Jacques Fort

Éléments isotypiques dans les $(\mathcal{T})$-algèbres modulaires

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 17, nº 1 (1963-1964), exp. nº 6, p. 1-19
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1963-1964__17_1_A5_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
17e année, 1963/64, n° 6

13 janvier 1964

ÉLÉMENTS ISOTYPIQUES DANS LES $(\mathfrak{C})$-ALGÈBRES MODULAIRES

par Jacques FORT

Introduction

Nous nous proposons, dans cette étude, de définir et d'étudier une notion d'élément isotypique dans un treillis (L) modulaire, complet, $\cap$-continu, noethérien (ou artinien) ; cette notion a été choisie de telle sorte :

1° Qu'elle coïncide avec celle de sous-module isotypique introduite par P. GABRIEL (cf. [3] et [4]), lorsque (L) est le treillis des sous-modules d'un module noethérien (ou artinien) ;

2° Qu'elle soit comparable à celle d'élément tertiaire définie par L. LESIEUR et R. CROISOT (cf. [5] et [6]), lorsque (L) est une $(\mathfrak{C})$-algèbre modulaire (cf. § 2, chapitre 2).

Les notations utilisées sont celles du précédent exposé, donné en ce séminaire ([2]).

Au chapitre 1, une relation d'équivalence dans l'ensemble $\mathcal{C}$ des quotients co-irréductibles de (L) (définition 1.2 et proposition 1.1) nous a permis de définir la notion de Γ-types de quotients co-irréductibles attachés à un élément donné X de (L) ; Γ est une classe d'isomorphismes de quotients pouvant être choisie ultérieurement de plusieurs façons intéressantes. Il est alors possible, pour chaque choix de Γ, de développer une théorie des éléments Γ-isotypiques de (L), et de décomposer les éléments de (L) en intersection réduite d'éléments Γ-isotypiques (théorèmes 1.2 et 1.3).

Au chapitre 2, nous appliquons les résultats du chapitre 1 aux $(\mathfrak{C})$-algèbres modulaires (L) et aux modules. Nous déterminons des conditions suffisantes portant sur la classe Γ pour qu'un élément Γ-isotypique de (L) soit tertiaire, par l'étude des résiduels essentiels de cet élément (théorème 2.1) ; enfin, il est possible de choisir la classe Γ, dans le cas des modules, pour obtenir une théorie des Γ-types et des sous-modules Γ-isotypiques équivalente à celle, connue, des sous-modules isotypiques (théorème 2.3).

Chapitre 1

Eléments Γ-isotypiques d'un treillis modulaire noethérien (ou artinien)

Dans ce chapitre et le suivant, le treillis (L) est supposé noethérien ou artinien, afin que soit assurée la représentation de tout élément de (L) comme intersection finie d'éléments $\cap$-irréductibles.

Nous désignerons par T la classe [1] des isomorphismes de treillis portant sur les quotients du treillis (L). Un objet de T est défini par la donnée de deux quotients A/B, A'/B', et par celle d'un isomorphisme de treillis appliquant A/B sur A'/B' :

$$A/B \xrightarrow{f} A'/B' .$$

De même, Σ désignera la classe des similitudes, portant sur les quotients du treillis (L). Comme toute similitude définit un isomorphisme de treillis, de façon naturelle (cf. chapitre 1 de [2]), nous écrirons : $\Sigma \subseteq T$.

Nous considérons, dans ce chapitre, une classe intermédiaire Γ

$$\Sigma \subseteq \Gamma \subseteq T$$

ayant en outre les propriétés suivantes :

(α) Γ est stable pour la loi de composition des isomorphismes ;

(β) Si $f : A/B \to A'/B'$ est de la classe Γ, alors l'isomorphisme inverse $f^{-1} : A'/B' \to A/B$ est de la classe Γ ;

(γ) Si $f : A/B \to A'/B'$ est de la classe Γ, toutes les restrictions de f aux sous-quotients C/D de A/B sont aussi dans Γ.

Au chapitre 2, nous utiliserons certaines classes importantes Γ.

1. Quotients co-irréductibles partiellement Γ-isomorphes.

DÉFINITION 1.1. - Un quotient A/B de (L) est dit co-irréductible lorsque A est un élément co-irréductible du treillis A/B.

Cela signifie (cf. [2], définition 4.2) que B est $\cap$-irréductible dans le quotient A/B et que $A > B$.

---

(1) T est un ensemble, somme d'une famille d'ensembles indexée par l'ensemble $Z \times Z$ (Z étant l'ensemble des quotients de (L)).

Précisons qu'un quotient A/B est <u>non trivial</u> lorsque $A > B$ $(A \neq B)$ et que A'/B' est <u>sous-quotient</u> de A/B lorsque $A' \in A/B$, $B' \in A/B$, $A' \geq B'$.

DÉFINITION 1.2. - <u>Deux quotients non triviaux</u> A_1/B_1 <u>et</u> A_2/B_2 <u>sont dits</u> partiellement Γ-isomorphes <u>lorsqu'il existe un sous-quotient non trivial</u> C_1/B_1 <u>de</u> A_1/B_1 (<u>de même dénominateur</u> B_1), <u>et un sous-quotient non trivial</u> C_2/B_2 <u>de</u> A_2/B_2 (<u>de même dénominateur</u> B_2), <u>tels que les treillis</u> C_1/B_1 <u>et</u> C_2/B_2 <u>soient</u> isomorphes <u>au moyen d'un isomorphisme</u> $f : C_1/B_1 \to C_2/B_2$ <u>de la</u> classe Γ .

Cette relation entre quotients, ainsi définie, n'est pas transitive en général. Elle l'est cependant dans les conditions suivantes :

PROPOSITION 1.1. - <u>Dans l'ensemble</u> $\mathcal{C}$ <u>des quotients</u> co-irréductibles <u>de</u> (L) ; <u>la relation</u> " $A_1/B_1 \equiv A_2/B_2$ <u>modulo</u> Γ <u>si, et seulement si,</u> A_1/B_1 <u>et</u> A_2/B_2 <u>sont partiellement</u> Γ-<u>isomorphes" est une relation d'</u>équivalence <u>(dite</u> Γ-<u>équivalence)</u>.

<u>De plus, pour qu'une famille</u> finie <u>de quotients de</u> $\mathcal{C}$

$$A_1/B_1 \ , \ A_2/B_2 \ , \ \dots \ , \ A_n/B_n$$

<u>appartienne à une même classe d'équivalence, il faut et il suffit qu'il existe des sous-quotients</u>

$$C_1/B_1 \ , \ C_2/B_2 \ , \ \dots \ , \ C_n/B_n$$

non triviaux, <u>deux à deux isomorphes par un</u> isomorphisme de Γ .

<u>Preuve</u>. - Seule, la transitivité de la relation $\equiv$ est à vérifier. Soient donc pour cela : $A_1/B_1 \equiv A_2/B_2$ et $A_2/B_2 \equiv A_3/B_3$ (mod Γ).

Il existe donc des sous-quotients non triviaux : D_1/B_1 sous-quotient de A_1/B_1 , D_2/B_2 et F_2/B_2 sous-quotients de A_2/B_2 , F_3/B_3 sous-quotient de A_3/B_3 , et les isomorphismes de la classe Γ :

$$f : D_1/B_1 \to D_2/B_2 \ , \quad g : F_2/B_2 \to F_3/B_3 \ .$$

Posons : $C_2 = D_2 \cap F_2$, $C_1 = f^{-1}(C_2)$, $C_3 = g(C_2)$; A_2/B_2 étant co-irréductible : $C_2 > B_2$.

Les sous-quotients C_1/B_1 et C_3/B_3 sont alors non triviaux et isomorphes par restriction de $g \circ f$ à C_1/B_1 . Cette restriction étant de la classe Γ (propriétés (α) et (γ) de Γ). $A_1/B_1 \equiv A_3/B_3$; $\equiv$ est bien une équivalence dans $\mathcal{C}$.

Observons de plus que les trois sous-quotients non triviaux ainsi obtenus : C_1/B_1 , C_2/B_2 , C_3/B_3 sont deux à deux isomorphes en tant que treillis au moyen d'isomorphismes de la classe Γ , ce qui permet d'obtenir aisément par récurrence la dernière partie de la proposition (la condition suffisante étant évidente).

Nous dirons, par définition, que deux quotients co-irréductibles de $\mathcal{C}$ sont de même type par rapport à Γ (ou de même Γ-type), si et seulement s'ils sont Γ-équivalents. Chaque classe d'équivalence (mod Γ) dans $\mathcal{C}$, définit ainsi un Γ-type de quotient co-irréductible, et un seul.

Tout quotient co-irréductible A/B de $\mathcal{C}$ peut être considéré comme sous-quotient d'un quotient A_0/B tel que A_0 soit élément co-irréductible maximal du treillis U/B (2), A_0 contenant A ; A_0 est élément injectif (complément) minimal du treillis U/B , et est une enveloppe injective dans U/B de A (cf. [2], théorème 5.1, et proposition 4.5). Chaque classe mod Γ dans $\mathcal{C}$ peut donc être définie par un tel représentant A_0/B .

Un quotient A_0/B non trivial, co-irréductible, en lequel A_0 est injectif minimal de U/B , sera appelé par définition, quotient injectif minimal (ou indécomposable) ; l'ensemble de ces quotients sera désigné par $\mathcal{C}_m$ ($\mathcal{C}_m \subseteq \mathcal{C}$).

D'après ce qui précède, les Γ-types de quotients co-irréductibles de $\mathcal{C}$ peuvent être identifiés aux Γ-types de quotients injectifs indécomposables de $\mathcal{C}_m$.

2. Quotients injectifs indécomposables associés à un élément de (L) .

Considérons un élément X de (L) , $X \neq U$, et une décomposition de X en intersection d'éléments $\cap$-irréductibles dans (L) , non superflus :

(1) $$X = X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_n \ .$$

Considérons les quotients $Z_1 = U/X_1$, $Z_2 = U/X_2$, ... , $Z_n = U/X_n$, les X_i étant $\cap$-irréductibles, ce sont des quotients injectifs indécomposables. Soient π_1 , π_2 , ... , π_n les Γ-types (3) de ces quotients dans $\mathcal{C}_m$. Nous voulons montrer que ces Γ-types ne dépendent que de X . Soit donc une deuxième décomposition de X en intersection d'éléments $\cap$-irréductibles de (L) , non superflus :

(2) $$X = X'_1 \cap X'_2 \cap \dots \cap X'_{n'} \ .$$

---

(2) cf. [2], théorème 5.1, et sa remarque.

(3) Ces Γ-types ne sont pas nécessairement distincts deux à deux.

Dans ces conditions, O. ORE a montré (cf. [9], II, dual du théorème 11, p. 270) que $n = n'$, qu'il existe une permutation σ de l'ensemble $\{1 , 2 , \dots , n\}$ et qu'il existe pour chaque i , deux quotients propres H_i/X_i et $H'_{\sigma(i)}/X'_{\sigma(i)}$ qui soient semblables.

Nous avons donc, pour chaque i : $U/X_i \equiv U/X'_{\sigma(i)}$ modulo Γ , puisque toutes les similitudes sont, par hypothèse, de classe Γ $(\Sigma \subseteq \Gamma)$. $U/X'_{\sigma(i)}$ est bien du même Γ-type π_i que $U/X_i = Z_i$.

DÉFINITION 1.3. - Les Γ-types $\pi_1 , \pi_2 , \dots , \pi_n$ ainsi obtenus sont appelés les Γ-types de quotients injectifs indécomposables associés à l'élément X (plus court : les Γ-types de X).

Ces Γ-types de X sont définis par des quotients $U/X_1 , U/X_2 , \dots , U/X_n$ ayant des dénominateurs $X_1 , X_2 , \dots , X_n$, qui dépendent de la décomposition choisie pour X . Nous nous proposons de définir ces mêmes Γ-types au moyen de quotients ayant comme dénominateur commun X (les numérateurs dépendant cette fois-ci du choix de l'$\cap$-décomposition de X).

THÉORÈME 1.1. - Pour $X \in (L)$, $X \neq U$, les Γ-types de quotients injectifs indécomposables Q/X de dénominateur X , sont en nombre fini, et leur ensemble coïncide avec celui des Γ-types de quotients injectifs indécomposables associés à X .

Preuve. - Soit Q un élément injectif minimal du treillis U/X . Si Q est un élément essentiel de U/X , alors U est extension essentielle de Q dans U/X , et $Q = U$. X est alors $\cap$-irréductible dans $Q = U$, et le théorème est vrai dans ce cas.

Si Q n'est pas essentiel, il possède dans U/X au moins un complément Y_1 qui est élément $\cap$-irréductible, Q et Y_1 étant alors des injectifs extrêmaux réciproques dans U/X (cf. [2], proposition 5.1).

Soit $Q = Y_2 \cap \dots \cap Y_n$ une décomposition de Q en intersection d'éléments $\cap$-irréductibles. La décomposition $X = Y_1 \cap Y_2 \cap \dots \cap Y_n$ ne comporte pas non plus d'éléments superflus car $Q > X$ et, d'autre part, Q étant complément de Y_1 dans U/X , nous avons

$$Y_1 \cap (Y_2 \cap \dots \cap Y_{i-1} \cap Y_{i+1} \cap \dots \cap Y_n) > X .$$

Les Γ-types associés à X , $\pi_1 , \dots , \pi_n$, sont donc ceux des n quotients $U/Y_1 , U/Y_2 , \dots , U/Y_n$ (définition 1.3).

Comme d'autre part les quotients co-irréductibles Q/X et $(Q \cup Y_1)/Y_1$ sont transposés, il en résulte que Q/X est Γ-équivalent à U/Y_1, et est du Γ-type π_1.

Inversement, soit π_i un type de quotient injectif indécomposable associé à X ; c'est le type d'un quotient $Z_i = U/X_i$ obtenu au moyen d'une décomposition de X en intersection d'éléments $\cap$-irréductibles de (L), non superflus :

$$X = X_1 \cap \dots \cap X_i \cap \dots \cap X_n . \tag{1}$$

Si $n = 1$, $X = X_i = X_1$ est $\cap$-irréductible dans (L), et $\pi_i = \pi_1$ est le type du quotient $U/X_1 = U/X$ de dénominateur X. Si $n > 1$, posons

$$\overline{X}_i = X_1 \cap \dots \cap X_{i-1} \cap X_{i+1} \cap \dots \cap X_n ,$$

$$X = X_i \cap \overline{X}_i .$$

Considérons une enveloppe injective E_i de $\overline{X}_i$ dans le treillis U/X :

$$X = X_i \cap E_i .$$

Les quotients E_i/X et $(E_i \cup X_i)/X_i$ sont co-irréductibles et transposés, par suite les quotients injectifs indécomposables E_i/X et U/X_i sont du même Γ-type π_i dans $\mathcal{C}_m$. Le théorème est démontré.

Le Γ-type d'un quotient co-irréductible étant toujours celui d'un quotient injectif indécomposable (cf. § 1 du présent chapitre), nous pouvons énoncer :

COROLLAIRE 1.1. - Pour $X \in (L)$, $X \neq U$, les Γ-types de quotients co-irréductibles A/X de dénominateur X, sont en nombre fini, et leur ensemble coïncide avec celui des Γ-types de quotients injectifs indécomposables associés à X.

Nous pouvons dire, par abus d'expression, que ce théorème 1.1 et son corollaire précisent la structure du treillis "juste au-dessus de X ".

Lorsque n est supérieur à 1 (le cas $n = 1$ étant trivial), il est possible de réaliser les n types $\pi_1 , \pi_2 , \dots , \pi_n$, sous la forme de n quotients injectifs indécomposables $E_1/X , E_2/X , \dots , E_n/X$ tels que les éléments $E_1, E_2, \dots, E_n$ soient $\cup$-indépendants sur X (cf. [2], définition 1.1). Considérons à nouveau les éléments $\overline{X}_i$ associés à la décomposition (1) introduits au cours de l'étude du théorème précédent :

$$X_i \cap \overline{X}_i = X \qquad \text{et} \qquad \bigcup_{\lambda \neq i} \overline{X}_\lambda \leqslant X_i$$

impliquent :

$$\overline{X}_i \cap [\bigcup_{\lambda \neq i} \overline{X}_\lambda] = X \qquad i = 1 , 2 , \dots , n .$$

Les éléments $\overline{X}_1 , \overline{X}_2 , \dots , \overline{X}_n$ sont donc $\cup$-indépendants sur X , ce qui peut se traduire aussi par (cf. [2], proposition 1.2) :

(3) $$\overline{X}_i \cap (\overline{X}_{i+1} \cup \overline{X}_{i+2} \cup \dots \cup \overline{X}_n) = X \qquad i = 1 , 2 , \dots , n - 1 .$$

X_1 , étant $\cap$-irréductible non essentiel $(n > 1)$ de U/X , est injectif maximal de U/X ([2], théorème 5.2) ; il existe donc , dans le treillis U/X , une enveloppe injective Q_1 de $\overline{X}_2 \cup \overline{X}_3 \cup \dots \cup \overline{X}_n$ contenue dans X_1 ([2], théorème 4.1). Soit, d'autre part, E_1 une enveloppe injective de $\overline{X}_1$ dans U/X .

Pour $i = 1$, (3) entraîne (les extensions étant essentielles) :

$$E_1 \cap Q_1 = X .$$

Procédons par récurrence, et supposons que pour $i = 1 , 2 , \dots , h$ $(h < n)$, nous ayons trouvé $E_1 , E_2 , \dots , E_h$, $Q_1 , Q_2 , \dots , Q_h$ ayant les propriétés :

$$\left.\begin{array}{l} - \ E_i \text{ est enveloppe injective de } \overline{X}_i \text{ dans } U/X , \\ - \ Q_i \text{ est enveloppe injective de } \overline{X_{i+1}} \cup \dots \cup \overline{X}_n \text{ dans } U/X \\ - \ E_i \cap Q_i = X , \end{array}\right\} i = 1 , 2 , \dots , h$$

- $E_i \leqslant Q_{i-1}$ et $Q_i \leqslant Q_{i-1}$, $i = 2 , 3 , \dots , h$.

Les conditions (3) donnent, pour $i = h + 1$ (si $h + 1 < n$),

$$\overline{X}_{h+1} \cap (\overline{X}_{h+2} \cup \dots \cup \overline{X}_n) = X .$$

Q_h est un injectif de U/X contenant $\overline{X}_{h+1}$ et $\overline{X}_{h+2} \cup \dots \cup \overline{X}_n$; il existe donc, dans U/X , une enveloppe injective E_{h+1} de $\overline{X}_{h+1}$ et une enveloppe injective Q_{h+1} de $\overline{X}_{h+2} \cup \dots \cup \overline{X}_n$, toutes deux contenues dans Q_h , et telles que

$$E_{h+1} \cap Q_{h+1} = X$$

(si $h + 1 = n$, nous choisissons $E_n = Q_{n-1}$ et $Q_n = Q_{n-1}$).

Ce procédé de récurrence permet donc de trouver, dans U/X , des enveloppes injectives $E_1 , E_2 , \dots , E_n$ de $\overline{X}_1 , \overline{X}_2 , \dots , \overline{X}_n$ respectivement, telles que :

$$X \leqslant E_i \cap (E_{i+1} \cup \dots \cup E_n) \leqslant E_i \cap Q_i = X , \qquad i = 1 , 2 , \dots , n - 1 .$$

$E_1, E_2, \ldots, E_n$ sont donc bien $\cup$-indépendants sur X, et de plus

(4) $$E_2 \cup E_3 \cup \ldots \cup E_n \leqslant X_1 , \quad E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n \not\leqslant X_1 ,$$

car $E_1 \cap (E_2 \cup E_3 \cup \ldots \cup E_n) = X$, $X_1 \cap E_1 = X$ (E_1 est extension essentielle de $\overline{X}_1$ dans U/X et $X = X_1 \cap \overline{X}_1$).

3. Eléments Γ-isotypiques de (L) .

Le cas où tous les Γ-types de quotients injectifs indécomposables associés à un élément X de (L) , sont confondus, conduit à la notion d'élément Γ-isotypique.

DÉFINITION 1.4. - Un élément X de (L) , $X \neq U$, est dit Γ-isotypique lorsque tous les Γ-types de quotients injectifs indécomposables associés à X sont confondus.

Si π est le type commun à ces quotients, X est dit Γ-isotypique de type π , ou π-Γ-isotypique.

Tout élément $\cap$-irréductible X , distinct de U , est Γ-isotypique ; son Γ-type est celui du quotient U/X .

Le corollaire 1.1 permet de caractériser un élément Γ-isotypique par la proposition suivante :

PROPOSITION 1.2. - Pour qu'un élément X de (L) , $X \neq U$, soit π-Γ-isotypique, il faut et il suffit que tous les quotients co-irréductibles de dénominateur X soient du Γ-type π .

La propriété suivante, à l'exemple de la propriété 10.9 de [6], donne une caractérisation des éléments Γ-isotypiques de (L) .

PROPOSITION 1.3. - Pour qu'un élément X de (L) , $X \neq U$, soit Γ-isotypique, il faut et il suffit qu'il vérifie la condition suivante :

" $X = X_1 \cap X_2$ avec $X_1 > X$, $X_2 > X$ " entraîne "il existe des éléments Y_1 et Y_2 tels que :

$$X_1 \geqslant Y_1 > X , \quad X_2 \geqslant Y_2 > X ;$$

les quotients Y_1/X et Y_2/X sont des treillis isomorphes au moyen d'un isomorphisme de la classe Γ .".

En effet, supposons que X soit Γ-isotypique de type π , et que nous ayons

$X = X_1 \cap X_2$ avec $X_1 > X$, $X_2 > X$.

Si X est $\cap$-irréductible dans le treillis X_1/X , ce quotient X_1/X est co-irréductible et du Γ-type π de X (proposition 1.2).

Si X est $\cap$-décomposable dans X_1/X , il admet une décomposition en intersection d'éléments $\cap$-irréductibles de X_1/X , non superflus.

$$X = Z_1 \cap Z_2 \cap \dots \cap Z_n , \qquad Z_i \leqslant X_1 , \quad i = 1 , 2 , \dots , n \quad (n > 1) .$$

Posons $\overline{Z}_1 = Z_2 \cap \dots \cap Z_n$; nous avons :

$$X = Z_1 \cap \overline{Z}_1 \qquad \text{et} \qquad \overline{Z}_1 > X ,$$

et $\overline{Z}_1/X$ transposé du quotient co-irréductible $(\overline{Z}_1 \cup Z_1)/Z_1$, est lui-même co-irréductible, donc est du Γ-type π de X .

Donc X_1/X contient un quotient A/X ($A = X_1$ ou $\overline{Z}_1$) co-irréductible du Γ-type π . De même, X_2/X contient un quotient co-irréductible B/X du Γ-type π . Les quotients A/X et B/X sont Γ-équivalents dans $\mathcal{C}$, et l'existence de Y_1 et Y_2 découle immédiatement de la définition de cette Γ-équivalence (proposition 1.1).

Réciproquement, supposons vérifiée la condition de la proposition, et montrons que deux quotients co-irréductibles arbitraires A/X , B/X , de dénominateur X , sont de même Γ-type. (X sera alors Γ-isotypique en vertu de la proposition 1.2.)

Si $A \cap B > X$, A/X et B/X sont du même Γ-type, celui du quotient co-irréductible $(A \cap B)/X$.

Si $A \cap B = X$, la condition de l'énoncé montre de suite que A/B et B/X sont Γ-équivalents (proposition 1.1).

4. Décomposition en intersection d'éléments Γ-isotypiques.

PROPOSITION 1.4. - L'intersection de deux éléments π-Γ-isotypiques de (L) est un élément π-Γ-isotypique.

Soient en effet deux éléments π-Γ-isotypiques X et Y . Introduisons des décompositions de X et Y en intersection d'éléments $\cap$-irréductibles, non superflus :

$$X = X_1 \cap \dots \cap X_n \qquad (n \geqslant 1)$$

$$Y = Y_1 \cap \dots \cap Y_m \qquad (m \geqslant 1)$$

$$X \cap Y = X_1 \cap \dots \cap X_n \cap Y_1 \cap \dots \cap Y_m \quad .$$

En supprimant les composantes superflues :

$$X \cap Y = Z_1 \cap \dots \cap Z_p ,$$

où les Z_i sont pris dans $\{X_1 , \dots , X_n , Y_1 , \dots , Y_m\}$.

Les quotients $U/Z_1 , \dots , U/Z_p$ sont donc tous du Γ-type π.

Cette propriété permet, dans une décomposition d'un élément comme intersection d'un nombre fini d'éléments Γ-isotypiques, de rassembler les éléments de même Γ-type. Une décomposition d'un élément comme intersection finie d'éléments Γ-isotypiques de Γ-types tous différents, sans élément superflu, s'appelle décomposition réduite. La possibilité de décomposer tout élément X de (L), distinct de U en intersection finie d'éléments $\cap$-irréductibles (qui sont Γ-isotypiques) permet alors d'énoncer le théorème d'existence suivant :

THÉORÈME 1.2. - Tout élément X de (L) noethérien (ou artinien), distinct de U, admet une décomposition réduite comme intersection d'éléments Γ-isotypiques.

Ce théorème est complété par le théorème d'unicité suivant :

THÉORÈME 1.3. - Soient deux décompositions réduites :

$$(*) \qquad X = I_1 \cap I_2 \cap \dots \cap I_n = J_1 \cap J_2 \cap \dots \cap J_m$$

d'un élément X de (L) comme intersection d'éléments Γ-isotypiques de (L). Nous avons $n = m$ et les Γ-types des I_i sont les mêmes que ceux des J_j.

Preuve. - Décomposons les I_i et les J_j en intersection d'éléments $\cap$-irréductibles (sans éléments superflus) :

$$I_i = X_{i1} \cap X_{i2} \cap \dots \cap X_{ih_i} , \qquad J_j = Y_{j1} \cap Y_{j2} \cap \dots \cap Y_{jk_j} ;$$

substituons ces expressions dans les deux $\cap$-décompositions de X, et supprimons les éléments $\cap$-irréductibles superflus. Après cette suppression, pour chaque i et chaque j, il reste au moins une composante X_{i1} de I_i et une composante Y_{j1} de J_j, puisque les deux décompositions $(*)$ sont constituées d'éléments non superflus. Dans l'$\cap$-décomposition de X ainsi obtenue figurent donc (après une éventuelle permutation des indices) :

$$X_{i1} \cap \dots \cap X_{ih'_i} \quad (h'_i \leqslant h_i) , \qquad Y_{j1} \cap \dots \cap Y_{jk'_j} \quad (k'_j \leqslant k_j) ;$$

or, nous savons (cf. § 2) que pour ces $X_{i\lambda}$ et $Y_{j\mu}$ restants les Γ-types des quotients $U/X_{i\lambda}$ sont les mêmes que ceux des quotients $U/Y_{j\mu}$, et que ce sont les Γ-types associés à X. Les Γ-types distincts sont donc en nombre égal : $n = m$.

Enfin, le Γ-type de I_i est celui de U/X_{i1} qui est de même Γ-type que l'un (au moins) des $U/Y_{j\mu}$, donc de même Γ-type que celui d'un I_j (et un seul, car les composantes de même Γ-type ont été rassemblées).

Chapitre 2

Eléments Γ-isotypiques dans les $(\mathcal{C})$-algèbres et les modules

1. Changement de classe d'isomorphismes Γ.

Considérons deux classes d'isomorphismes Γ et Γ', vérifiant les propriétés (α), (β), (γ) du chapitre 1, et telles que :

$$\Sigma \subseteq \Gamma \subseteq \Gamma' \subseteq T .$$

Σ et T étant respectivement la classe des similitudes et la classe des isomorphismes de treillis, portant sur les quotients du treillis (L).

De $\Gamma \subseteq \Gamma'$ résultent les propriétés suivantes :

Si deux quotients A_1/B_1 et A_2/B_2, non triviaux, sont partiellement Γ-isomorphes (cf. définition 1.2), ils sont aussi partiellement Γ'-isomorphes.

Dans l'ensemble $\mathcal{C}$ des quotients co-irréductibles de (L), la classe modulo Γ du quotient co-irréductible A/B est contenue dans la classe de A/B modulo Γ'.

Tout Γ-type de quotient dans $\mathcal{C}$ définit canoniquement (par saturation des classes) un Γ'-type de quotient dans $\mathcal{C}$.

Si un élément X de (L) a pour Γ-types associés $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$ (cf. définition 1.3), X a aussi pour Γ'-types associés les types canoniquement correspondants : $\pi'_1, \pi'_2, \dots, \pi'_n$; de plus, si p (resp. p') est le nombre de types distincts de $\{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n\}$ (resp. de $\{\pi'_1, \pi'_2, \dots, \pi'_n\}$), nous avons :

$$p' \leqslant p .$$

Enfin, si X est Γ-isotypique, X est alors Γ'-isotypique.

2. Quotients dans une $(\mathcal{C})$-algèbre modulaire.

Rappelons qu'une $(\mathcal{C})$-algèbre modulaire (L) est constituée par deux treillis $(\mathcal{C})$ et (L) satisfaisant aux axiomes suivants (cf. L. LESIEUR et R. CROISOT, [6] chapitre III, § 3).

<u>Axiome</u> A : $(\mathfrak{T})$ est un demi-groupe réticulé quasi-entier complet : $(\mathfrak{T})$ est donc un treillis complet muni d'une structure de demi-groupe multiplicatif satisfaisant aux lois distributives :

$$\alpha\left(\bigcup_{i\in I} \beta_i\right) = \bigcup_{i\in I} \alpha\beta_i \;;\; \left(\bigcup_{i\in I} \beta_i\right)\alpha = \bigcup_{i\in I} \beta_i\alpha ,$$

et à

$$\alpha\beta \leqslant \alpha \cap \beta \qquad \text{(quasi-entier).}$$

0 et $\mathcal{E}$ sont l'élément nul et l'élément universel de $(\mathfrak{T})$.

<u>Axiome</u> B : (L) est un treillis complet, modulaire et $\cap$-continu.

<u>Axiome</u> C : Les éléments de $(\mathfrak{T})$ opèrent dans (L) ; à tout $\alpha \in (\mathfrak{T})$ et à tout $X \in (L)$ correspond un élément αX de (L) , avec les lois suivantes :

$$\alpha(\beta X) = (\alpha\beta)X \;; \qquad \alpha X \subseteq X$$

$$\left(\bigcup_{i\in I} \alpha_i\right)X = \bigcup_{i\in I} \alpha_i X \;; \qquad \alpha\left(\bigcup_{i\in I} X_i\right) = \bigcup_{i\in I} \alpha X_i$$

$$0X = 0 \;; \qquad \alpha 0 = 0 .$$

Il résulte de l'axiome C les deux propriétés suivantes :

- X et Y étant donnés dans (L) , l'ensemble des éléments $\alpha \in (\mathfrak{T})$ tels que $\alpha Y \subseteq X$ possède un élément maximum noté $X \,^{\bullet}\!.\, Y$ et appelé <u>résiduel à gauche</u> de X par Y .

- X et α étant donnés ($X \in (L)$, $\alpha \in (\mathfrak{T})$), l'ensemble des éléments $Y \in (L)$ tels que $\alpha Y \subseteq X$ possède un élément maximum noté $X \,.^{\bullet}\, \alpha$, et appelé <u>résiduel à droite</u> de X par α .

<u>Axiome</u> D : L'ensemble des résiduels à gauche et l'ensemble des résiduels à droite de tout élément $X \in (L)$ vérifient la condition de chaîne ascendante.

Soit A/B un quotient de la $(\mathfrak{T})$-algèbre (L) , A et $B \in (L)$, $B \leqslant A$. A/B est un sous-treillis complet, modulaire et $\cap$-continu de (L) , mais n'est pas en général une $(\mathfrak{T})$-algèbre pour la loi de composition externe induite par celle de (L) (le composé αX de $\alpha \in (\mathfrak{T})$ et de $X \in A/B$, n'appartenant pas nécessairement à A/B). Cependant, la loi de composition :

$$(\alpha , X) \to \alpha X \cup B , \qquad \text{(notée } \alpha . X \text{)}$$

définit sur A/B une structure de $(\mathfrak{T})$-algèbre (la vérification des axiomes C est aisée). Tout quotient A/B sera considéré, dans la suite, comme muni de cette structure.

Pour X et $Y \in A/B$ et $\mathfrak{a} \in (\mathcal{T})$, les trois conditions suivantes sont équivalentes :

$$\mathfrak{a}.Y \leqslant X \; ; \qquad \mathfrak{a}Y \cup B \leqslant X \; ; \qquad \mathfrak{a}Y \leqslant X \,.$$

Par suite, X et Y ont même résiduel à gauche $X \mathbin{{}^{\bullet}\!.} Y$ dans les deux $(\mathcal{T})$-algèbres A/B et (L) .

D'autre part, il est facile de montrer que le résiduel à droite $X \mathbin{.\!\overset{\bullet\bullet}{.}} \mathfrak{a}$ de $X \in A/B$ par $\mathfrak{a}$ (résiduel exprimé dans la $(\mathcal{T})$-algèbre A/B) est donné par :

$$X \mathbin{.\!\overset{\bullet\bullet}{.}} \mathfrak{a} = A \cap (X \mathbin{.^{\bullet}} \mathfrak{a}) \;,$$

$X \mathbin{.^{\bullet}} \mathfrak{a}$ étant le résiduel exprimé dans la $(\mathcal{T})$-algèbre (L) .

DÉFINITION 2.1. - Nous dirons qu'un isomorphisme (de treillis)

$$f \; : \; A/B \to C/D$$

de deux quotients de (L) , est de la classe $\Gamma_{\mathcal{T}}$ s'il vérifie :

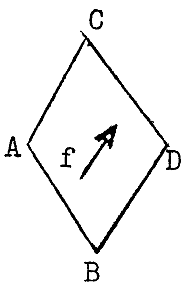
$$\forall \; \mathfrak{a} \in (\mathcal{T}) \;, \quad \forall \; X \in A/B \;, \qquad f(\mathfrak{a}.X) = \mathfrak{a}.f(X) \;.$$

Un tel isomorphisme est un isomorphisme des $(\mathcal{T})$-algèbres A/B et C/D , au sens donné par L. LESIEUR et R. CROISOT dans [6] (cf. § 5, p. 35) ; cela résulte en particulier du fait que, pour toute famille $\{X_i\}_{i\in I}$ d'éléments X_i de A/B , la borne supérieure $\bigcup_{i\in I} f(X_i)$ existe dans C/D et est égale à $f(\bigcup_{i\in I} X_i)$.

PROPOSITION 2.1. - Toute similitude de deux quotients d'éléments de (L) est un isomorphisme de la classe $\Gamma_{\mathcal{T}}$ (i. e. $\Sigma \subseteq \Gamma_{\mathcal{T}} \subseteq T$).

Preuve. - La classe $\Gamma_{\mathcal{T}}$ vérifie les propriétés (α) , (β) , (γ) , qui précèdent le § 1 du chapitre 1. Comme toute similitude de deux quotients de (L) est la composée d'un nombre fini d'isomorphismes de treillis associés à deux quotients transposés (cf. [2], chapitre 1), il suffit d'établir que, si deux quotients A/B et C/D sont transposés, l'isomorphisme f associé est de la classe $\Gamma_{\mathcal{T}}$.

Premier cas : $C = A \cup D$ et $B = A \cap D$, l'isomorphisme de treillis $f : A/B \to C/D$ est alors donné par

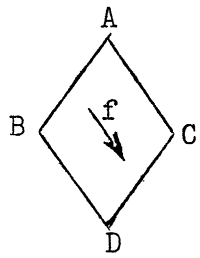


$$X \to X \cup D \;,$$

et on contrôle sans difficulté que

$$f(\mathfrak{a}.X) = \mathfrak{a}.f(X) \;.$$

Deuxième cas : $A = B \cup C$ et $D = B \cap C$, f est donné par



$$X \to X \cap C ,$$

l'isomorphisme inverse f^{-1} est donné par

$$X \to X \cup B ,$$

et est de la classe $\Gamma_{\mathcal{C}}$ d'après le premier cas. La propriété (β) montre alors que f est aussi de la classe $\Gamma_{\mathcal{C}}$.

Remarque. - Tout isomorphisme $f : A/B \to C/D$ de la classe $\Gamma_{\mathcal{C}}$ a la propriété de conserver les résiduels à gauche :

$$(\mathcal{R}) \qquad f(X) \,\dot{.}\, f(Y) = X \,\dot{.}\, Y .$$

DÉFINITION 2.2. - Tous les isomorphismes de treillis $f : A/B \to C/D$ qui vérifient la propriété $(\mathcal{R})$ pour tous les résiduels à gauche constituent une classe $\Gamma_{\mathcal{R}}$ vérifiant les conditions (α) , (β) , (γ) ; et

$$\Sigma \subseteq \Gamma_{\mathcal{C}} \subseteq \Gamma_{\mathcal{R}} \subseteq T .$$

3. Résiduels essentiels d'un élément d'une $(\mathcal{C})$-algèbre noethérienne (ou artinienne).

Nous supposons désormais que (L) est une $(\mathcal{C})$-algèbre modulaire noethérienne (ou artinienne) (cf. le début du chapitre 1), et nous nous proposons d'étudier les résiduels essentiels d'un élément X de (L) (cf. [6], définition 7.5, p. 67) au moyen des Γ-types associés à X , Γ étant une classe intermédiaire d'isomorphismes contenue dans la classe $\Gamma_{\mathcal{R}}$ définie au paragraphe précédent ;

$$\Sigma \subseteq \Gamma \subseteq \Gamma_{\mathcal{R}} \subseteq T$$

(le choix $\Gamma = \Gamma_{\mathcal{C}}$ étant bien entendu un cas particulier intéressant).

Considérons un quotient co-irréductible A/B de (L) (cf. définition 1.1) ; B étant $\cap$-irréductible dans le treillis A/B , B est alors tertiaire relativement à la $(\mathcal{C})$-algèbre A/B et possède un seul résiduel à gauche essentiel $\mathcal{P}$ qui est résiduel à gauche propre maximum de B dans la $(\mathcal{C})$-algèbre A/B (cf. [5], III, théorèmes 3.1 et 3.2). Tout élément $N \in A/B$, $N \neq B$ contient un élément $Z \in A/B$, $Z \neq B$, tel que $B \,\dot{.}\, Z = \mathcal{P}$. En effet si $\mathcal{P}$ est résiduel essentiel de B par rapport à Y $(B < Y \leq A)$, la relation $Y \cap N > B$ (puisque A/B est co-irréductible) entraîne : $\mathcal{P} = B \,\dot{.}\, (Y \cap N)$. Dans ces conditions, nous dirons que $\mathcal{P}$ est l'annulateur maximum du quotient co-irréductible A/B (B étant l'élément nul de A/B).

PROPOSITION 2.2. - Les annulateurs maxima de deux quotients co-irréductibles de même Γ-type ($\Gamma \subseteq \Gamma_{\mathcal{R}}$), sont égaux.

Soient A/B et A'/B' deux quotients co-irréductibles de même Γ-type (cf. § 1, chapitre 1) ; il existe un sous-quotient non trivial C/B de A/B et un sous-quotient C'/B' non trivial de A'/B', tels que les treillis C/B et C'/B' soient isomorphes au moyen d'un isomorphisme

$$f : C/B \to C'/B'$$

de la classe Γ ; $C \neq B$ entraîne l'existence d'un élément Z tel que :

$$B < Z \leqslant C \ , \quad B \,{}^{\bullet}\!\!.\, Z = \mathcal{P} \qquad \text{(annulateur maximum de } C/B \text{) ;}$$

f étant de la classe $\Gamma_{\mathcal{R}}$:

$$\mathcal{P} = f(B) \,{}^{\bullet}\!\!.\, f(Z) = B' \,{}^{\bullet}\!\!.\, f(Z) \ ;$$

$\mathcal{P}$ étant l'annulateur maximum de C'/B', $f(Z) \neq B'$ entraîne

$$\mathcal{P} \leqslant \mathcal{P}' .$$

En procédant de même avec f^{-1}, $\mathcal{P}' \leqslant \mathcal{P}$.

Cette proposition 2.2 permet de donner la définition suivante :

DÉFINITION 2.3. - Etant donné un Γ-type π de quotient co-irréductible, on appelle annulateur maximum de π l'annulateur maximum d'un quotient co-irréductible du type π ($\pi \subseteq \Gamma_{\mathcal{R}}$).

THÉORÈME 2.1. - Les résiduels essentiels d'un élément X de (L), $X \neq U$, coïncident avec les annulateurs maxima des Γ-types de quotients injectifs indécomposables associés à X (si $\Gamma \subseteq \Gamma_{\mathcal{R}}$).

Cet énoncé est à rapprocher de celui du théorème 10.7 de [6] qui exprime que les résiduels essentiels d'un sous-module X du module U coïncident avec les annulateurs maxima des facteurs directs indécomposables de l'enveloppe injective de U/X.

Preuve du théorème 2.1. - Soit $\mathcal{P} = X \,{}^{\bullet}\!\!.\, Y$ un résiduel essentiel de X par rapport à l'élément $Y > X$; le quotient Y/X contient un sous-quotient co-irréductible (non trivial) Y_1/X :

C'est évident si Y/X est co-irréductible ; si Y/X n'est pas co-irréductible, X admet, dans Y/X, une décomposition en intersection finie d'éléments X_i, $\cap$-irréductibles de Y/X,

$$X = X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_n \qquad n \geqslant 2 ,$$

les X_i étant non superflus.

La proposition 5.1 de [2] appliquée au treillis Y/X , montre que $Y_1 = X_2 \cap \dots \cap X_n$ est élément co-irréductible de ce treillis, et Y_1/X est quotient co-irréductible de (L) .

Ce sous-quotient co-irréductible Y_1/X est d'un Γ-type π_1 , π_1 étant un Γ-type de quotient injectif indécomposable associé à X (corollaire 1.1).

L'annulateur maximum $\mathcal{P}_1$ de Y_1/X est donné par $\mathcal{P}_1 = X \,^{\bullet}\!.\, N$ avec $X < N \leqslant Y_1 \leqslant Y$. Ce résiduel $X \,^{\bullet}\!.\, N$, relatif à la $(\mathcal{C})$-algèbre Y/X , est aussi résiduel $X \,^{\bullet}\!.\, N$ de X relatif à la $(\mathcal{C})$-algèbre (L) (cf § 2 du présent chapitre) ; $\mathcal{P} = X \,^{\bullet}\!.\, Y$ étant essentiel pour (L) , il en résulte $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}$.

Inversement, si $\mathcal{P}$ est l'annulateur maximum d'un Γ-type π_1 de quotient injectif indécomposable associé à X , $\mathcal{P}$ est annulateur maximum d'un quotient co-irréductible Q/X de dénominateur X (corollaire 1.1) :

$$\mathcal{P} = X \,^{\bullet}\!.\, Y \qquad \text{avec} \quad X < Y \leqslant Q ,$$

et il est évident que $\mathcal{P}$ est résiduel essentiel de X par rapport à Y , dans la $(\mathcal{C})$-algèbre (L) .

Nous savons qu'un élément X de (L) est tertiaire si, et seulement si, X possède un et un seul résiduel essentiel (cf. [5], III, théorème 3.1) ; le théorème précédent permet d'établir le théorème suivant :

THÉORÈME 2.2. - Pour que l'élément X de (L) , $X \neq U$, soit $\mathcal{P}$-tertiaire, il faut et il suffit que les Γ-types de quotients injectifs indécomposables associés à X, aient tous le même annulateur maximum $\mathcal{P}$ $(\Gamma \subseteq \Gamma_{\mathcal{R}})$.

Il en est ainsi lorsque X est Γ-isotypique, puisque X ne possède alors par définition qu'un seul Γ-type π de quotients injectifs indécomposables associé.

PROPOSITION 2.3. - Tout élément X de (L) , $X \neq U$, Γ-isotypique est tertiaire, lorsque $\Gamma \subseteq \Gamma_{\mathcal{R}}$. L'élément premier $\mathcal{P}$ associé à X est alors l'annulateur maximum de tout quotient co-irréductible Q/X de dénominateur X .

Remarque. - La démonstration de la proposition 1.4, et le théorème 2.2 montrent que l'intersection de deux éléments $\mathcal{P}$-tertiaires est $\mathcal{P}$-tertiaire (résultat classique de [5]).

Le théorème 1.3 permet alors d'obtenir les théorèmes d'existence et "d'unicité" des décompositions réduites d'un élément X de (L) , $X \neq U$, comme intersection d'éléments tertiaires (cf. [5], I, § 8).

Dans le cas où $(\mathcal{T})$ est un demi-groupe commutatif, nous retrouvons les résultats classiques de la décomposition noethérienne en intersection d'éléments primaires.

Application au cas des modules noethériens (ou artiniens). - Considérons le treillis (L) des sous-modules d'un module U à gauche et unitaire sur un anneau $\mathcal{E}$; $(\mathcal{T})$ étant le treillis des idéaux bilatères de $\mathcal{E}$, (L) est une $(\mathcal{T})$-algèbre. U est supposé noethérien (ou artinien).

T étant toujours la classe des isomorphismes de treillis portant sur les quotients d'éléments de (L) , nous définissons comme précédemment, la classe des similitudes Σ (cf. introduction du chapitre 1), la classe $\Gamma_{\mathcal{T}}$ (cf. définition 2.1), la classe $\Gamma_{\mathcal{R}}$ d'isomorphismes compatibles avec la résiduation à gauche (cf. définition 2.2).

Supposons que deux quotients A/B et A'/B' d'éléments de (L) définissent deux modules quotients A/B et A'/B' isomorphes au moyen d'un isomorphisme f de modules sur $\mathcal{E}$. Nous savons que l'homomorphisme canonique $\varphi : A \to A/B$ définit un isomorphisme θ du treillis des sous-modules de A qui contiennent B sur le treillis des sous-modules de A/B ; $\varphi' : A' \to A'/B'$ définit un isomorphisme analogue θ' . Comme f définit naturellement un isomorphisme σ du treillis des sous-modules de A/B sur celui des sous-modules A'/B' , l'application $\bar{f} = \theta'^{-1} \circ \sigma \circ \theta$ est un isomorphisme des sous-treillis A/B et A'/B' de (L) . Nous dirons que $\bar{f}$ est un isomorphisme de treillis associé (canoniquement) à l'isomorphisme f de modules ; nous appellerons classe Γ_M la classe de tous les isomorphismes $\bar{f}$ de T qui peuvent être canoniquement associés à un isomorphisme f de modules (portant sur les quotients).

Considérons deux quotients A/B et A'/B' transposés de (L) ; il est aisé de voir que les deux modules quotients A/B et A'/B' sont isomorphes : $A/B \xrightarrow{f} A'/B'$ de façon naturelle, et que l'isomorphisme $\bar{f}$ canoniquement associé à f coïncide avec l'isomorphisme des treillis A/B et A'/B' défini par le caractère transposé de ces quotients (cf. [2], § 1 du chapitre 1).

D'autre part, tout isomorphisme de la classe Γ_M est aussi de la classe $\Gamma_{\mathcal{T}}$.

Ces observations peuvent être traduites par

$$\Sigma \subseteq \Gamma_M \subseteq \Gamma_{\mathcal{T}} \subseteq \Gamma_{\mathcal{R}} \subseteq T .$$

L'importance de la classe Γ_M est mise en évidence par :

THÉORÈME 2.3. - Pour qu'un sous-module X soit élément Γ_M-isotypique dans la $(\mathcal{T})$-algèbre (L) , il faut et il suffit qu'il soit sous-module isotypique au sens habituel (cf. [6], définition 10.5).

Preuve. - Rappelons la notion de sous-module isotypique : U est noethérien (ou artinien), soit

(1) $$X = X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_n$$

une décomposition du sous-module X de U en intersection d'un nombre fini de sous-modules $\cap$-irréductibles sans élément superflu. L'enveloppe injective $E(U/X)$ de U/X est somme directe de n sous-modules isomorphes respectivement aux enveloppes injectives indécomposables $E(U/X_i)$ des modules U/X_i ,

(2) $$E(U/X) = E(U/X_1) \oplus E(U/X_2) \oplus \dots \oplus E(U/X_n)$$

(cf. E. MATLIS, [8], théorème 2.3 et L. LESIEUR et R. CROISOT, [6], théorème 10.3).

Les composants directs figurant dans (2) sont indépendants (aux isomorphismes près) du choix de la décomposition (1) pour X , en vertu du théorème suivant de G. AZUMAYA (cf. [1]) :

Soit U un $\mathcal{E}$-module qui est somme directe d'un nombre fini de sous-modules injectifs indécomposables. Pour deux décompositions de U en somme directe d'un nombre fini de sous-modules injectifs indécomposables :

$$U = I_1 \oplus I_2 \oplus \dots \oplus I_n = I'_1 \oplus I'_2 \oplus \dots \oplus I'_{n'} .$$

On a $n = n'$, et il existe une permutation σ de l'ensemble $\{1 , 2 , \dots , n\}$ telle que I_α soit isomorphe à $I'_{\sigma(\alpha)}$ pour tout α .

Le sous-module X est dit isotypique si l'enveloppe injective de U/X est somme directe de sous-modules injectifs indécomposables tous isomorphes. Cela est équivalent à dire que, pour toute (ou pour une seule) $\cap$-décomposition du type (1), tous les composants $E(U/X_i)$ de la décomposition correspondante (2) sont des modules isomorphes.

Mais les enveloppes injectives indécomposables $E(U/X_i)$ et $E(U/X_j)$ sont isomorphes si et seulement s'il existe un sous-module non nul Y_i de U/X_i isomorphe à un sous-module non nul Y_j de U/X_j : $Y_i \xrightarrow{\varphi} Y_j$ (cf. [6], corollaire de la propriété 10.8), c'est-à-dire, s'il existe un sous-module Z_i et un sous-module Z_j de U tels que $X_i \underline{<} Z_i$; $X_j < Z_j$; Z_i/X_i et Z_j/X_j sont isomorphes par l'isomorphisme φ de Γ_M canoniquement associé à φ : $Z_i/X_i \to Z_j/X_j$ (Y_i et Y_j étant identifiés à Z_i/X_i et Z_j/X_j) ; les quotients co-irréductibles U/X_i et U/X_j sont alors de même Γ_M-type π (qui est un des Γ_M-types associés à X par définition 1.3).

Inversement, si les quotients co-irréductibles U/X_i et U/X_j sont de même

Γ_M-type π , il existe alors deux sous-quotients non triviaux Z_i/X_i et Z_j/X_j isomorphes par un isomorphisme $\overleftarrow{\psi}$ de la classe Γ_M . $\overleftarrow{\psi}$ est donc l'associé canonique d'un isomorphisme de modules quotients

$$\overleftarrow{\psi} : Z_i/X_i \to Z_j/X_j ,$$

et les enveloppes injectives $E(U/X_i)$ et $E(U/X_j)$ sont des modules isomorphes.

Remarque 1. - La proposition 1.3 du chapitre 1, et la propriété 10.9 de [6], permettent une preuve presque immédiate du théorème 2.3, mais qui a l'inconvénient de masquer les rôles joués par les Γ-types (et types pour les modules).

Remarque 2. - Ce théorème 2.3 et sa démonstration montrent que le chapitre 1, appliqué au treillis (L) des sous-modules d'un module U et au choix $\Gamma = \Gamma_M$, réalise une théorie des types "d'injectifs" indécomposables et des sous-modules isotypiques de U , qui ne porte que sur les éléments de (L) et n'utilise pas le plongement d'un module dans un module injectif (enveloppe injective dans la pratique).

BIBLIOGRAPHIE

[1] AZUMAYA (G.). - Corrections and supplementaries to my paper concerning Krull-Remark-Schmidt's theorem, Nagoya math. J., t. 1, 1950, p. 117-124.

[2] FORT (J.). - Eléments injectifs (ou compléments) dans les treillis modulaires, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et théorie des nombres, t. 17, 1963/64, n° 5, 23 p.

[3] GABRIEL (Pierre). - Objets injectifs dans les catégories abéliennes, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et théorie des nombres, t. 12, 1958/59, n° 17, 32 p.

[4] GABRIEL (Pierre). - Des catégories abéliennes, Bull. Soc. math. France, t. 90, 1962, p. 323-448 (Thèse Sc. math. Paris, 1961).

[5] LESIEUR (L.) et CROISOT (R.). - Théorie noethérienne des anneaux, des demi-groupes et des modules dans le cas non commutatif, I : Colloque d'Algèbre supérieure [1956. Bruxelles], p. 79-121. - Louvain, Ceuterick, 1957 (Centre belge de Recherches mathématiques) ; II : Math. Annalen, t. 134, 1958, p. 458-476 ; III : Acad. royale de Belgique, Bull Cl. Sc., t. 44, 1958, p. 75-93.

[6] LESIEUR (L.) et CROISOT (R.). - Algèbre noethérienne non commutative. - Paris, Gauthier-Villars, 1963 (Mémorial des Sciences mathématiques, 154).

[7] LESIEUR (L.) et CROISOT (R.). - Coeur d'un module, J. Math. pures et appl., 9e série, t. 4, 1963, p. 367-407.

[8] MATLIS (E.). - Injective modules over noetherian rings, Pacific J. Math., t. 8, 1958, p. 511-528.

[9] ORE (O.). - On the foundation of abstract algebra, I : Annals of Math., Series 2, t. 36, 1935, p. 406-437 ; II : Annals of Math., Series 2, t. 37, 1936, p. 265-292.