rangle$ <u>et</u> $\langle \xi \,\dot{.}\, b\rangle$ <u>existent en même temps et sont égaux</u>.

Soit $x \in \langle \xi \,\dot{.}\, a\rangle$, c'est-à-dire $xa \leq \xi$; donc $h(x)\, h(a) \leq \bar{e}$. Mais $h(b) = h(a)$, donc $h(x)\, h(b) \leq \bar{e}$, d'où $xb \leq \xi$, $\langle \xi \,\dot{.}\, b\rangle$ existe, et

$$\langle \xi \,\dot{.}\, a\rangle \subseteq \langle \xi \,\dot{.}\, b\rangle .$$

On démontre alors de même :

$$\langle \xi \,\dot{.}\, b\rangle \subseteq \langle \xi \,\dot{.}\, a\rangle .$$

Il en résulte que : Si les quasi-résiduels $\langle \xi \,{}^{\bullet}\!.\, a\rangle$ existent pour tout $a \in S$ *l'équivalence d'application de l'homomorphe* h *est plus fine que l'équivalence* :

$$\mathfrak{a}_{\xi} : \quad a \equiv b \,, \qquad \text{si} \qquad \langle \xi \,{}^{\bullet}\!.\, a\rangle = \langle \xi \,{}^{\bullet}\!.\, b\rangle \,.$$

Comme $\langle \xi \,{}^{\bullet}\!.\, a\rangle = \langle \xi \,{}^{\bullet}\!.\, b\rangle$ entraîne évidemment $\langle \xi \,{}^{\bullet}\!.\, xa\rangle = \langle \xi \,{}^{\bullet}\!.\, xb\rangle$, *cette équivalence est régulière à gauche*.

4° *Si* $\overline{a}$ *est inversible à gauche, et si* $\langle a \,.{}^{\bullet}\, a\rangle$ *existe, on a*

$$\langle a \,.{}^{\bullet}\, a\rangle \subseteq \overset{\leqslant}{\xi} \,.$$

Soit $x \in \langle a \,.{}^{\bullet}\, a\rangle$, donc $ax \leqslant a$. Soit a' , tel que $\overline{a'}\,\overline{a} = \overline{e}$. On a $a'a \leqslant \xi$, d'où $a'ax \leqslant \xi$; il en résulte $\overline{a'}\,\overline{a}\,\overline{x} \leqslant \overline{e}$, c'est-à-dire $\overline{x} \leqslant \overline{e}$ et $x \leqslant \xi$.

Supposons de plus que $\overline{S}$ *est un groupe*. Alors : *Tous les* $\langle \xi \,{}^{\bullet}\!.\, a\rangle$ *et* $\langle \xi \,.{}^{\bullet}\, a\rangle$ *existent*. ξ *est élément maximum de* $\bigcup \langle a \,{}^{\bullet}\!.\, a\rangle$ *et* $\bigcup \langle a \,.{}^{\bullet}\, a\rangle$, les réunions étant étendues à tous les $\langle a \,{}^{\bullet}\!.\, a\rangle$ et $\langle a \,.{}^{\bullet}\, a\rangle$ qui existent.

On a vu, dans le 1°, que si $a' \in A^{-1}$ (où A^{-1} est la classe inverse de la classe A de a) on avait $a' \in \langle \xi \,{}^{\bullet}\!.\, a\rangle$, donc

$$A^{-1} \subseteq \langle \xi \,{}^{\bullet}\!.\, a\rangle \,.$$

Les éléments a' *de* A^{-1} *sont caractérisés par la propriété suivante* :

$$(\mathfrak{F}) \qquad \begin{cases} a' \in \langle \xi \,{}^{\bullet}\!.\, a\rangle \,, \\ xa' \in \langle \xi \,{}^{\bullet}\!.\, a\rangle \implies x \leqslant \xi \,. \end{cases}$$

a. Soit $a' \in A^{-1}$ et $xa' \in \langle \xi \,{}^{\bullet}\!.\, a\rangle$, on a donc $xa'a \leqslant \xi$, donc

$$\overline{x}\,\overline{a'a} = \overline{x} \leqslant \overline{e} \,, \text{ donc } \; x \leqslant \xi \,.$$

b. Soit $a' \in \langle \xi \,{}^{\bullet}\!.\, a\rangle$ tel que $xa' \in \langle \xi \,{}^{\bullet}\!.\, a\rangle \implies x \leqslant \xi$. On a $a'a \leqslant \xi$, donc $\overline{a'a} \leqslant \overline{e}$. Mais $\overline{S}$ étant un groupe $\exists$ $\overline{b}$ tel que $\overline{b}.(\overline{a'a}) = \overline{e}$. Donc

$$ba'a \leqslant \xi \,, \quad ba' \in \langle \xi \,{}^{\bullet}\!.\, a\rangle \quad \text{et} \quad b \leqslant \xi \quad \text{et} \quad \overline{b} \leqslant \overline{e} \,.$$

On en déduit

$$(\overline{e}) = \overline{b}.\,(\overline{a'a}) \leqslant \overline{a'a} \leqslant \overline{e} \,,$$

c'est-à-dire $\overline{a'a} = \overline{e}$.

C. Q. F. D.

La propriété $(\mathfrak{F})$ a été introduite par FUCHS qui appelle les éléments de $\langle \xi \,{}^{\bullet}\!.\, a\rangle$ qui la vérifient : "left multiplicatively maximal elements". Nous les appellerons, pour simplifier, $\mathfrak{F}$-éléments de $\langle \xi \,\dot{.}\, a\rangle$. De plus, si $a'' \in \langle \xi \,\dot{.}\, a\rangle$ est plus grand qu'un $\mathfrak{F}$-élément a', la condition $xa'' \in \langle \xi \,\dot{.}\, a\rangle$ entraînant $xa' \in \langle \xi \,\dot{.}\, a\rangle$, a'' est aussi $\mathfrak{F}$-élément. Donc, si le résiduel $\langle \xi \,\dot{.}\, a\rangle$ existe, il est élément maximum de la classe A^{-1}, inverse de la classe A de a supposée exister (la réciproque étant inexacte : un élément maximum de A^{-1} est seulement maximal dans $\langle \xi \,\dot{.}\, a\rangle$), et A^{-1} existe (c'est-à-dire $\langle \xi \,\dot{.}\, a\rangle$ admet des $\mathfrak{F}$-éléments) si et seulement si $\xi \,\dot{.}\, a$ est un $\mathfrak{F}$-élément de $\langle \xi \,\dot{.}\, a\rangle$.

On a vu dans le 3° que si $h(a) = h(b)$, on avait $\langle \xi \,\dot{.}\, a\rangle = \langle \xi \,\dot{.}\, b\rangle$. Mais si $\langle \xi \,\dot{.}\, a\rangle = \langle \xi \,\dot{.}\, b\rangle$, les $\mathfrak{F}$-éléments de $\langle \xi \,\dot{.}\, a\rangle$ sont les $\mathfrak{F}$-éléments de $\langle \xi \,\dot{.}\, b\rangle$, donc $A^{-1} = B^{-1}$ et par suite $A = B$, donc $h(a) = h(b)$, et on a :

<u>Lorsque $\overline{S}$ est un groupe, l'équivalence d'application est l'équivalence d'Artin généralisée</u> $\mathfrak{a}_{\varepsilon}$, équivalence prise pour les résiduels à gauche, mais qui, étant l'équivalence d'application de l'homomorphisme considéré, est, pour la même raison, aussi bien l'équivalence prise pour les résiduels à droite.

On a d'ailleurs une propriété plus forte que l'égalité $\mathfrak{a}_{\varepsilon} = {}_{\varepsilon}\mathfrak{a}$:

ξ <u>est équi-résiduel c'est-à-dire</u> $\langle \xi \,\dot{.}\, a\rangle = \langle \xi \,.\dot{}\, a\rangle$ <u>pour tout</u> a.

Soit $x \in \langle \xi \,\dot{.}\, a\rangle$ c'est-à-dire $xa \leqslant \xi$, $\overline{xa} \leqslant \overline{e}$. Il en résulte $\overline{a}\overline{x}.\overline{a} \leqslant \overline{a}$, $\overline{a}\overline{x}.\overline{a}.\overline{a'} \leqslant \overline{a}\overline{a'} = \overline{e}$ et $\overline{a}\overline{x} \leqslant \overline{e}$; donc $ax \leqslant \xi$, $x \in \langle \xi \,.\dot{}\, a\rangle$, et de même $\langle \xi \,.\dot{}\, a\rangle \subseteq \langle \xi \,\dot{.}\, a\rangle$.

En résumé, nous avons montré :

<u>À un isomorphisme près, il existe au plus une image homomorphe et isotone $\overline{S}$ de S qui soit un groupe, si on suppose que le noyau a un élément maximum ξ et que la condition</u> $\otimes$ <u>est satisfaite</u> : ξ <u>est en effet l'élément maximum des ensembles</u> $\bigcup \langle a \,\dot{.}\, a\rangle$ <u>et</u> $\bigcup \langle a \,.\dot{}\, a\rangle$, <u>donc est unique et l'équivalence d'application est univoquement déterminée : c'est l'équivalence d'Artin généralisée</u> :

$$\mathfrak{a}_{\varepsilon} : \; a \equiv b \quad \text{si} \quad \langle \xi \,\dot{.}\, a\rangle = \langle \xi \,\dot{.}\, b\rangle .$$

§ 4

Voyons maintenant à quelles conditions suffisantes nous aurons effectivement un tel groupe homomorphe $\overline{S}$.

À tout élément ξ de S tel que :

(1) $\langle \xi \,\dot{.}\, \xi\rangle = \langle \xi \,.\dot{}\, \xi\rangle = \overset{\leqslant}{\xi}$,

(2) $\langle \xi \,\dot{.}\, a\rangle$ existe pour tout $a \in S$ et $\langle \xi \,\dot{.}\, a\rangle = \langle \xi \,.\dot{}\, a\rangle$,

on peut associer l'équivalence $\mathfrak{a}_\varepsilon$, et $\overline{S} = S/\mathfrak{a}_\varepsilon$ <u>est une image homomorphe de</u> $\overline{S}$.

On vérifie sans peine que si $\xi \,{}^{\bullet}\!\!.\, b$ existe :

$$\langle \xi \,{}^{\bullet}\!\!.\, ab \rangle = \langle (\xi \,{}^{\bullet}\!\!.\, b) \,{}^{\bullet}\!\!.\, a \rangle \ ;$$

on a donc :

$$\langle \xi \,{}^{\bullet}\!\!.\, a\xi \rangle = \langle (\xi \,{}^{\bullet}\!\!.\, \xi) \,{}^{\bullet}\!\!.\, a \rangle = \langle \xi \,{}^{\bullet}\!\!.\, a \rangle$$

c'est-à-dire $a\xi \equiv a$ et de même $\xi a \equiv a$. Donc $\overline{S}$ est unitaire, le noyau $E = N$ étant la classe de ξ ; on a de plus :

N <u>admet</u> ξ <u>comme élément maximum.</u>

En effet : $N = \{n_\nu \ ; \langle \xi \,{}^{\bullet}\!\!.\, n_\nu \rangle = \langle \xi \,{}^{\bullet}\!\!.\, \xi \rangle\}$. On a donc

$$\forall \ n_\nu \in N : \ \xi \in \langle \xi \,{}^{\bullet}\!\!.\, n_\nu \rangle \ ,$$

c'est-à-dire

$$\xi n_\nu \leqslant \xi \quad \text{et} \quad n_\nu \in \langle \xi \,{}^{\bullet}\!\!.\, \xi \rangle = \overset{\leqslant}{\xi} \ .$$

<u>Enfin on peut ordonner</u> $S/\mathfrak{a}_\varepsilon$ <u>pour que l'application canonique soit isotone et que la condition</u> $\otimes$ <u>soit satisfaite</u>.

1° <u>En effet</u> $\mathfrak{a}_\varepsilon$ <u>est compatible avec la relation d'ordre</u>.

Si on avait en effet une suite finie d'éléments :

$$a < a_1 \ , \ a'_1 < a_2 \ , \ a'_2 < a_3 \ , \ \ldots \ , \ a'_{n-1} < a_n \ , \ a'_n < a \ ,$$

avec

$$a \not\equiv a_1 \ , \ a_1 \equiv a'_1 \ , \ a'_1 \not\equiv a_2 \ , \ a_2 \equiv a'_2 \ , \ \ldots \ , \ a_n \equiv a'_n \ , \ a'_n \not\equiv a \ ,$$

de $a < a_1$ résulterait $\langle \xi \,{}^{\bullet}\!\!.\, a \rangle \supseteq \langle \xi \,{}^{\bullet}\!\!.\, a_1 \rangle$;
de $a'_{n-1} < a_n$ résulterait $\langle \xi \,{}^{\bullet}\!\!.\, a'_{n-1} \rangle \supseteq \langle \xi \,{}^{\bullet}\!\!.\, a_n \rangle = \langle \xi \,{}^{\bullet}\!\!.\, a'_n \rangle$
et, de proche en proche, $\langle \xi \,{}^{\bullet}\!\!.\, a_1 \rangle \supseteq \langle \xi \,{}^{\bullet}\!\!.\, a \rangle$;
d'où $\langle \xi \,{}^{\bullet}\!\!.\, a \rangle = \langle \xi \,{}^{\bullet}\!\!.\, a_1 \rangle$ contrairement à l'hypothèse.

2° <u>La condition</u> $\otimes$ <u>est vérifiée</u>. Elle résulte immédiatement de ce que, <u>si l'on a</u> : $b \leqslant \xi$ <u>et</u> $b' \equiv b$, <u>on a</u> : $b' \leqslant \xi$.

On a en effet $\langle \xi \,{}^{\bullet}\!\!.\, b \rangle \supseteq \langle \xi \,{}^{\bullet}\!\!.\, \xi \rangle$, donc $\xi \in \langle \xi \,{}^{\bullet}\!\!.\, b' \rangle$, c'est-à-dire $\xi b' \leqslant \xi$, d'où $b' \leqslant \xi$.

On a de plus :

$\mathfrak{a}_\xi$ <u>est la moins fine des équivalences</u> $\mathcal{E}$ <u>de</u> S <u>telles que</u> $S/\mathcal{E}$ <u>soit une image</u>

homomorphe, unitaire et isotone de S , ξ étant élément maximum de la classe unité N et $\otimes$ étant vérifiée.

Soit en effet $a \equiv a'$ $(\mathcal{E})$, et soit $x \in \langle \xi \; ^{\bullet}. \; a \rangle$, donc $xa \leqslant \xi$. On a donc :

$$XA \leqslant N \qquad (X , \ A \text{ classes de } x \text{ et } a \text{ mod } \mathcal{E}).$$

Mais $xa' \in XA$ entraîne $xa' \leqslant \xi$ et $x \in \langle \xi \; ^{\bullet}. \; a' \rangle$, et on a de même l'inclusion inverse, donc $a \equiv a' (\mathfrak{a}_\xi)$.

$\mathfrak{a}_\xi$, qui seule peut donner un groupe comme ensemble quotient, en donne effectivement un si et seulement si tout élément de $S/\mathfrak{a}_\xi$ a un inverse, ce qui s'énonce sous l'une ou l'autre des formes équivalentes :

a. Tout $\langle \xi \; ^{\bullet}. \; a \rangle$ admet des $\mathfrak{S}$-éléments ;

b. $\forall \, a$, $\exists \, a'$ tel que $\langle \xi \; .^{\bullet} \; a'a \rangle = \langle \xi \; .^{\bullet} \; \xi \rangle$, c'est-à-dire si et seulement si le noyau N est net.

Ces conditions ne font pas intervenir la propriété que nous savons être nécessaire : ξ est bi-maximum.

J. QUERRÉ, dans sa thèse, a montré que si S est un demi-groupe résidué, l'existence d'un élément maximum commun aux deux ensembles $\{a \; ^{\bullet}. \; a\}$ et $\{a \; .^{\bullet} \; a\}$, éléments mis en évidence par MOLINARO dans le cas commutatif, était une condition non seulement nécessaire, mais suffisante, pour qu'il existe une fermeture dans S donnant une image homomorphe qui soit un groupe.

Considérons le cas particulier où S n'étant pas supposé résidué, l'élément ξ , bimaximum de $\bigcup \langle a \; ^{\bullet}. \; a \rangle$ et $\bigcup \langle a \; .^{\bullet} \; a \rangle$, et vérifiant $\xi \; ^{\bullet}. \; \xi = \xi \; .^{\bullet} \; \xi = \xi$, admet des résiduels à gauche et à droite égaux pour tout a . Nous allons voir qu'ici encore $S/\mathfrak{a}_\xi$ est un groupe.

En effet, si $\langle (\xi \; ^{\bullet}. \; a) \; ^{\bullet}. \; (\xi \; ^{\bullet}. \; a) \rangle$ existe, on a, puisque ξ est bi-maximum :

$$\langle \xi \; ^{\bullet}. \; (\xi \; ^{\bullet}. \; a)a \rangle = \langle (\xi \; ^{\bullet}. \; a) \; ^{\bullet}. \; (\xi \; ^{\bullet}. \; a) \rangle \subseteq \overset{\leqslant}{\xi}$$

et, comme $(\xi \; ^{\bullet}. \; a)a \leqslant \xi$ entraîne $\langle \xi \; ^{\bullet}. \; (\xi \; ^{\bullet}. \; a)a \rangle \supseteq \overset{\leqslant}{\xi}$, on a :

$$\langle \xi \; ^{\bullet}. \; (\xi \; ^{\bullet}. \; a)a \rangle = \overset{\leqslant}{\xi} = \langle \xi \; ^{\bullet}. \; \xi \rangle$$

c'est-à-dire $(\xi \; ^{\bullet}. \; a)a \equiv \xi$ et l'ensemble quotient est un groupe, la classe inverse de $A \ni a$ étant la classe de $(\xi \; ^{\bullet}. \; a)$.

Le raisonnement suppose que $\langle (\xi \; ^{\bullet}. \; a) \; ^{\bullet}. \; (\xi \; ^{\bullet}. \; a) \rangle$ existe, mais il en est bien ainsi puisque, de l'existence de $x \in \langle \xi \; ^{\bullet}. \; a \rangle$, résulte $xa \leqslant \xi$, donc

$$\xi xa \leqslant \xi^2 \leqslant \xi \quad \text{et} \quad \xi x \in \langle \xi \; ^{\bullet}. \; a \rangle \, .$$

Si alors $\xi \cdot\!\!\cdot\, a$ existe, on a, en prenant $x = \xi \cdot\!\!\cdot\, a$,

$$\xi(\xi \cdot\!\!\cdot\, a) \leqslant (\xi \cdot\!\!\cdot\, a)$$

et

$$\xi \in \langle(\xi \cdot\!\!\cdot\, a) \cdot\!\!\cdot\, (\xi \cdot\!\!\cdot\, a)\rangle .$$

De plus, le résiduel de $(\xi \cdot\!\!\cdot\, a)$ par lui-même existe et est ξ ; et l'équivalence $\mathfrak{a}_\xi$ est l'équivalence d'application de la fermeture $a \to \bar{a} = \xi \cdot\!\!\cdot\, (\xi \cdot\!\!\cdot\, a)$.

A. BIGARD [1] vient d'étendre aux demi-groupes fortement quasi-résidués les résultats de J. QUERRÉ [4] concernant les fermetures et les propriétés de nomalité des demi-groupes résidués. Il a montré en particulier que, l'existence des résiduels pour le bi-maximum était non seulement suffisante, mais aussi <u>nécessaire</u>, pour l'existence d'une fermeture dans S donnant comme image, un groupe homomorphe.

Dans le cas où S est unitaire, tous les quasi-résiduels $\langle a \cdot\!\!\cdot\, a\rangle$ et $\langle a \,.\!\cdot\, a\rangle$ existent puisque e en est élément. Il est donc nécessaire, pour que $S/\mathfrak{a}_e$ soit un groupe, que e soit bi-maximum donc que :

<u>Tous les résiduels</u> $a \,.\!\cdot\, a$ <u>et</u> $a \cdot\!\!\cdot\, a$ <u>existent et soient égaux à</u> e , c'est-à-dire encore que S soit <u>intégralement fermé</u>.

Réciproquement, S intégralement fermé entraîne que e est bi-maximum et, d'après ce que nous avons vu, si les résiduels de e existent pour tout a , cette condition est aussi suffisante pour que $S/\mathfrak{a}_e$ soit un groupe.

§ 5

Pour terminer remarquons que :

1° Si nous appelons H le complexe $\overset{\leqslant}{\xi}$, l'équivalence d'Artin

$$a \equiv b \iff \langle\xi \cdot\!\!\cdot\, a\rangle = \langle\xi \cdot\!\!\cdot\, b\rangle$$

n'est pas autre chose que l'équivalence principale relative à H .

Le résultat fondamental : À tout ξ , tel que :

a. $\langle\xi \cdot\!\!\cdot\, \xi\rangle = \langle\xi \,.\!\cdot\, \xi\rangle = \overset{\leqslant}{\xi}$,

b. $\overset{\leqslant}{\xi}$ est équi-résiduel,

c. $\overset{\leqslant}{\xi}$ est net,

correspond une équivalence d'Artin généralisée $\mathfrak{a}_e$ telle que :

$S/\mathfrak{a}_\xi$ soit un groupe $\iff$ l'ensemble E des $\mathfrak{F}$-éléments de $\langle\xi \cdot\!\!\cdot\, \xi\rangle$ est net ou $\Leftrightarrow$ tout $\langle \xi \,{}^{\bullet}\!.\, a \rangle$ contient des $\mathfrak{F}$-éléments, suggère le théorème suivant pour un demi-groupe non ordonné :

THÉORÈME. - <u>A tout complexe</u> H ,

a. <u>équi-résiduel</u> : $H \,{}^{\bullet}\!.\, a = H \,.\!{}^{\bullet}\, a$, $\forall$ $a \in D$,

b. <u>net</u>,

c. <u>tel que</u> $H \,{}^{\bullet}\!.\, H = H \,.\!{}^{\bullet}\, H = H$,

<u>correspond une équivalence principale</u> ρ_H <u>telle que</u> D/ρ_H <u>est un groupe si l'on a une des conditions nécessaires et suffisantes suivantes</u> :

α. $\forall$ a , $\exists$ $x \in D$: $xa \in H$ et $uxa \in H \Rightarrow u \in H$.

β. $E = \{f \in H ; \; xf \in H \to x \in H\}$ <u>est net</u>.

La classe unité, E , est contenue dans H .

La démonstration de ce théorème est immédiate.

2° L'application la plus intéressante des résultats du paragraphe précédent s'obtient en considérant comme demi-groupe S un sous demi-groupe convenable du demi-groupe des complexes, ordonné par inclusion, d'un demi-groupe D . Nous renvoyons pour cela à l'article du Bulletin de la Société mathématique de France [2].

BIBLIOGRAPHIE

[1] BIGARD (Alain). - Sur quelques équivalences remarquables dans un groupoïde quasi-résidué, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 258, 1964, p. 3414-3416.

[2] DUBREIL-JACOTIN (Marie-Louise). - Sur les images homomorphes d'un demi-groupe ordonné, Bull. Soc. math. France, t. 92, 1964, p. 101-115.

[3] FUCHS (Laszlo). - On group homomorphic images of partially ordered semigroups, Acta scient. Math. Szeged, t. 25, 1964, p. 139-142.

[4] QUERRÉ (Julien). - Contribution à la théorie des structures ordonnées et des systèmes d'idéaux, Annali di Mat. pura ed appl., Série 4, t. 66, 1964, p. 265-389 (Thèse Sc. math. Paris, 1963).