Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

JEAN GUÉRINDON

Quelques applications des modules gradués

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 17, nº 1 (1963-1964), exp. nº 4, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1963-1964__17_1_A3_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
17e année, 1963/64, n° 4

16 décembre 1963

QUELQUES APPLICATIONS DES MODULES GRADUÉS

par Jean GUÉRINDON

On étudie, en algèbre commutative, des propriétés des modules noethériens gradués E sur les anneaux noethériens gradués A (graduations positives). On définit notamment une notion de dimension r d'un anneau noethérien A qui se rattache à la théorie des fonctions de Hilbert. Ce nombre r est compris entre la dimension d (au sens des chaînes d'idéaux premiers) et la dimension homologique globale δ (définie au moyen des chaînes de syzygies de tous les A-modules noethériens). Chaque fois que δ est finie, on a $\delta = r$, mais la réciproque n'est pas vraie, par exemple pour un anneau local géométrique non régulier (en particulier anneau local d'une sous-variété multiple d'une variété). La famille Φ des anneaux, avec $r < \infty$, donne en particulier une propriété du spectre maximal de A (cf. théorème 12).

A un autre point de vue, la théorie des modules gradués peut s'étudier avec la seule condition maximale (§ 1), et on a, au passage, quelques caractérisations des anneaux de Jacobson (cf. § 2 et § 5).

1. Une extension des polynômes de Hilbert.

On considère un module noethérien gradué $E = E_0 \oplus E_1 \oplus \dots \oplus E_n \oplus \dots$ sur l'anneau noethérien gradué $A = A_0 \oplus A_1 \oplus \dots \oplus A_p \oplus \dots$, les graduations étant positives. Alors A_0 est noethérien, et on a $A = A_0[u_1 , \dots , u_r]$ et E est engendré sur A par un nombre fini d'éléments $e_1 , \dots , e_h$ que l'on peut supposer homogènes. Le cas classique est celui dans lequel A_0 est artinien et les u_i de degré 1. Le cas général s'étudie en introduisant les idéaux premiers de hauteur nulle de A_0, $P_1 , \dots , P_s$ et définissant pour tout B module noethérien F (sur B noethérien), l'entier $\ell = \ell_B(F)$ de la manière suivante : ℓ est la somme des longueurs des modules artiniens F_{P_i} (sur les anneaux B_{P_i}), les P_i étant les idéaux premiers minimaux de B. Lorsque B est artinien, $\ell_B(F)$ est la longueur (finie) de F. On le voit en prenant une suite de composition maximale de F et en localisant à chaque P_i c'est-à-dire à tout idéal de cohauteur nulle.

On remarque que, dans le cas où la dimension de B est quelconque, $\ell_B(F)$ peut être nulle sans que F le soit, et même, si B est non artinien, et F artinien, $\ell_B(F)$ peut être différent de la longueur (finie) de F. On a

$$\ell(F/G) = \ell(F) - \ell(G) ,$$

pour tout couple de B-modules tels que l'on ait $G \subseteq F$. On a alors le théorème suivant :

THÉORÈME 1. - <u>Il existe un entier</u> N <u>tel que, pour</u> $n \geqslant N$, <u>l'entier</u> $a_n = \ell_{A_0}(E_n)$ <u>soit de la forme</u> $\alpha_1^n \pi_1(n) + \dots + \alpha_m^n \pi_m(n)$, $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ <u>étant les racines de l'équation</u> $z^m - 1 = 0$, m <u>étant le</u> p. p. c. m. <u>des degrés des générateurs de</u> A <u>sur</u> A_0 et les π_j des polynômes en n.

On raisonne par récurrence sur r, la proposition étant vraie pour $r = 0$. Supposons-la vraie jusqu'à $r - 1$, et soit v l'endomorphisme (de module gradué) défini par la multiplication par u_r en E. Si β_r est le degré de u_r (supposé homogène), on a pour chaque n la composante v_n de v et la suite exacte

$$0 \to v_n^{-1}(0) \to E_n \to E_{n+\beta_r} \to E_{n+\beta_r}/v_n(E_n) \to 0$$

et pour tout $p = P_i$ de hauteur nulle en A_0, on a la suite exacte de $(A_0)_p$-modules :

$$0 \to [v_n^{-1}(0)]_p \to (E_n)_p \to (E_{n+\beta_r})_p \to [E_{n+\beta_r}/v_n(E_n)]_p \to 0$$

et la formule donnant le λ d'un quotient ; puis une sommation relativement à l'indice i permet de faire la récurrence sur r. Le résultat équivaut à dire que $\sum_0^\infty a_n z^n$ est le quotient par $(1 - z^m)^{d+1}$ d'un polynôme en z à coefficients entiers rationnels. Le nombre d est la <u>dimension</u> du cas classique (les générateurs de E sur A sont de degré 1. On a, dans ce cas, $m = 1$), mais ici on se place à un autre point de vue : A et q restent fixes et E varie. La récurrence précédente montre alors que si $m = 1$, le polynôme π_1 est de degré au plus $(d - 1)$.

2. Applications aux filtrations q-adiques.

Soient E un module de type fini sur un anneau noethérien donné A, et q un idéal fixé de A. On pose

$$B = \sum_0^\infty q^n/q^{n+1} , \quad E' = \sum_0^\infty q^n E/q^{n+1} E , \quad a_n = \ell_{A/q}(q^n E/q^{n+1} E) \quad \text{et} \quad F(z) = \sum_0^\infty a_n z^n .$$

On a, pour z, avec $|z| < 1$,

$$F(z) = \frac{e_q(E)}{(1 - z)^{d+1}} + \dots + \frac{\delta}{(1 - z)} + \varphi_q(E) + (1 - z)\ L(z)$$

avec $L(z)$ polynôme en z, $e_q(E)$, δ, $\varphi_q(E)$ entiers rationnels.

THÉORÈME 2. - On a $\varphi_q(F) = \text{long } F$ pour tout A-module artinien F, si et seulement si q est contenu dans le radical de Jacobson de A.

En effet si l'on a $\varphi_q(F) = \text{long } F < \infty$, on a, pour tout n,

$$\text{long}(F/q^n F) \leqslant \varphi_q(F) ,$$

et il existe k tel que $q^{k+1} F = q^k F$; comme $F' = \bigcap_n q^n F$ est l'ensemble des $x \in F$ tels que les diviseurs maximaux de q et de l'annulateur de x soient tous différents, on a $q \subset R$, radical de Jacobson (ou intersection des idéaux maximaux). La réciproque provient du fait que $\bigcap_n R^n F = 0$. On a ainsi obtenu une caractérisation du radical de Jacobson lorsque A est noethérien. Lorsque A est un anneau commutatif unitaire quelconque on a le théorème suivant :

THÉORÈME 3. - Le radical de Jacobson R d'un anneau commutatif unitaire A est le plus grand idéal q tel que $\varphi_q(F) = \text{long } F$ pour tout A-module artinien F, et tout idéal q' contenu en R a la même propriété.

En effet si $q \not\subseteq M$, avec M idéal maximal de A, on a

$$\varphi_q(A/M) = 0 \quad \text{et} \quad \text{long}(A/M) = 1 .$$

Inversement, si $q \subseteq R$, et si F est artinien, $A/\text{ann } F$ est artinien, donc noethérien ; tout diviseur premier commun de q et $\text{ann } F$ est maximal et le théorème 2 montre que

$$\varphi_{q'}(F) = \text{long } F ,$$

en désignant par q' la somme $q + \text{ann } F$. Notons que, dans les théorèmes 2 **et** 3, le quotient A/q n'est pas artinien, ni même noethérien dans le cas général.

On obtient une généralisation des anneaux de Jacobson noethériens au moyen du résultat suivant. Soit A un anneau commutatif unitaire dont tout idéal maximal est de type fini, et soit F un A-module de type fini dont le spectre maximal est fini ($A/\text{ann } F$ est semi-local). Soit L' le radical de $A' = A/\text{ann } F$, L' est de type fini comme produit fini d'idéaux maximaux de type fini. Soit a_n la longueur du module artinien $L'^n F/L'^{n+1} F$ et $\Phi(Z) = \sum a_n z^n$. Comme A'/L' est artinien, le théorème 1 s'applique avec $m = 1$, et $\Phi(Z)$ a, au plus, 1 comme pôle d'ordre 1.

THÉORÈME 4. - Si tout idéal maximal de A est de type fini, il y a équivalence entre les propriétés suivantes :

a. Tout quotient de A avec un nombre fini d'idéaux maximaux est anneau de Jacobson ;

b. $\Phi(Z)$ est un polynôme en z pour tout F de type fini et de spectre maximal fini ;

c. Tout module F de type fini et de spectre maximal fini est artinien ;

d. Tout quotient de A avec un nombre fini d'idéaux maximaux est artinien ;

e. Tout idéal premier non maximal de A est contenu en une infinité d'idéaux maximaux.

En effet si (a) est vraie, L' est de type fini et composé d'éléments nilpotents, et pour un h, on a $L'^h = 0$, donc on a (b). Si (b) est réalisée, il existe un h et G, avec $G = L'^h F = L'^{h+1} F$. Alors si M' est maximal en A' et contient G, on a

$$L'G \subseteq M'G \subseteq G \quad \text{et} \quad G = M'G .$$

Comme G et M' sont de type fini, on a $G = 0$, et L' est nilpotent et nil-idéal, et A' est artinien et également F. Si (c) est vraie, on a (d). Il est évident que (d) entraîne (e) et (a). Si (e) est vraie et si A n'a qu'un nombre fini d'idéaux maximaux, tout idéal premier de A est maximal, et donc de type fini ; donc A est noethérien d'après un théorème de Cohen, et A est artinien, d'où le théorème. La condition (e) est satisfaite par un anneau de Jacobson. Un anneau de Jacobson noethérien satisfait donc à toutes les conditions du théorème. Un exemple d'anneau non noethérien qui satisfait aux conditions précédentes est donné par la somme directe d'une infinité d'anneaux artiniens.

Une seconde application est obtenue en considérant un anneau noethérien quelconque A et un idéal fixé q de A. Si E est un module de type fini, variable sur A, on pose

$$B = \sum_0^\infty q^n/q^{n+1} , \quad E' = \sum_0^\infty (q^n E/q^{n+1} E) , \quad a_n = \ell_{A/q}(q^n E/q^{n+1} E) \quad \text{et} \quad F_{q,E}(z) = \sum_0^\infty a_n z^n .$$

Si r est le nombre minimum de générateurs du A-module q/q^2, on a

$$F(z) = e/(1 - z)^r + G(z)$$

avec $e \geqslant 0$ et $(1 - z)^r G(z)$ polynômes en z à coefficients entiers (§ 1). On notera que $e = e_E(q)$ peut différer de la multiplicité du cas classique (A semi-local de dimension d , q idéal de définition, E de hauteur d). On a alors la propriété d'additivité :

THÉORÈME 5. - Si on a une suite exacte de A-modules de type fini

$$0 \to E_1 \to \dots \to E_k \to 0 ,$$

on a

$$\sum_i (-1)^i e_{E_i}(q) = 0 .$$

On peut, par récurrence sur k, se borner à $k = 3$, et prendre la suite exacte $0 \to E \to F \to G \to 0$. Alors pour tout entier n et tout idéal premier essentiel minimal π de q, on a la suite exacte

$$(E_\pi/q^n E_\pi) \to (F_\pi/q^n F_\pi) \to (G_\pi/q^n G_\pi) \to 0 .$$

Si on a $E_n = q^n E/q^{n+1} E$ et $\mu_n(E) = \ell_{A/q}(E_0) + \dots + \ell_{A/q}(E_n)$, et de même pour F et G, on a, entre les longueurs ordinaires de Jordan-Hölder, l'inégalité

$$\mathrm{long}(E_\pi/q^n E_\pi) + \mathrm{long}(G_\pi/q^n G_\pi) \geqslant \mathrm{long}(F_\pi/q^n F_\pi)$$

et, en sommant par rapport aux divers π et appliquant les résultats de la section 1 :

(1)
$$\mu_n(E) + \mu_n(G) \geqslant \mu_n(F) .$$

De plus, pour chaque π, $(E_\pi + q^n F_\pi)/q^n F_\pi$ est contenu dans le noyau de l'application $(F_\pi/q^n F_\pi) \to (G_\pi/q^n G_\pi)$ et on a

$$\mathrm{long}(F_\pi/q^n F_\pi) \geqslant \mathrm{long}(G_\pi/q^n G_\pi) + \mathrm{long}[(E_\pi + q^n F_\pi)/q^n F_\pi] .$$

Or il existe, d'après le théorème d'Artin-Rees, un entier $s(\pi)$ tel que, pour $n \geqslant s(\pi)$, on ait

$$(E_\pi + q^n F_\pi)/q^n F_\pi \simeq E_\pi/(E_\pi \cap q^n F_\pi) = q^{n-s(\pi)}[q^{s(\pi)} F_\pi \cap E_\pi] .$$

Alors, comme les idéaux π sont en nombre fini, si $s = \sup(s(\pi))$, on a, en sommant par rapport aux divers π,

(2)
$$\mu_n(F) \geqslant \mu_n(G) + \mu_{n-s}(E) .$$

De (1) et (2) on tire, pour $n \to \infty$,

$$e_E(q) + e_G(q) \geqslant e_F(q) \geqslant e_G(q) + e_E(q)$$

d'où

$$- e_E(q) + e_F(q) - e_G(q) = 0 .$$

C. Q. F. D.

Il peut arriver dans le théorème précédent que $e_E(q)$ soit nul sans que E le soit. Prenons A local régulier de dimension d , q un idéal de définition et E un module de hauteur d . Alors e n'est pas nul. Si $A/0:E$ est de dimension au plus $(d-1)$, alors on a $e = 0$.

3. Notion de dimension caractéristique d'un anneau noethérien.

Introduisons la "topologie spectrale" de l'anneau noethérien A . Soient S le spectre premier et S_0 le spectre maximal (ensemble des idéaux de cohauteur nulle), tous deux topologisés au moyen de la topologie de Zariski. A tout $p \in S$, associons l'anneau localisé A_p et la fonction $F(z)$ associée à la graduation naturelle au moyen des $p^n A_p$. Le coefficient de Z en $F(z)$ est

$$\lambda(p) = \mathrm{long}(pA_p/p^2 A_p) .$$

Soit r_0 et r les bornes supérieures (ou l'infini) de $\lambda(p)$ sur S_0 et S $(0 \leqslant r_0 \leqslant r \leqslant \infty)$. On appellera r la "dimension caractéristique" de A .

Exemples.

1° Si tout idéal de A a un système de g générateurs, on a $r \leqslant g$. Ce sont les anneaux de rang fini au sens de COHEN.

2° Si A est régulier au sens de l'algèbre homologique (cf. [10]), alors r est fini et coincide avec la dimension homologique globale. Notons que, en posant $\Delta = g\ell \dim A$, on a $r \leqslant \Delta$, et que la différence $(\Delta - r)$ est nulle ou infinie. En effet si A n'est pas régulier, Δ est infinie, et si A est régulier de dimension Δ , alors tout anneau de fractions est de dimension $\leqslant \Delta$, avec égalité sur S_0 . Si d est la dimension de A_p , on a l'inégalité $d \leqslant r$.

On a en outre le théorème suivant :

THÉORÈME 6. - Si A est le quotient d'un anneau régulier de dimension ρ , on a $r \leqslant \rho$ et en particulier r est finie.

Ceci résulte immédiatement du fait que tout anneau des quotients d'un anneau régulier est régulier et des formules usuelles de la localisation.

THÉORÈME 7. - Un anneau local complet est de dimension caractéristique finie.

On applique le théorème précédent, après avoir rappelé qu'un anneau local complet est, d'après I. S. COHEN, une image homomorphe d'un anneau régulier (complet, non ramifié).

THÉORÈME 8. - Un anneau local géométrique (cf. [9]) est de dimension caractéristique finie.

On applique le théorème de transition (cf. [9]) et on passe au complété. Le résultat découle du théorème précédent. Plus généralement le résultat s'applique à un anneau local à noyau au sens de [9]. Pour un tel anneau à noyau, le passage de l'anneau au complété ne change pas la famille des fonctions $F_p(z)$ attachées aux divers éléments de $\mathcal{S}$.

Remarque. - Il conviendrait de donner une démonstration du théorème 7 qui n'utilise pas le théorème de structure de Cohen suivant lequel un anneau local complet est quotient d'un anneau local régulier (complet, non ramifié) (cf. [1]).

THÉORÈME 9. - Si r est finie, il y a un nombre fini de fonctions associées $F_p(z)$, et en particulier un nombre fini de polynômes caractéristiques de Hilbert. Plus généralement on a le théorème suivant :

THÉORÈME 10. - Si une famille Σ d'éléments p de $\mathcal{S}$ est telle que $\lambda(p)$ est majorée par h entier sur Σ , alors il y a un nombre fini de fonctions $F_p(z)$ pour $p \in \Sigma$. En effet ces fonctions sont normalement majorées par $\sum L_n z^n$ avec

$$L_n = \binom{n + h - 1}{h - 1} ,$$

et comme la dimension de A_p est au plus h , d'après un résultat élémentaire, on déduit de la relation

$$\sum_0^\infty L_n z^n = \frac{1}{(1 - z)^h}$$

que $(1 - z)^h F_p(z)$ est un polynôme $G_p(z)$ à coefficients entiers, normalement majoré pour $|z| \leqslant R$ $(0 < R < 1)$. La famille des polynômes $G_p(z)$, étant normale, est finie (prendre une limite en cas contraire et utiliser le fait que l'on a des entiers).

Notons que si r est finie, il y a un nombre fini de polynômes de Hilbert pour les divers anneaux locaux de A . La réciproque n'est pas vraie, car pour chaque p , a_n n'est polynomial en n que pour $n \geqslant N$ avec N qui peut n'être pas borné quand p varie (cf. [2]).

Contreexemple. - Il existe des anneaux noethériens de dimension caractéristique non finie. Il suffit de prendre un anneau de dimension de Krull infinie (il y a des chaînes d'idéaux premiers de longueur arbitrairement grande). Voir NAGATA [7], Appendice : soient k un corps, $x_1 , \dots , x_n , \dots$ des lettres et p_i l'idéal de $k[x_1, \dots, x_n, \dots]$ engendré par les x_j tels que $i! \leqslant j < (i+1)!$. Soit S l'intersection des compléments des p_i. Alors $A = k[x_1, \dots, x_n, \dots]_S$ répond à la question.

Conjecture. - Tout anneau local est de dimension caractéristique finie.

Il serait intéressant de trouver un anneau noethérien de dimension finie et de dimension caractéristique infinie.

4. Etude d'une application du spectre maximal.

La correspondance $p \xrightarrow{f} F_p(z)$, lorsque p décrit $\mathbb{S}_0$, définit une application f de $\mathbb{S}$ dans l'espace Σ des séries entières à coefficients entiers. On munit $\mathbb{S}$ de la topologie de Zariski et Σ de la topologie de la convergence uniforme. Un système fondamental de voisinages de $\varphi_0 \in \Sigma$ est donné par les ensembles $V(R, \varepsilon, \varphi_0)$ ainsi définis : $\varphi \in V$ s'il existe R et ε positifs avec $0 \leqslant R < 1$ en sorte que $|z| \leqslant R$ entraîne $|\varphi - \varphi_0| \leqslant \varepsilon$. La topologie sur Σ est séparée comme on le voit en appliquant les inégalités de Cauchy et utilisant le fait que les coefficients sont des nombres entiers rationnels. On munira $\mathbb{S}_0$ de la topologie induite de celle de $\mathbb{S}$. Par exemple f est continue si A est semi-local ou bien si A est régulier. On a le théorème suivant :

THÉORÈME 11. - Si l'application $f : p \to F_p(z)$ est continue, A est de dimension de Krull finie et de dimension caractéristique finie.

Soit $a_1(p)$ le coefficient de z en $F_p(z)$. L'image Φ de $\mathbb{S}_0$ par f est séparée, et comme $\mathbb{S}_0$ est quasi-compact, Φ est compacte. Soit alors μ l'application $F_p \to \mu_p$ avec $\mu_p = \sup|F_p(z)|$ pour $|z| \leqslant 1/2$. Comme les coefficients sont positifs, on a $\mu_q = F_q(1/2)$. Alors μ est une application continue. En effet, à tout $\varepsilon > 0$, $|Z| \leqslant 1/2$ et

$$F_p(z) \in V(1/2, \varepsilon, q) \quad \text{entraîne} \quad |F_q(z) - F_p(z)| \leqslant \varepsilon$$

et donc

$$|\mu(q) - \mu(p)| \leqslant \varepsilon .$$

Comme Φ est compacte, μ_p est borné sur $\mathbb{S}_0$, et, d'après les inégalités de Cauchy, $a_1(p)$ est borné et la dimension caractéristique est finie. La dimension de Krull l'est également d'après la section précédente et l'image Φ est finie d'après le théorème 9. On utilisera la définition suivante :

DÉFINITION. - <u>Un anneau noethérien est dit "ponctuel" si l'image</u> $f(\mathcal{S}_0)$ <u>est un point</u>. Il revient au même de dire que, pour tout idéal maximal, la série $F(z)$ est la même. On a le théorème ci-après :

THÉORÈME 12. - <u>L'application</u> f <u>est continue si et seulement si</u> A <u>est somme directe finie d'anneaux ponctuels</u>.

Si f est continue, le nombre des fonctions $F_p(Z)$, pour $p \in \mathcal{S}_0$, est en particulier fini, et $f(\mathcal{S}_0) = \{\varphi_1 , \ldots , \varphi_n\}$. Si $n = 1$, le théorème est vérifié. Si celui-ci est vrai jusqu'à $(n - 1)$ inclusivement, soit $\{M_{1j}\}$ l'ensemble des idéaux maximaux tels que $\varphi_{M_{1j}} = \varphi_1$ et $\{M_{2k}\}$ celui des autres. On pose

$$I_1 = \bigcap_j M_{1j} , \quad I_2 = \bigcap_k M_{2k} .$$

Prenons

$$\varepsilon < \inf_{i\neq 1}[\sup_{|z|=R} |\varphi_1(z) - \varphi_i(z)|] ;$$

il existe alors, pour tout $M = M_{1j}$ avec j fixé, un idéal W tel que $M \not\supseteq W$ et que $M' \in \mathcal{S}_0$ et $M' \not\supseteq W$ entraîne, la topologie étant discrète, $\varphi_M = \varphi_{M'} = \varphi_1$. On en déduit que $M_{1j} \not\supseteq I_2$ (car tout M_{2k} contient W .). Finalement I_1 et I_2 sont étrangers. Alors

$$A/(I_1 + I_2) \simeq A/I_1 \oplus A/I_2$$

et l'hypothèse de récurrence s'applique à A/I_2 .

<u>Réciproquement</u>, si $A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_h$ avec A_ℓ ponctuel pour $\ell = 1 , 2 , \ldots , n$, on voit facilement qu'il y a continuité car les radicaux (de Jacobson) des divers A_ℓ sont premiers entre eux.

L'exemple le plus important d'anneau <u>ponctuel</u> est celui des anneaux réguliers (noethériens).

<u>Remarque</u>. - Les théorèmes de ces paragraphes ne sont plus vrais si, au lieu de décrire $\mathcal{S}_0$, p décrit $\mathcal{S}$ (prendre un anneau régulier non principal par exemple).

<u>Problème</u>. - Trouver un anneau ponctuel qui ne soit pas régulier.

5. Sur une topologie linéaire.

Considérons, sur tout anneau noethérien B , la topologie linéaire $T(B)$ pour laquelle un système fondamental de voisinages de zéro est constitué par les idéaux de dimension nulle.

Si on a $A = A_0 \oplus A_1 \oplus \dots$ et si A est noethérien, alors A et A_0 sont simultanément anneaux de Jacobson (ou de Hilbert, cf. GOLDMANN, [3].). En effet, A est le quotient d'un anneau de polynômes sur A_0. On voit d'autre part que si A et A_0 sont des anneaux de Jacobson, la topologie $T(A)$ sur A induit la topologie $T(A_0)$ sur A_0. Cela résulte du fait qu'un anneau C est anneau de Jacobson si et seulement si les idéaux maximaux de $C[X]$ se contractent suivant les idéaux maximaux de C. La réciproque n'est pas vraie, mais on a le résultat particulier suivant, qu'on établit par récurrence sur r : si $B = A_0[X_1, \dots, X_r]$ et si la topologie $T(B)$ sur B induit la topologie $T(A_0)$ sur A_0, alors A_0 et B sont des anneaux de Jacobson.

BIBLIOGRAPHIE

[1] COHEN (I. S.). On the structure and ideal theory of complete local rings, Trans. Amer. math. Soc., t. 59, 1946, p. 54-106.

[2] DUBREIL (Paul). - Idéaux de polynômes et fonction de Hilbert, Atti del Convegno internazionale di geometria algebrica [1961. Torino], p. 151-164. - Torino, L. Rattero, 1962.

[3] GOLDMAN (Oscar). - Hilbert rings and the Hilbert Nullstellensatz, Math. Z., t. 54, 1951, p. 136-140.

[4] GUÉRINDON (Jean). - Notion de longueur pour une classe de modules gradués, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 254, 1962, p. 1718-1719.

[5] GUÉRINDON (Jean). - Sur la topologie spectrale d'un anneau, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 254, 1962, p. 3066-3068.

[6] GUÉRINDON (Jean). - Dimension caractéristique d'un anneau noethérien, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 256, 1963, p. 4143-4146.

[7] NAGATA (Masayoshi). - Local rings. - New York, Interscience Publishers, 1962 (Interscience Tracts in pure and applied Mathematics, 13).

[8] SAKUMA (Motoyoshi). - On the theory of multiplicities in finite modules over semi-local rings, J. Sc. Hiroshima Univ., Series A, t. 23, 1959, p. 1-17.

[9] SAMUEL (Pierre). - Algèbre locale. - Paris, Gauthier-Villars, 1953 (Mémorial des Sciences mathématiques, 123, 76 p.).

[10] SERRE (Jean-Pierre). - Sur la dimension homologique des anneaux et des modules noethériens, Proceedings of the international Symposium on algebraic number theory [1955. Tokyo and Nikko], p. 175-189. - Tokyo, Science Council of Japan, 1956.

[11] ZARISKI (O.) and SAMUEL (P.). - Commutative algebra. Vol. 2. - Princeton, D. Van Nostrand Comp., 1960.

ERRATA aux notes [4], [5] et [6].

a. Référence [4], dans l'énoncé du théorème 2, remplacer E par F .

b. Référence [5], page 3067, lignes 7 et 6 à partir du bas, lire "et donc tout voisinage pour τ contient un voisinage de la forme $V(R , \varepsilon , U)$ et est un voisinage pour σ ".

c. Référence [6], page 4145, ligne 20, ajouter "anneau noethérien de dimension finie ou non, d étant le nombre minimum des générateurs sur A de q/q^2 ".