Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Pierre Samuel

Modules réflexifs et anneaux factoriels

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 17, nº 1 (1963-1964), exp. nº 8, p. 1-4
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1963-1964__17_1_A7_0>

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1963-1964, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
17e année, 1963/64, n° 8

27 janvier 1964

MODULES RÉFLEXIFS ET ANNEAUX FACTORIELS

par Pierre SAMUEL

1. Résultats préliminaires.

Sauf mention expresse du contraire, les anneaux sont commutatifs, unitaires et noethériens, et les modules sont unitaires et de type fini.

Soit A un anneau et M un A-module. Rappelons qu'on dit qu'une suite $(a_1, \ldots, a_n)$ d'éléments de A est une M-suite (ou une suite M-régulière), si, pour $i = 1, \ldots, n$, l'homothétie définie par a_i dans $M/(a_1 M + \ldots + a_{i-1} M)$ est injective ; pour $M = A$, on obtient la notion de A-suite. Lorsque A est un anneau local, les M-suites formées d'éléments de l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ sont de cardinal borné, et les cardinaux de telles M-suites maximales sont tous égaux ; ce nombre est appelé la profondeur de M (notation $\operatorname{prof}(M)$) ; c'est aussi le plus petit entier n tel que

$$\operatorname{Ext}^n(A/\mathfrak{m}, M) \neq 0 .$$

Rappelons qu'on appelle dimension (de Krull) d'un module M sur un anneau local A (notation $\dim(M)$) le degré de n'importe quel polynôme caractéristique de M, ou encore la dimension de Krull de l'anneau local $A/\operatorname{Ann}(M)$. Alors, si $M \neq 0$, on a

$$\operatorname{prof}(M) \leqslant \dim(M) . \tag{1}$$

Lorsque $\operatorname{prof}(M) = \dim(M)$, on dit que M est un module de Macaulay. Les anneaux de Macaulay ont toutes sortes de bonnes propriétés ([3], vol. II, App. 6). Pour un anneau non local, "Macaulay" veut dire "localement Macaulay".

Supposons toujours A local, et notons $dh(M)$ la dimension homologique de M (au sens des résolutions libres). Alors, si $dh(M)$ est finie, on a

$$dh(M) + \operatorname{prof}(M) = \operatorname{prof}(A) . \tag{2}$$

Ceci s'applique à tous les A-modules M lorsque l'anneau local A est régulier ("théorème des syzygies") ; dans ce cas $\operatorname{prof}(A) = \dim(A)$.

PROPOSITION 1. - *Soient A un anneau de Macaulay, M un A-module, et n un entier. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a_q) *Toute A-suite de cardinal $\leqslant q$ est une M-suite ;*

(b_q) On a $\operatorname{prof}_{A_p}(M_p) \geqslant \inf(q, \operatorname{prof}(A_p))$ pour tout idéal premier p de A.

Lorsque A est régulier (plus généralement quand $dh(M) < \infty$), (a_q) et (b_q) sont aussi équivalentes à :

(c_q) On a $dh_{A_p}(M_p) \leqslant \sup(h(p) - q, 0)$ pour tout idéal premier p de A.

L'implication $(a_q) \Longrightarrow (b_q)$ est facile modulo les propriétés des anneaux de Macaulay. Pour $(b_q) \Rightarrow (a_q)$, on procède par récurrence sur q : pour $q = 1$, c'est une histoire d'idéaux premiers associés à M ; ensuite la récurrence se fait en observant que $(c_1, \ldots, c_n)$ est M-régulière si et seulement si c_1 est injectif dans M et si $(c_2, \ldots c_n)$ est $(M/c_1 M)$-régulière. L'équivalence de (b_q) et (c_q) se déduit aussitôt de (2), en observant que tout A_p est local régulier (donc aussi de Macaulay) (cf. [3]).

Sous les hypothèses de la proposition 1, $\operatorname{prof}(A_p)$ est égal à $\dim(A_p)$, qu'on appelle aussi la hauteur de p (notation $h(p)$).

Les propriétés de la proposition 1 ont les interprétations suivantes :

1° Si A est intègre, (a_1) veut dire que M est sans torsion ;

2° Si A est intégralement clos, (a_2) veut dire que M est réflexif. Des caractérisations équivalentes de la réflexivité sont, dans ce cas :

(i) l'application canonique de M dans son bidual M^{**} est un isomorphisme ;

(ii) M est sans torsion, et on a $M = \bigcap M_p$ (où p parcourt l'ensemble des idéaux premiers de hauteur 1 de A) (cf. [1], chap. VII, ou [2]).

3° Si A est local régulier, $(a_{\dim(A)})$ veut dire que M est libre.

D'où, dans le cas local régulier, une suite de notions entre "réflexif" et "libre" (pour $q = 3, \ldots, \dim(A) - 1$) qui mériterait une étude plus approfondie.

2. Anneaux gradués factoriels.

PROPOSITION 2. - Soit $A = \bigoplus_{n \geqslant 0} A_n$ un anneau gradué factoriel à degrés positifs. Alors :

a. A_0 est un anneau factoriel ;

b. Chaque A_n est un A_0-module réflexif.

En effet, (a) est quasiment évident (et montre, par exemple, que l'algèbre symétrique d'un module projectif sur un anneau factoriel est factorielle) ; pour (b), on utilise la caractérisation (a_2) des modules réflexifs (proposition 1). La proposition 2 admet la réciproque partielle suivante :

PROPOSITION 3. - Soient R un anneau factoriel et M un R-module tel que toutes ses puissances symétriques $S^n(M)$ soient réflexives. Alors l'algèbre symétrique $S(M)$ est factorielle.

On montre, en utilisant la réflexivité, que tout élément premier de R est premier dans $S(M)$; on localise alors $S(M)$ par rapport à l'ensemble des éléments non nuls de R, et on applique un théorème de Nagata (cf. [2]).

Ce qu'on vient de voir s'insère dans la suite de propriétés d'une algèbre symétrique $S_R(M)$ suivante :

1° Pour que $S_R(M)$ soit intègre, il faut et il suffit que R soit intègre et que $S_R(M)$ soit un R-module sans torsion.

2° Pour que $S_R(M)$ soit factorielle, il faut et il suffit que R soit factoriel et que $S_R(M)$ soit un R-module réflexif.

3° Pour que $S_R(M)$ soit un anneau régulier, il faut et il suffit que R soit régulier et que $S_R(M)$ soit un R-module projectif (en fait, on montre qu'un anneau gradué $A = \bigoplus A_n$, à degrés positifs, est régulier si et seulement si A_0 est régulier, et A est l'algèbre symétrique d'un A_0-module projectif).

En comparant avec la suite de propriétés décrite dans le § 1, on a l'impression qu'il y a, entre "factoriel" et "régulier", une suite de propriétés d'anneaux de force croissante.

3. Exemples.

1° Soient A un anneau de Macaulay, et M le A-module défini par n générateurs (x_i) et k relations linéairement indépendantes $(\sum_{i=1}^{n} a_{ji}\, x_i = 0)_{j=1,\ldots,k}$. Notons $\mathfrak{a}$ l'idéal engendré par les mineurs d'ordre k de la matrice (a_{ij}). Pour que M jouisse de la propriété (a_q) de la proposition 1, il faut et il suffit que $\mathfrak{a}$ ne soit contenu dans aucun idéal premier de hauteur q. En effet, on a $dh(M) \leq 1$ de sorte qu'on peut remplacer (a_q) par (c_q) ; comme $dh(M) \leq 1$, (c_q) veut dire alors que M_p est (A_p)-libre pour $h(p) \leq q$, et c'est bien ce qu'exprime l'hypothèse sur les mineurs.

2° En particulier supposons M défini par n générateurs (x_i) et une seule relation $\sum_{i=1}^{n} a_i\, x_i = 0$; notons $\mathfrak{a}$ l'idéal engendré par les a_i. Alors la puissance symétrique $S^j(M)$ est définie par $\binom{n+j-1}{j}$ générateurs (les monômes de degré j en les x_i) et $k(j) = \binom{n+j-2}{j-1}$ relations linéairement indépendantes (les produits de $\sum a_i x_i$ par les monômes de degré $j - 1$). On peut alors appliquer le 1° à $S^j(M)$. Les mineurs correspondants sont tous dans $\alpha^{k(j)}$, et celui relatif aux monômes multiples de x_i vaut (au signe près) $a_i^{k(j)}$; donc les idéaux premiers qui contiennent tous ces mineurs sont les mêmes que ceux qui contiennent α . Ainsi, si α n'est contenu dans aucun idéal premier de hauteur q , tous les $S^j(M)$ jouissent de la propriété (a_q) de la proposition 1.

En particulier, si A est intègre et si α n'est contenu dans aucun idéal premier de hauteur 1, $S(M)$ est sans torsion, donc intègre. Si A est factoriel et si α n'est contenu dans aucun idéal premier de hauteur 2, alors $S(M)$ est réflexif, donc factoriel (dans [2], on donne des démonstrations directes de l'intégrité (resp. factorialité) de $S(M)$). On trouve ainsi des exemples de modules réflexifs non projectifs dont toutes les puissances symétriques sont réflexives.

Géométriquement, nous dirons qu'une variété affine V est factorielle si son anneau de coordonnées A est factoriel. Rappelons que l'anneau du "fibré cotangent" à V est $S_A(D(A))$, où $D(A)$ est le module des différentielles de A . Ainsi, lorsque V est une <u>hypersurface</u> factorielle et non-singulière en codimension 2 (en particulier une hypersurface non-singulière en codimension 3, d'après un théorème de Severi-Andreotti-Salmon-Grothendieck), son fibré cotangent est une variété factorielle.

3° Montrons que, dans le 2°, l'hypothèse qu'il y a une seule relation est essentielle. Prenons pour A un anneau local régulier de dimension 3 ; notons (a, b, c) un système de générateurs de son idéal maximal, et soit M le quotient de A^5 par le sous-module P engendré par les vecteurs $u = (a, b, 0, c, 0)$ et $v = (0, a, b, 0, c)$. D'après le 1°, M est réflexif. Par contre $S^2(M)$ est le quotient de A^{15} par un sous-module E , de rang 9 et dont les systèmes minimaux de générateurs ont 10 éléments ; donc E n'est pas libre, d'où $dh(E) = 1$ et $dh(S^2(M)) = 2$; en vertu de (c_2) (proposition 1), $S^2(M)$ ne peut être réflexif, et $S(M)$ n'est donc pas factoriel.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI (Nicolas). - Algèbre commutative. Chap. 1-2, 3-4, 5-6, 7. - Paris, Hermann, 1961-1964-1965 (Act. scient. et ind., 1290, 1293, 1308 et 1314 ; Bourbaki, 27, 28, 30 et 31).

[2] SAMUEL (Pierre). - Anneaux gradués factoriels et modules réflexifs, Bull. Soc. math. France, t. 92, 1964, p. 237-249.

[3] ZARISKI (O.) and SAMUEL (P.). - Commutative algebra. Vol. 1 and 2. - New York, Van Nostrand Company, 1958-1960 (The University Series in higher Mathematics).