Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres

Maurice Koskas

Application de la théorie des hypertas aux demi-groupes

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 17, nº 1 (1963-1964), exp. nº 3, p. 1-22

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1963-1964__17_1_A2_0>

APPLICATION DE LA THÉORIE DES HYPERTAS AUX DEMI-GROUPES

par Maurice KOSKAS

Nous avons, dans un précédent exposé, étudié la structure d'hypertas [4], et nous avons donné quelques applications aux demi-groupes, groupoïdes et demi-hyper-groupes [3].

Nous allons, à présent, exposer d'autres applications de la théorie des hypertas. Mais il nous faut auparavant approfondir la théorie. Nous introduisons pour cela la notion de bi-hypertas.

I. Etude de la structure de bi-hypertas.

1. Définitions, exemples.

Définitions. - On appelle bi-hypertas la donnée d'un ensemble E , et de deux demi-groupes d'applications de E dans $\mathcal{P}(E)$, $\mathcal{Q}_1$ et $\mathcal{Q}_2$, tels que :

$$\forall \quad \theta_1 \in \mathcal{Q}_1 , \quad \theta_2 \in \mathcal{Q}_2 : \qquad \theta_1 \circ \theta_2 = \theta_2 \circ \theta_1 .$$

Un **bi-hypertas** est noté $(E , \mathcal{Q}_1 , \mathcal{Q}_2)$. Nous notons $\mathcal{Q}$ le demi-groupe engendré par $\mathcal{Q}_1 \cup \mathcal{Q}_2$. Nous considérerons souvent par la suite les trois hypertas

$$(E , \mathcal{Q}_1) , (E , \mathcal{Q}_2) , (E , \mathcal{Q}) .$$

Etant donné un bi-hypertas $(E , \mathcal{Q}_1 , \mathcal{Q}_2)$, on peut définir les hypertas inverses ([4]) de $(E , \mathcal{Q}_1)$, $(E , \mathcal{Q}_2)$, $(E , \mathcal{Q})$, soit respectivement

$$(E , \mathcal{Q}_1') , (E , \mathcal{Q}_2') , (E , \mathcal{Q}') .$$

On vérifie facilement que $\mathcal{Q}'$ est engendré par $\mathcal{Q}_1' \cup \mathcal{Q}_2'$, et que $(E , \mathcal{Q}_1' , \mathcal{Q}_2')$ est un bi-hypertas, que l'on appelle bi-hypertas inverse de $(E , \mathcal{Q}_1 , \mathcal{Q}_2)$.

Remarque. - Un bi-hypertas $(E , \mathcal{Q}_1 , \mathcal{Q}_2)$ est appellé bi-tas lorsque $(E , \mathcal{Q}_1)$ et $(E , \mathcal{Q}_2)$ sont des tas.

Exemples. - Soit D (resp. H), un demi-groupe (resp. un demi-hypergroupe). Nous notons $\mathcal{R}$, le demi-groupe engendré par les translations à droite de D (resp. de H), $\mathcal{L}$, le demi-groupe engendré par les translations à gauche de D (resp. de H).

$(D , \mathcal{R} , \mathcal{L})$ (resp. $(H , \mathcal{R} , \mathcal{L})$) est un bi-hypertas ; son bi-hypertas inverse est $(D , \mathcal{R}' , \mathcal{L}')$ (resp. $(H , \mathcal{R}' , \mathcal{L}')$).

On vérifie aisément que $(D , \mathcal{L}')$ (resp. $(H , \mathcal{L}')$) est un pseudo-tas lorsque D (resp. H) est simplifiable à gauche.

Rappelons que H est dit simplifiable à gauche si

$$a \star x \cap a \star y \neq \emptyset \Longrightarrow x = y .$$

2. Régularité, conditions S pour un hypertas.

Définition. - Un bi-hypertas $(E , \mathcal{Q}_1 , \mathcal{Q}_2)$ est dit régulier si :

$\forall$ $\mathfrak{a}_1$, idéal de $(E , \mathcal{Q}_1)$, $\mathfrak{a}_2$, idéal de $(E , \mathcal{Q}_2)$, on a : $\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2 \neq \emptyset$.

Exemples. - D est un demi-groupe, H , un demi-hypergroupe.

a. Les bi-hypertas $(D , \mathcal{R} , \mathcal{L})$ et $(H , \mathcal{R} , \mathcal{L})$ sont réguliers.

b. $(D , \mathcal{R}' , \mathcal{L}')$ (resp. $(H , \mathcal{R}' , \mathcal{L}')$) est régulier si et seulement si D (resp. H) n'est pas réunion d'un idéal à gauche propre et d'un idéal à droite propre.

c. Nous donnerons au cours de l'exposé d'autres exemples de régularité.

Les conditions S . - $(E , \mathcal{Q}_1 , \mathcal{Q}_2)$ étant un bi-hypertas, nous définissons sur E , deux relations d'équivalence ρ_1 et ρ_2 en posant :

$\forall$ $x , y \in E$,

$$x \,\rho_i\, y \quad (i = 1 , 2) \iff \forall\ \mathfrak{a}_i \text{ , idéal de } (E , \mathcal{Q}_i) , \quad x \in \mathfrak{a}_i \iff y \in \mathfrak{a}_i .$$

Nous définissons alors les conditions S , éventuellement vérifiées par $(E , \mathcal{Q}_1 , \mathcal{Q}_2)$:

(S_{12}) $\forall$ $x , y , u \in E$, $\theta_1 \in \mathcal{Q}_1$: $x \in \theta_1(u)$, $y \in \theta_1(u)$ $\Longrightarrow$ $x \,\rho_2\, y$.

(S_{21}) $\forall$ $x , y , u \in E$, $\theta_2 \in \mathcal{Q}_2$: $x \in \theta_2(u)$, $y \in \theta_2(u)$ $\Longrightarrow$ $x \,\rho_1\, y$.

(S'_{12}) $\forall$ $x , y \in E$, $\theta_1 \in \mathcal{Q}_1$: $\theta_1(x) \cap \theta_1(y) \neq \emptyset$ $\Longrightarrow$ $x \,\rho_2\, y$.

(S'_{21}) $\forall$ $x , y \in E$, $\theta_2 \in \mathcal{Q}_2$: $\theta_2(x) \cap \theta_2(y) \neq \emptyset$ $\Longrightarrow$ $x \,\rho_1\, y$.

On montre aisément que $(E , \mathcal{Q}_1 , \mathcal{Q}_2)$ vérifie S_{12} (resp. S_{21}), si et seulement si $(E , \mathcal{Q}'_1 , \mathcal{Q}'_2)$ vérifie S'_{12} (resp. S'_{21}).

D'autre part :

Si $(E , \mathcal{O}_1)$ est un pseudo-tas, $(E , \mathcal{O}_1 , \mathcal{O}_2)$ vérifie S_{12} .

Si $(E , \mathcal{O}_1)$ est un hypertas injectif, $(E , \mathcal{O}_1 , \mathcal{O}_2)$ vérifie S'_{12} .

<u>Exemples</u>.

D est un demi-groupe, H est un demi-hypergroupe.
$(D , \mathcal{R} , \mathcal{L})$ vérifie toujours les conditions S_{12} et S_{21} (nous posons : $\mathcal{O}_2 = \mathcal{L}$, $\mathcal{O}_1 = \mathcal{R}$)
$(D , \mathcal{R} , \mathcal{L})$ vérifie la condition S'_{12} , si et seulement si D vérifie la condition :

(C'_1) $\quad \forall \; a , x , y \in D : \quad xa = ya \implies Dx \cup \{x\} = Dy \cup \{y\}$.

On définit de même pour un demi-groupe D , la condition :

(C'_2) $\quad \forall \; a , x , y \in D , \quad ax = ay \implies xD \cup \{x\} = yD \cup \{y\}$.

Il est clair que C'_1 (resp. C'_2) généralise la simplifiabilité à droite (resp. à gauche).

Examinons maintenant le cas de H . Nous posons également $\mathcal{O}_1 = \mathcal{R}$, $\mathcal{O}_2 = \mathcal{L}$.
$(H , \mathcal{R} , \mathcal{L})$ vérifie la condition S_{12} , si et seulement si H vérifie la condition :

(D_1) $\quad \forall \; a_1 , \dots , a_n , \; x , y \in H$:

$$x \in a_1 \star \dots \star a_n , \; y \in a_1 \star \dots \star a_n \implies H \star x \cup \{x\} = H \star y \cup \{y\} .$$

On définit de même D_2 :

(D_2) $\quad \forall \; a_1 , \dots , a_n , \; x , y \in H$:

$$x \in a_1 \star \dots \star a_n , \; y \in a_1 \star \dots \star a_n \implies x \star H \cup \{x\} = y \star H \cup \{y\} .$$

Tout hypergroupe vérifie manifestement les conditions D_1 et D_2 .

D'autre part, $(H , \mathcal{R} , \mathcal{L})$ vérifie la condition S'_{12} si et seulement si H vérifie la condition :

(C'_1) $\quad \forall \; a_1 , \dots , a_n , \; x , y \in H$:

$$(x \star a_1 \star \dots \star a_n) \cap (y \star a_1 \star \dots \star a_n) \neq \emptyset \implies H \star x \cup \{x\} = H \star y \cup \{y\} .$$

On définit de même la condition C'_2 :

(C'_2) $\forall\ a_1 , \dots , a_n , \ x , y \in H$:

$$(a_1 \star \dots \star a_n \star x) \cap (a_1 \star \dots \star a_n \star y) \neq \emptyset \implies x \star H \cup \{x\} = y \star H \cup \{y\}$$

Ces deux dernières conditions généralisent celles de simplifiabilité d'un côté.

3. Noyau, éléments nets d'un bi-hypertas.

Dans ce paragraphe, $(E , \Omega_1 , \Omega_2)$ est un bi-hypertas fixé, Ω est le demi-groupe engendré par $\Omega_1 \cup \Omega_2$.

Définitions.

On appelle idéal bilatère de $(E , \Omega_1 , \Omega_2)$ tout complexe de E qui est à la fois un idéal de (E , Ω_1) et de (E , Ω_2) .

On appelle noyau de $(E , \Omega_1 , \Omega_2)$ l'intersection de tous les idéaux bilatères de $(E , \Omega_1 , \Omega_2)$ (ce peut être la partie vide).

$(E , \Omega_1 , \Omega_2)$ est dit simple si E coincide avec le noyau, autrement dit si $(E , \Omega_1 , \Omega_2)$ ne possède pas d'idéal bilatère propre.

Le théorème qui suit est fondamental dans notre exposé.

THÉORÈME I-1. - Soit $(E , \Omega_1 , \Omega_2)$ un bi-hypertas vérifiant la condition S_{21} , et tel que la famille $\mathfrak{F}$ des idéaux minimaux de (E , Ω_1) est non vide. Dans ces conditions, $\bigcup_{L\in\mathfrak{F}} L$ est un idéal bilatère de $(E , \Omega_1 , \Omega_2)$.

Lorsque de plus, $(E , \Omega_1 , \Omega_2)$ est simple, ou est régulier, $\bigcup_{L\in\mathfrak{F}} L$ coïncide avec le noyau de $(E , \Omega_1 , \Omega_2)$, et tout idéal de (E , Ω_1) contient un élément de $\mathfrak{F}$.

Démonstration. - $\bigcup_{L\in\mathfrak{F}} L$ est un idéal de (E , Ω_1) ; nous allons démontrer que c'est aussi un idéal de (E , Ω_2) . Pour cela, il suffit d'établir que :

$$\theta_2 \in \Omega_2 , \quad L \in \mathfrak{F} , \quad \theta_2(L) \neq \emptyset \implies \theta_2(L) \in \mathfrak{F} .$$

Compte tenu de la permutabilité des applications de Ω_1 avec celles de Ω_2 , il est clair que $\theta_2(L)$ est un idéal de (E , Ω_1) . Montrons que c'est un idéal minimal.

Soit A_1 un idéal de (E , Ω_1) contenu dans $\theta_2(L)$. Posons :

$$B_1 = \{b \in L : \ \theta_2(b) \subseteq A_1\} .$$

On a manifestement :

$$\theta_2(B_1) \subseteq A_1 \subseteq \theta_2(L) \ ; \qquad B_1 \subseteq L \ .$$

B_1 n'est pas vide, car si a est un élément de A_1 , il existe $\ell \in L$ tel que a appartient à $\theta_2(\ell)$. Autrement dit, on a : $\theta_2(\ell) \cap A_1 \neq \emptyset$. Compte tenu de la condition S_{21} , il en résulte que l'on a :

$$\theta_2(\ell) \subseteq A_1 \ ,$$

donc ℓ appartient à B_1 .

On vérifie facilement que B_1 est un idéal de $(E \ , \mathbb{O}_1)$. Par suite, puisque L est un idéal minimal , on a $B_1 = L$, soit $A_1 = \theta_2(L)$.

On conclut que $\theta_2(L)$ est un idéal minimal de $(E \ , \mathbb{O}_1)$, et en définitive que $\bigcup_{L \in \mathfrak{F}} L$ est un idéal bilatère de $(E \ , \mathbb{O}_1 \ , \mathbb{O}_2)$.

Supposons maintenant que $(E \ , \mathbb{O}_1 \ , \mathbb{O}_2)$ soit régulier (le cas où $(E \ , \mathbb{O}_1 \ , \mathbb{O}_2)$ est simple se traite de la même façon).

Soient A un idéal de $(E \ , \mathbb{O})$, L un idéal minimal de $(E \ , \mathbb{O}_1)$. $A \cap L$ est non vide, et est un idéal de $(E \ , \mathbb{O}_1)$ contenu dans L . Donc on a :

$$A \cap L = L \ , \text{ soit } \ L \subseteq A \ .$$

L étant un élément quelconque de $\mathfrak{F}$, on a :

$$\bigcup_{L \in \mathfrak{F}} L \subseteq A \ .$$

Il résulte immédiatement de là que $\bigcup_{L \in \mathfrak{F}} L$ est le noyau de $(E \ , \mathbb{O}_1 \ , \mathbb{O}_2)$. Nous posons : $K = \bigcup_{L \in \mathfrak{F}} L$.

Soit alors A_1 un idéal quelconque de $(E \ , \mathbb{O}_1)$. $A_1 \cap K$ est non vide, autrement dit, il existe $L \in \mathfrak{F}$, et $a_1 \in L \cap A_1$. On a alors :

$$L = \bigcup_{\theta_1 \in \mathbb{O}_1 \cup \{1_E\}} \theta_1(a_1) \subseteq A_1 \ .$$

C. Q. F. D.

Le théorème I-1 a de nombreuses conséquences, que nous étudions par la suite ; en particulier, il permet l'étude des éléments nets d'un bi-hypertas.

Nous posons :

$$i = 1 \ , 2 \ , \qquad Z_i = \{a \in E \ : \ \forall \ b \in E \ , \ \exists \ \theta \in \mathbb{O}_i \ : \ a \in \theta(b)\} \ .$$

On vérifie facilement que Z_i est la partie vide ou un idéal de $(E, \mathcal{O}_i)$. On a le théorème suivant :

THÉORÈME I-2. - Si $(E, \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2)$ vérifie la condition S_{21}, et si Z_1 n'est pas vide, on a :

- Z_1 est un idéal bilatère de $(E, \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2)$, plus précisément, est le noyau de $(E, \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2)$.
- $Z_2 \subseteq Z_1$.

COROLLAIRE I-2.a. - Si $(E, \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2)$ vérifie les conditions S_{21} et S_{12} (en particulier si $(E, \mathcal{O}_1)$ et $(E, \mathcal{O}_2)$ sont des pseudos-tas), et si Z_1 et Z_2 ne sont pas vides, on a :

$$Z_1 = Z_2 = \text{noyau de } (E, \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2).$$

II. Applications des théorèmes de la partie I.

L'application du théorème I-2 au bi-hypertas $(D, \mathcal{R}, \mathcal{L})$ associé à un demi-groupe D, fournit le théorème suivant bien connu :

THÉORÈME ([1]). - Si D est un demi-groupe possédant un idéal à droite minimal, son noyau est réunion des idéaux à droite minimaux. De plus, tout idéal à droite de D, contient un idéal à droite minimal.

Ce théorème peut être généralisé dans différentes directions.

1. Applications directes du théorème I-1.

Nous nous bornerons dans ce paragraphe à des indications sommaires.

a. M idéaux d'un côté d'un demi-groupe. - Soit D un demi-groupe dont M est un sous-demi-groupe.

Définition. - Un complexe A de D est appellé M-idéal à droite de D si on a

$$AM \subseteq A.$$

Pour tout $m \in M$, soit θ_m la translation à droite de D définie par m. Nous notons $\mathcal{R}_M$ le demi-groupe des translations à droite de D de la forme θ_m, $(\forall\ m \in M)$.

Il est clair que $(D, \mathcal{R}_M, \mathcal{L})$ est un bi-tas.

La proposition suivante permet d'appliquer à ce bi-tas le théorème I-1.

PROPOSITION. - Si M rencontre tout idéal à gauche de D (en particulier si M contient un complexe net à gauche), $(D , \mathcal{R}_M , \mathcal{L})$ est régulier.

Nous n'énonçons pas les théorèmes auxquels on parvient en appliquant le théorème I-1.

b. M idéaux d'un côté d'un demi-hypergroupe. - H étant un demi-hypergroupe dont M est un sous-demi-hypergroupe, on peut généraliser les considérations de la partie (a) en introduisant le bi-hypertas $(H , \mathcal{R}_M , \mathcal{L})$.

En général on impose à M les deux conditions suivantes :

- M rencontre tout idéal à gauche de H (ceci entraîne la régularité de $(H , \mathcal{R}_M , \mathcal{L})$).
- $\forall \; x \in H , \; m \in M , \; x \star m$ est réduit à un élément.

On peut alors appliquer le théorème I-1 au bi-hypertas $(H , \mathcal{L} , \mathcal{R}_M)$.

c. Demi-hypergroupe vérifiant une condition D . - On a le résultat suivant :

THÉORÈME II-1. - Si H est un demi-hypergroupe vérifiant la condition D_2 et possédant un idéal à droite minimal, son noyau est réunion des idéaux à droite minimaux. De plus, tout idéal à droite de H contient un idéal à droite minimal.

2. Applications du théorème I-1 utilisant l'hypertas inverse.

On peut établir d'autres résultats à partir du théorème I-1, en utilisant l'hypertas inverse.

Donnons tout d'abord la définition suivante :

Définition. - On appelle idéal à gauche maximal d'un demi-hypergroupe ou d'un demi-groupe D , tout idéal à gauche qui est :

- égal à D lorsque D est simple à gauche.
- un élément maximal de la famille des idéaux à gauche propres de D , lorsque D n'est pas simple à gauche.

On peut de même définir les notions d'idéal à droite maximal, et d'idéal bilatère maximal.

Ces définitions se généralisent immédiatement au cas où D est remplacé par un bi-hypertas.

THÉORÈME II-2. - Soit H un demi-hypergroupe vérifiant la condition C_1' et tel que la famille $\mathcal{S}$ de ses idéaux à gauche maximaux est non vide. Alors $\bigcap_{p \in \mathcal{S}} p$ est un idéal bilatère de H, éventuellement vide.

De plus pour que H soit simple, il faut et il suffit que H soit simple à gauche.

Démonstration. - Considérons le bi-hypertas $(H, \mathcal{L}', \mathcal{R}')$ inverse de $(H, \mathcal{L}, \mathcal{R})$. Puisque H vérifie la condition C_1', $(H, \mathcal{L}', \mathcal{R}')$ vérifie la condition S_{12}.

Nous remarquons tout de suite que pour qu'un complexe A de H soit un idéal à gauche propre (resp. un idéal bilatère propre), il faut et il suffit que $H - A$ soit un idéal propre de l'hypertas $(H, \mathcal{L}')$ (resp. un idéal bilatère propre du bi-hypertas $(H, \mathcal{L}', \mathcal{R}')$).

Il en résulte que :

a. les idéaux à gauche, propres, maximaux de H sont les complémentaires d'idéaux propres minimaux de $(H, \mathcal{L}')$.

b. H est simple si et seulement si le bi-hypertas $(H, \mathcal{L}', \mathcal{R}')$ l'est aussi.

Ceci dit nous allons supposer que H n'est pas simple à gauche, ce qui entraîne que tout idéal de H, appartenant à la famille $\mathcal{S}$ est propre.

On peut appliquer le théorème I-1 au bi-hypertas $(H, \mathcal{L}', \mathcal{R}')$. Il entraîne, compte tenu des remarques faites plus haut que $\bigcup_{p \in \mathcal{S}} H - p$ est un idéal bilatère du bi-hypertas $(H, \mathcal{L}', \mathcal{R}')$ éventuellement égal à H.

Donc $\bigcap_{p \in \mathcal{S}} p$ est un idéal bilatère de H, éventuellement vide. Montrons alors que H ne peut être simple, et pour cela faisons un raisonnement par l'absurde en supposant H simple.

Alors le bi-hypertas $(H, \mathcal{L}', \mathcal{R}')$ est lui aussi simple, et on a, par suite

$$\bigcup_{p \in \mathcal{S}} H - p = H \text{ , soit } \bigcap_{p \in \mathcal{S}} p = \emptyset .$$

De plus, tout idéal de $(H, \mathcal{L}')$ non vide contient un idéal de $(H, \mathcal{L}')$ minimal. Autrement dit, on peut plonger tout idéal à gauche propre de H dans un idéal à gauche maximal.

On a, puisque H est supposé simple :

$$H \star H = H .$$

On peut alors appliquer à l'hypertas $(H, \mathcal{L})$ le théorème 118 de [4]. Il en résulte que :

H possède un complexe générateur à gauche minimal A dont le cardinal coincide avec celui de $\mathcal{S}$.

On a : $H = H \star A$.

Soit alors $a \in A$. Il existe $h \in H$ et $b \in A$ tel que $a \in h \star b$. Compte tenu des propriétés des complexes générateurs minimaux, il vient $a = b$, donc $a \in h \star a$.

Soit $x \in H$. On a :

$$x \star a \subseteq x \star h \star a .$$

Il existe donc $u \in x \star h$ tel que $(x \star a) \cap (u \star a) \neq \emptyset$.

En vertu de la condition C_1' , il en résulte que x appartient à $H \star u$. Autrement dit,

$$x \in H \star x \star h .$$

On a donc :

$$H = H \star h .$$

$\{h\}$ est un complexe générateur à gauche minimal, et donc on a :

$$\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{\mathcal{S}}} = 1 .$$

La famille $\mathcal{S}$ ne contient donc qu'un seul idéal, ce qui contredit le résultat $\bigcap_{p \in \mathcal{S}} p = \emptyset$.

Donc H n'est pas simple.

Il est évident d'autre part que si H est simple à gauche, H est simple.

C. Q. F. D.

Enonçons le théorème lorsque H est remplacé par un demi-groupe D .

THÉORÈME II-2'. - <u>Soit</u> D <u>un demi-groupe vérifiant la condition</u> C_1' , <u>et tel que la famille</u> $\mathcal{S}$ <u>de ses idéaux à gauche maximaux est non vide. Alors</u> $\bigcap_{p \in \mathcal{S}} p$ <u>est un idéal bilatère de</u> H , <u>éventuellement vide. De plus, pour que</u> D <u>soit simple, il faut et il suffit que</u> D <u>soit simple à gauche</u>.

<u>Remarque</u>. - Si D ou H est simplifiable à droite, il vérifie C_1' . On pourrait donc (nous ne le faisons pas) énoncer des corollaires évidents des théorèmes II-2 et II-2'.

COROLLAIRE II-2.a. - <u>Tout demi-hypergroupe</u> H (<u>resp. tout demi-groupe</u> D) <u>sim-</u>

ple à droite, vérifiant C'_1 et possédant au moins un idéal à gauche maximal, est un hypergroupe (resp. est un groupe).

En effet H (resp. D) est simple à gauche et à droite.

COROLLAIRE II-2.b. - Tout demi-hypergroupe H (resp. tout demi-groupe D) simple à droite, vérifiant C'_1 et possédant un élément neutre à droite e , est un hypergroupe (resp. est un groupe).

On démontre ce corollaire en raisonnant par l'absurde. Si par exemple H n'était pas un hypergroupe, l'ensemble p défini par $p = \{x \in H : e \notin H \star x\}$ serait un idéal à gauche maximum de H . Le corollaire II-2.a permet alors de conclure. Nous examinerons plus loin un cas particulier intéressant du corollaire II-2.a.

3. Applications du théorème I-2.

Le théorème I-2 permet l'étude des éléments zéroïds de Clifford-Miller ([1]), et des éléments inversibles de Ljapin ([2] , [7]). Il permet même des généralisations assez intéressantes.

On sait que les éléments zéroïds d'un côté d'un demi-groupe (ou d'un demi-hypergroupe) sont les éléments nets du même côté. Le corollaire I-2.a entraîne alors le théorème bien connu de Clifford-Miller ([1]) :

THÉORÈME. - Si D est un demi-groupe possédant des éléments nets à gauche et des éléments nets à droite, l'ensemble des premiers coïncide avec l'ensemble des seconds, et est le noyau K de D . K est un groupe et D est un homogroupe ([8]).

Nous allons maintenant indiquer sommairement comment on peut généraliser ce théorème.

A. Eléments M-nets dans un demi-groupe.

Définition. - Soit D un demi-groupe dont M est un sous-demi-groupe. Un élément x de D est dit M-net à droite si :

$$\forall\ y \in D\ ,\ \exists\ m \in M : \quad ym = x\ .$$

On définit de même les éléments M-nets à gauche.

Notons $Z_1(M)$ (resp. $Z_2(M)$), l'ensemble des éléments de D , M-nets à droite (resp. à gauche). Notons Z_1 (resp. Z_2) l'ensemble des éléments nets à droite (resp. à gauche) de D . On a manifestement :

$$Z_{1,M} \subseteq Z_1\ ;\quad Z_{2M} \subseteq Z_2\ .$$

On montre alors la proposition suivante :

PROPOSITION II-3.

a. <u>Si</u> $Z_1(M)$ <u>et</u> Z_2 <u>ne sont pas vides, on a</u> : $Z_1(M) = Z_2 = Z_1$.

b. <u>Si</u> $Z_1(M)$ <u>et</u> $Z_2(M)$ <u>ne sont pas vides, on a</u> : $Z_1(M) = Z_2(M) = Z_1 = Z_2$.

c. Si M' est un autre sous-demi-groupe de D et si $Z_1(M)$ et $Z_2(M')$ ne sont pas vides, on a :

$$Z_1(M) = Z_2(M') = Z_1 = Z_2 .$$

B. <u>Eléments</u> M-<u>nets dans un demi-hypergroupe</u>.

On peut généraliser de différentes façons les considérations précédentes au cas où H est un demi-hypergroupe dont M est un sous-demi-hypergroupe. Il est nécessaire que M vérifie une condition supplémentaire. On impose en général la condition suivante :

$$\forall \; x , y , \; a \in H , \; m_1 \ldots m_n \in M :$$

$$x \in a \star m_1 \star \ldots \star m_n , \; y \in a \star m_1 \star \ldots \star m_n \Longrightarrow H \star x \cup \{x\} = H \star y \cup \{y\} .$$

Nous n'énonçons pas les résultats que l'on peut obtenir.

C. <u>Demi-hypergroupes vérifiant une condition</u> D .

Parmi les théorèmes que l'on peut obtenir, citons le théorème suivant :

THÉORÈME II-3'. - Si H est un demi-hypergroupe vérifiant les conditions D_1 et D_2 , et possédant des éléments nets à gauche, et des éléments nets à droite, l'ensemble des premiers coïncide avec l'ensemble des seconds et est le noyau K de H . K est un sous-hypergroupe de H .

<u>Remarque</u>. - Ce théorème fournit une généralisation intéressante de la notion d'homogroupe.

Nous allons maintenant étudier les éléments inversibles au sens de Ljapin dans un demi-groupe ou un demi-hypergroupe. Auparavant, nous allons établir quelques résultats concernant les hypergroupes vérifiant une condition de simplifiabilité.

THÉORÈME II-4. - <u>Tout hypergroupe simplifiable d'un côté est un groupe</u>.

<u>Démonstration</u>. - Elle comporte plusieurs étapes.

Soit H un hypergroupe simplifiable à droite, par exemple. Montrons tout d'abord que H possède une unité.

Soit $x_0 \in H$. Il existe $e \in H$ tel que $x_0 \in e \star x_0$. Si y appartient à H, on a :

$$y \star x_0 \subseteq y \star e \star x_0 .$$

Il résulte de la simplifiabilité à droite que l'on a $y \in y \star e$. Donc e est unité à droite de H.

Posons alors :

$$H_e = \{z \in H : \ z \in e \star z\} .$$

On a : $e \in H_e$. Montrons que $H_e = H$ (ce qui entraîne que e est unité de H).

Soient $u \in H$, $y \in H_e$. Il existe z, $f \in H$ tels que

$$u \in (y \star z) \cap (f \star u) .$$

On peut alors écrire :

$$u \in f \star u \subseteq f \star y \star z .$$

Donc :

$$(y \star z) \cap (f \star y \star z) \neq \emptyset .$$

Ceci entraîne que y appartient à $f \star y$. Mais, puisque $y \in H_e$, on a aussi $y \in e \star y$. Donc $e = f$.

On a alors : $u \in e \star u$, ce qui entraîne $u \in H_e$. u étant quelconque, on a $H_e = H$.

En définitive, H possède une unité e. Nous allons maintenant établir que H est simplifiable à gauche.

H étant un hypergroupe simplifiable à droite, on a :

$$\forall \ x \in H , \ \exists \ x' \in H \ \underline{\text{unique}} : \quad e \in x' \star x .$$

x' est noté x^{-1}. On peut alors écrire si $x \in H$:

$$x \in x \star e \subseteq x \star x^{-1} \star x ; \quad x \in e \star x .$$

On a donc :

$$x \star x^{-1} \star x \cap e \star x \neq \emptyset ,$$

ce qui entraîne $e \in x \star x^{-1}$.

Etablissons alors quelques propriétés de "l'inverse" introduit ici.

On a tout d'abord :

$$y \in a \star x \implies a \in y \star x^{-1} .$$

En effet, si $y \in a \star x$, on peut écrire :

$$y \in (y \star e) \cap (a \star x) \subseteq (y \star x^{-1} \star x) \cap (a \star x) .$$

Ceci entraîne $a \in y \star x^{-1}$. On a aussi :

$$a \in x \star y \implies a^{-1} \in y^{-1} \star x^{-1} .$$

En effet, si $a \in x \star y$, on peut écrire :

$$e \in a^{-1} \star a \subseteq a^{-1} \star x \star y ,$$

d'où il résulte,

$$y^{-1} \in a^{-1} \star x ,$$

donc, en vertu de la propriété précédente,

$$a^{-1} \in y^{-1} \star x^{-1} .$$

Montrons maintenant la simplifiabilité à gauche. On a :

$$u \in (x \star y) \cap (x \star y') \implies u^{-1} \in (y^{-1} \star x^{-1}) \cap (y'^{-1} \star x^{-1})$$

et donc $y^{-1} = y'^{-1}$, $y = y'$.

Ainsi H est un hypergroupe simplifiable des deux côtés.

Pour terminer, montrons que H est un groupe, soit que la loi $\star$ est univoque.

Soient $x , y \in H$; $u , v \in x \star y$. Il existe $a , b \in H$ tels que y appartient à $(a \star u) \cap (b \star v)$. u appartient alors à

$$(e \star u) \cap (x \star a \star u) ,$$

donc e appartient à $x \star a$.

On montre de même que e appartient à $x \star b$. Donc on a $a = b$.
Puisque de plus y appartient à $(a \star u) \cap (a \star v)$, on a $u = v$.

Ainsi $x \star y$ est réduit à un seul élément.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE II-4.a. - <u>Tout demi-hypergroupe</u> H <u>simple à droite, simplifiable à droite et possédant un idéal à gauche maximal, est un groupe</u>.

En effet, il résulte du corollaire II-2.a que H est un hypergroupe. Le théorème II-4 entraîne alors que H est un groupe.

Remarque. - Je ne sais pas construire un demi-hypergroupe simplifiable d'un côté qui n'est pas un demi-groupe.

Rappellons maintenant quelques définitions et résultats relatifs aux éléments inversibles d'un côté au sens de LJAPIN ([7]).

Définition. - Un élément a d'un demi-groupe D est dit inversible à droite (resp. à gauche) au sens de Ljapin, si on a $D = aD$ (resp. $D = Da$).

Un élément inversible des deux côtés est dit inversible.

Nous notons I_d (resp. I_g) l'ensemble des éléments inversibles à droite (resp. à gauche) au sens de Ljapin.

Nous posons d'autre part, $I = I_d \cap I_g$.

On établit alors les résultats suivants ([2], [7]) :

- I_d, I_g, I s'ils ne sont pas vides sont des demi-groupes.
- I_d (resp. I_g) est vide ou est un complexe consistant à gauche (1) (resp. à droite) de D.
- I est vide ou est un sous-groupe de D dont l'unité est celle de D.

On peut maintenant généraliser aux demi-hypergroupes ces définitions.

Définitions. - Un élément a d'un demi-hypergroupe H est dit inversible à droite (resp. à gauche) au sens de Ljapin si on a $H = a \star H$ (resp. $H = H \star a$). Un élément inversible des deux côtés est dit inversible.

Nous notons I_d (resp. I_g) l'ensemble des éléments inversibles à droite (resp. à gauche) au sens de Ljapin. $I = I_d \cap I_g$.

LEMME II-5.a.

$x, y \in I_d$ (resp. I_g) $\Longrightarrow$ $(x \star y) \cap I_d \neq \emptyset$ (resp. $x \star y \cap I_g \neq \emptyset$).

On peut écrire, si x et y appartiennent à I_d :

$$H = x \star H = y \star H = x \star y \star H .$$

Donc il existe $u \in x \star y$ tel que $y \in u \star H$. On a :

$$H = y \star H = u \star H .$$

Donc $u \in I_d \cap (x \star y)$.

---

(1) Cela signifie que l'on a : $uv \in I_d \Longrightarrow u \in I_d$.

<u>Définition</u>. - Un complexe A de H est dit <u>consistant à gauche</u> (resp. à <u>droite</u>) si :

$$(x \star y) \cap A \neq \emptyset \implies x \in A \quad (\text{resp.} \quad (x \star y) \cap A \neq \emptyset \implies y \in A) .$$

LEMME II-5.b. - <u>Si</u> I_d <u>(resp.</u> I_g) <u>n'est pas vide, c'est un complexe consistant à gauche (resp. à droite) de</u> H .

LEMME II-5.c. - <u>Si</u> H <u>vérifie la condition</u> C_1' , <u>en particulier si</u> H <u>est simplifiable à droite, et si</u> I_g <u>n'est pas vide,</u> I_g <u>est un complexe consistant de</u> H <u>et on a</u> : $I_d \subseteq I_g$.

Ce résultat fort important découle de l'application du théorème I-2 au bi-hypertas $(H , \mathcal{L}' , \mathcal{R}')$. Nous allons maintenant, en supposant H simplifiable à droite, l'affiner.

LEMME II-5.d. - <u>Si</u> H <u>est simplifiable à droite, et si</u> I_g <u>n'est pas vide,</u> I_g <u>peut être muni d'une structure de demi-hypergroupe simplifiable à droite et simple à gauche, en posant</u> :

$$\forall \ x , y \in I_g , \qquad x \times y = (x \star y) \cap I_g .$$

<u>Tout élément de</u> I_d <u>est inversible à droite au sens de Ljapin dans</u> I_g .

Remarquons tout d'abord que si x et y appartiennent à I_g , $x \star y$ rencontre I_g . On peut donc poser :

$$x \times y = (x \star y) \cap I_g .$$

Soient x , y , z des éléments de I_g . Montrons que l'on a :

$$x \times (y \times z) = (x \times y) \times z .$$

Pour cela nous allons établir que l'on a :

$$x \times (y \times z) = (x \star y \star z) \cap I_g .$$

(On montre de même que $(x \times y) \times z = x \star y \star z \cap I_g$.)

Il est évident que l'on a :

$$x \times (y \times z) \subseteq (x \star y \star z) \cap I_g .$$

Soit alors $u \in (x \star y \star z) \cap I_g$. Il existe $v \in y \star z$, tel que $u \in (x \star v) \cap I_g$. I_g étant consistant, il en résulte $v \in I_g$ soit $v \in y \times z$, et $u \in x \times (y \times z)$.

En définitive I_g muni de la loi $\times$ est un demi-hypergroupe, évidemment simplifiable à droite.

Montrons que I_g est simple à gauche, c'est-à-dire ne possède pas d'idéal à gauche propre.

Soient x , y des éléments de I_g . Il existe $z \in H$ tel que x appartient à $z \star y$ (puisque $y \in I_g$). I_g étant consistant, z appartient à I_g , et on a : $x \in z \times y$.

Soit enfin $z \in I_d$. Montrons que z est inversible à droite au sens de Ljapin dans I_g .

Il est clair tout d'abord que z appartient à I_g (car $I_d \subseteq I_g$). Soit alors $x \in I_g$. Il existe $y \in H$ tel que x appartient à $z \star y$. I_g étant consistant, y appartient à I_g , et on a :

$$x \in z \times y .$$

LEMME II-5.e. - <u>Tout demi-hypergroupe simplifiable à droite, simple à gauche, possédant des éléments inversibles à droite au sens de Ljapin est un groupe</u>.

Soit K un tel demi-hypergroupe. Nous notons I_d l'ensemble de ses éléments inversibles à droite au sens de Ljapin $(I_d \neq \emptyset)$. Pour montrer que K est un groupe, il suffit d'établir que K est un hypergroupe (en vertu du théorème II-4).

Montrons tout d'abord que K possède une unité. Soit $x_0 \in K$. Il existe $e \in K$, tel que x_0 appartient à $e \star x_0$. En vertu de la simplifiabilité à droite de K , e <u>est unité à droite de</u> K .

Soit alors $a \in I_d$. Il existe $b \in K$ tel que x_0 appartient à $a \star b$. On peut écrire :

$$x_0 \in e \star x_0 \subseteq e \star a \star b .$$

Donc on a :

$$(a \star b) \cap (e \star a \star b) \neq \emptyset ,$$

donc aussi :

$$a \in e \star a .$$

Soit alors $y \in K$. Il existe aussi $f \in K$ tel que y appartient à $f \star y$. On montre alors par le même raisonnement que a appartient à $f \star a$. On a :

$$(e \star a) \cap (f \star a) \neq \emptyset .$$

Ceci entraîne $e = f$. e <u>est donc unité de</u> K .

Soit alors $x \in K$. Il existe x' unique, tel que $e \in x' \star x$. x' est noté

x^{-1}. On peut écrire :

$$x \in x \star e \subseteq x \star x^{-1} \star x .$$

Donc il existe $u \in x \star x^{-1}$, tel que l'on ait : $x \in u \star x$. Il est clair que $u = e$. Donc, on a :

$$\forall \quad x \in K , \qquad e \in (x \star x^{-1}) \cap (x^{-1} \star x) .$$

Soient alors x et y des éléments de K. On a :

$$e \in y \star y^{-1} \quad \text{et} \quad x \in e \star x \subseteq y \star y^{-1} \star x .$$

En d'autres termes, il existe $z \in K$ tel que : $x \in y \star z$.

K est donc également simple à droite ; c'est par suite un hypergroupe.

C. Q. F. D.

<u>Remarque</u>. – On montre de la même façon qu'un demi-groupe simplifiable à droite, simple à gauche, possédant des éléments inversibles à droite au sens de Ljapin, est un groupe.

THÉORÈME II-5.

a. <u>Si</u> H <u>est un demi-hypergroupe simplifiable d'un côté, et si</u> I_d <u>et</u> I_g <u>ne sont pas vides, on a</u> $I_d = I_g = I$.

<u>Muni de la loi</u> $\times$, I <u>est un groupe dont l'unité est unité à droite de</u> H, <u>et est un complexe consistant de</u> H.

b. <u>Soit</u> H <u>un demi-hypergroupe dont</u> H' <u>est un complexe consistant possédant les propriétés suivantes</u> :

- $H = H \star H' = H' \star H$.
- $\forall \quad x , y \in H' , \quad \exists \quad z , z' \in H : \quad x \in (y \star z) \cap (z' \star y)$.
- $\forall \quad x , y \in H' , \quad x * y \cap H' \neq \emptyset$.

Alors on a :

$$H' = I_d = I_g = I .$$

<u>Muni de la loi</u> $\times$ $(x \times y = x \star y \cap H')$, H' <u>est un hypergroupe</u>.

<u>Démonstration</u>. – Nous montrons la partie (a). La partie (b) est évidente.

En vertu des lemmes II-5.d et II-5.e, I_g muni de la loi $\times$ est un groupe. On a vu de plus que c'est un complexe consistant de H.

On vérifie aisément que son unité est unité à droite de H .

Montrons pour terminer que $I_d = I_g$.

Soient $x \in I_g$, $a \in I_d$. Il existe $y \in I_g$ tel que a appartient à $x \star y$. I_d étant consistant à gauche, on a donc $x \in I_d$.

C. Q. F. D.

On peut particulariser le théorème II-5 au cas où H est remplacé par un demi-groupe D .

THÉORÈME II-6.

a. <u>Si</u> D <u>est demi-groupe simplifiable d'un côté, et si</u> I_d <u>et</u> I_g <u>ne sont pas vides, on a</u> $I_d = I_g = I$. I <u>est un sous-groupe consistant de</u> D , <u>dont l'élément neutre est unité bilatère de</u> D .

b. <u>Si</u> D <u>est un demi-groupe avec élément unité bilatère</u> e , <u>dont</u> G <u>est un sous-groupe consistant, on a</u> $I_d = I_g = G$.

On peut comparer ce théorème au résultat de CLIFFORD-MILLER établissant qu'un demi-groupe possédant des éléments zéroïds à gauche et à droite est un homogroupe ([8]). Ici la condition d'être un idéal est remplacée par celle de consistance.

4. <u>Eléments grossissants.</u>

<u>Définition</u> (2). - Un élément x d'un demi-groupe D est dit <u>grossissant à gauche</u>, s'il existe un sous-demi-groupe propre M de D tel que $D = xM$.

On montre aisément ([2] , [7]) la proposition suivante :

PROPOSITION II-7. - <u>Tout élément grossissant à gauche de</u> D <u>est inversible à droite, mais non inversible à gauche</u>.

Il en résulte le corollaire ci-après.

COROLLAIRE II-7.a. - Tout demi-groupe vérifiant la condition C_1' et possédant une unité à droite, ne possède pas d'éléments grossissants à gauche. On peut généraliser de la façon suivante ce corollaire :

Soit M un sous-demi-groupe strict de D vérifiant la condition :

$$\forall \; x , y \in D , \quad m \in M : \quad xm = ym \implies Dx \cup \{x\} = Dy \cup \{y\} .$$

---

(2) Notre définition est différente de celle donnée par LJAPIN qui impose l'existence d'un <u>complexe</u> M strictement contenu dans D tel que $D = xM$.

Posons :

$$I_d(M) = \{x \in \mathbf{D} : D = xM\} .$$

On a la proposition suivante :

PROPOSITION II-8. - Si $I_d(M)$ n'est pas vide, I_g est vide.

On établit cette proposition en appliquant le théorème I-2 au bi-hypertas $(D , \mathcal{L}' , \mathcal{R}'_M)$ (inverse du bi-tas $(D , \mathcal{L} , \mathcal{R}_M)$) : Si $I_d(M)$ et I_g ne sont pas vides tous les deux, ce théorème entraîne l'inclusion $I_d(M) \subseteq I_g$, ce qui est absurde, en vertu de la proposition II-7.

III. Complexes W-minimaux.

1. Rappel ([4]) ; idéaux p-minimaux d'un demi-hypergroupe.

PROPOSITION III-1. - Soit $(E , \mathbb{O})$ un hypertas dont W est un idéal différent de E , mais éventuellement vide. Pour que W soit le résidu d'un complexe de E disjoint de W , il faut et il suffit que l'on ait : $W \cdot\!\!\cdot_{\mathbb{O}} \mathbb{O} = W$ [3]. Dans ce cas, W est dit fortement large.

Dans ce paragraphe 1, W est supposé implicitement fortement large, et est éventuellement vide, mais distinct de E .

Définition. - Un complexe A de E est dit W-minimal s'il est disjoint de W , admet W pour résidu et est minimal pour ces conditions. Nous notons $\mathcal{H}_W$, la famille des complexes W-minimaux de $(E , \mathbb{O})$.

Nous posons $E_W = E - W$. D'autre part, si θ appartient à $\mathbb{O}$, nous notons θ_W l'application, en général multivoque, définie sur E_W par :

$$\forall \ x \in E_W , \quad \theta_W(x) = \theta(x) \cap E_W .$$

Nous posons $\mathbb{O}_W = \{\theta_W\}_{\theta \in \mathbb{O}}$. On vérifie que $(E_W , \mathbb{O}_W)$ est un hypertas. On pose :

$$(E , \mathbb{O})_W = (E_W , \mathbb{O}_W) .$$

La proposition suivante ramène l'étude des complexes W-minimaux à celle des complexes nets minimaux (entreprise dans [4]).

---

[3] Rappelons que l'on pose : $W \cdot\!\!\cdot_{\mathbb{O}} \mathbb{O} = \{x \in E : \theta(x) \subseteq W , \ \forall \ \theta \in \mathbb{O}\}$.

PROPOSITION III-2. - *Les complexes disjoints de* W *et admettant* W *pour résidu sont les complexes de* E_W , *nets dans l'hypertas* $(E , \mathfrak{D})_W$.

Définition ([5]). - Un idéal $\mathfrak{J}$ de $(E , \mathfrak{D})$ qui rencontre E_W est dit W-*minimal* si on a :

$$\forall\ \alpha \subseteq E \text{ , idéal de } (E , \mathfrak{D}) : \quad \mathfrak{J} \cap W \subseteq \alpha \subset \mathfrak{J} \implies \alpha = \mathfrak{J} \cap W .$$

Le rapport qui existe entre cette notion et celle d'idéal minimal d'un hypertas est précisé par la proposition qui suit :

PROPOSITION III-3.

a. *Si* $\mathfrak{J}$ *est un idéal* W-*minimal de* $(E , \mathfrak{D})$, $\mathfrak{J} \cap E_W$ *est un idéal minimal de* $(E , \mathfrak{D})_W$, $\mathfrak{J} \cup W$ *est un idéal* W-*minimal de* $(E , \mathfrak{D})$.

b. *Si* $\mathcal{J}$ *est un idéal minimal de* $(E , \mathfrak{D})_W$, $\mathcal{J} \cup W$ *est un idéal* W-*minimal de* $(E , \mathfrak{D})$.

THÉORÈME III-4. - *Soit* $(E , \mathfrak{D})$ *un hypertas dont* W *est un idéal fortement large.*

a. *Pour que* $\mathcal{H}_W$ *soit non vide, il faut et il suffit que tout idéal de* $(E , \mathfrak{D})$ *rencontrant* E_W *contienne un idéal* W-*minimal. Le cardinal de tout complexe* W-*minimal de* $(E , \mathfrak{D})$ *est alors égal au cardinal de la famille des idéaux* W-*minimaux de* $(E , \mathfrak{D})$ *contenant* W . *De plus, tout complexe disjoint de* W *et admettant* W *pour résidu contient un complexe* W-*minimal*.

b. $\mathcal{H}_W$ *étant supposé non vide, soient* Σ_W *la réunion des complexes* W-*minimaux de* $(E , \mathfrak{D})$, R_W *la réunion des idéaux* W-*minimaux de* $(E , \mathfrak{D})$. *On a* :

$$R_W = \Sigma_W \cup W .$$

On peut appliquer ce théorème aux demi-groupes et aux demi-hypergroupes. Plus précisément H étant un demi-hypergroupe, D , un demi-groupe, si on l'applique à :

$(H , \mathfrak{L})$: on trouve des résultats sur les complexes W-minimaux à gauche de H ;
$(D , \mathfrak{L})$: on retrouve les résultats de P. LEFÈVRE [5] ;
$(D , \mathfrak{L} , \mathfrak{R})$: on retrouve ici encore des résultats de P. LEFÈVRE [5] ;
$(H , \mathfrak{L}')$ ou $(D , \mathfrak{L}')$: on trouve des résultats nouveaux, dont nous avons exposé une partie dans (1). Citons brièvement un résultat non donné dans [4].

Définitions. - Soit p un idéal à gauche de H , non vide. Un complexe A de H est dit p-*générateur à gauche* s'il est contenu dans p , et si on a $p = H \star A$. Un idéal à gauche α de H non vide est dit p-*maximal* s'il ne contient pas p , et si :

$$\forall\ \mathfrak{b}\ ,\ \text{idéal à gauche de } H\ ,\quad \alpha \subset \mathfrak{b} \subseteq \alpha \cup p \implies \mathfrak{b} = \alpha \cup p\ .$$

Nous convenons également que lorsque p est un idéal à gauche minimal, c'est aussi un idéal à gauche p-maximal.

La notion d'idéal à gauche p-maximal généralise clairement la notion d'idéal à gauche maximal.

Le résultat suivant découle du théorème III-4.

THÉORÈME III-5. - Soit H un demi-hypergroupe, dont p est un idéal à gauche, non vide et tel que $p = H \star p$.

Pour que H possède des complexes p-générateurs à gauche minimaux, il faut et il suffit que tout idéal à gauche de H , ne contenant pas p , soit contenu dans un idéal à gauche, p-maximal.

Le cardinal de tout complexe p-générateur à gauche minimal de H est égal au cardinal de la famille des idéaux à gauche, p-maximaux contenus dans p .

2. Utilisation des bi-hypertas.

Dans ce paragraphe, D est un demi-groupe dont W est un idéal bilatère éventuellement vide, mais distinct de D .

Nous savons définir les pseudo-tas $(D_W , \mathcal{R}_W)$ et $(D_W , \mathcal{L}_W)$. On vérifie facilement que $(D_W , \mathcal{R}_W , \mathcal{L}_W)$ est un bi-pseudo-tas ; on le note $(D , \mathcal{R} , \mathcal{L})_W$.

Définition. - W est dit :

- premier si $ab \in W$, $a \notin W \implies b \in W$.
- premier au sens de LESIEUR ([6]) si, $aDb \subseteq W$, $a \notin W \implies b \in W$.

PROPOSITION III-6. - Si W est premier, ou premier au sens de LESIEUR, l'hypertas $(D , \mathcal{R} , \mathcal{L})_W$ est régulier.

On montre, en utilisant la théorie des bi-hypertas, le théorème qui suit.

THÉORÈME III-7.

a. Si W est fortement large ([5]) à droite, et si D possède des complexes W-minimaux à droite, la réunion R_W des idéaux W-minimaux à droite de D est un idéal bilatère.

b. Si W est fortement large des deux côtés, et est premier, ou premier au sens de LESIEUR, si D possède des complexes W-minimaux à droite et des complexes W-minimaux à gauche, la réunion, R_W, des idéaux W-minimaux à droite coïncide avec la réunion, R'_W, des idéaux W-minimaux à gauche.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CLIFFORD (A. H.) and MILLER (D. D.). - Semi-groups having zeroïd elements, Amer. J. of Math., t. 70, 1948, p. 117-125.

[2] DESQ (Roger). - Eléments inversibles dans un demi-groupe D, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et Théorie des Nombres, t. 16, 1962/63, n° 4, 16 p.

[3] KOSKAS (Maurice). - Contribution à l'étude des groupoïdes, Demi-hypergroupes, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et Théorie des Nombres, t. 16, 1962/63, n° 9, 26 p.

[4] KOSKAS (Maurice). - Les hypertas, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et Théorie des Nombres, t. 16, 1962/63, n° 10, 42 p.

[5] LEFEBVRE (Pierre). - Sur certaines conditions minimales en théorie des demi-groupes, Annali di Mat., 4e série, t. 59, 1962, p. 77-163 (Thèse Sc. math. Paris, 1962).

[6] LESIEUR (L.) et CROISOT (R.). - Algèbre noethérienne non commutative. - Paris, Gauthier-Villars, 1963 (Mémorial des Sciences mathématiques, 154).

[7] LJAPIN (E. S.). - Polugrupp'. - Moskva, 1960.

[8] THIERRIN (Gabriel). - Contribution à la théorie des équivalences dans les demi-groupes, Bull. Soc. math. France, t. 83, 1955, p. 103-159 (Thèse Sc. math. Paris, 1954).