Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Pierre-Antoine Grillet

Sur la notion d'équivalence principale

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 17, nº 1 (1963-1964), exp. nº 2, p. 1-35
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1963-1964__17_1_A1_0>

SUR LA NOTION D'ÉQUIVALENCE PRINCIPALE

par Pierre-Antoine GRILLET

La notion d'équivalence principale a été introduite par P. DUBREIL [6]. Soit D un demi-groupe, c'est-à-dire un couple ordonné $(E , .)$, où E est un ensemble et $.$ une loi de composition interne associative notée multiplicativement ; si $H \in \mathfrak{P}(E)$, on appelle équivalence principale à gauche associée à H , et on note ${}_H\mathcal{R}$, la relation binaire sur E définie par

$$x \ {}_H\mathcal{R} \ y \iff ((\forall \ a \in E)(ax \in H \iff ay \in H))$$

qui est une relation d'équivalence. On définit dualement l'équivalence principale à droite associée à H , notée $\mathcal{R}_H$.

Ultérieurement, R. CROISOT [4] a étudié l'équivalence principale bilatère associée à H , $\mathcal{R}'_H$, définie par

$$x \ \mathcal{R}'_H \ y \iff ((\forall \ a , b \in E)(axb \in H \iff ayb \in H)) \quad (^1).$$

Il est remarquable que l'analogie visible entre les définitions de ${}_H\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'_H$ s'étende aux propriétés de ces équivalences et aux théorèmes d'homomorphisme que leur considération permet d'obtenir (voir [6], [3] et [4]).

Une telle situation appelait une théorie susceptible d'expliquer ces analogies et de démontrer en une seule fois les propriétés communes. Naturellement, tout ce bavardage indique que j'en ai une à vous proposer. On peut en dégager brièvement le point de départ en étudiant justement l'analogie entre ${}_H\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'_H$; on constate alors que la définition de ${}_H\mathcal{R}$ utilise la loi de composition de D par le seul intermédiaire des translations à gauche $x \rightsquigarrow ax$, tandis que celle de $\mathcal{R}'_H$ utilise la loi de composition de D par le seul intermédiaire des "translations bilatères" $x \rightsquigarrow axb$.

La famille des translations à gauche et celle des translations bilatères sont stables pour la composition des applications. On va donc se donner un ensemble E

---

(1) Cette équivalence a été considérée pour la première fois par R. S. PIERCE [8], qui a vu notamment sa compatibilité et la possibilité de l'utiliser dans des théorèmes d'homomorphisme ; mais c'est R. CROISOT qui l'a considérée comme équivalence principale et en a déduit des théorèmes analogues à ceux de P. DUBREIL [6].

et un ensemble (non vide) Σ d'applications de E dans E, stable pour la composition des applications; j'appelle tas un tel couple (E, Σ). Si $H \in \mathfrak{P}(E)$, l'équivalence principale associée à H dans le tas (E, Σ) est la relation binaire $\mathcal{P}_H$ sur E définie par

$$x \mathcal{P}_H y \iff ((\forall \sigma \in \Sigma)(\sigma x \in H \iff \sigma y \in H))$$

qui est une relation d'équivalence. (La notation σx, au lieu de $\sigma(x)$, est destinée à mettre en lumière l'analogie de la théorie des tas avec celle des demi-groupes ; on notera de même $\sigma\tau$ au lieu de $\sigma \circ \tau$, lorsque $\sigma, \tau \in \Sigma$.)

Dans un tas, les équivalences principales possèdent des propriétés élémentaires analogues à celles de ${}_H\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'_H$; et on peut, avec des définitions adéquates, prouver qu'elles sont compatibles et obtenir des théorèmes d'homomorphisme analogues à ceux de P. DUBREIL et R. CROISOT, où, étant donné un homomorphisme, on démontre que l'image a une certaine propriété si et seulement si l'équivalence d'homomorphisme est principale pour une partie vérifiant certaines conditions. Ces théorèmes, appliqués aux divers tas que l'on peut associer à un demi-groupe, donnent des théorèmes de théorie des demi-groupes ; on obtient ainsi les théorèmes classiques, et un certain nombre d'énoncés nouveaux. On obtient aussi des énoncés inédits de théorie des groupoïdes, en associant à un groupoïde des tas bien choisis ; l'introduction des tas permet donc de supprimer l'hypothèse d'associativité.

Si on ne suppose plus Σ stable, les équivalences principales ne sont plus nécessairement compatibles ; on ne peut donc obtenir de théorèmes d'homomorphisme sans cette hypothèse. Par contre les propriétés élémentaires des équivalences principales subsistent. On peut même obtenir ces propriétés en définissant $\mathcal{P}_H$ comme ci-dessus à partir d'un ensemble non vide Σ d'applications de E dans F ; on prend alors $H \in \mathfrak{P}(F)$, et $\mathcal{P}_H$ est une équivalence sur E. J'appelle système un triple (E, F, Σ) ; cette notion figure ici parce qu'elle semble bien représenter le cadre le plus général où apparaissent des équivalences principales (sauf, bien sûr, emploi d'applications multiformes), et aussi parce que son emploi se révèlera très naturel dans la théorie des tas.

La théorie précédente fait l'objet d'une Thèse de Doctorat en voie de soutenance, et cet exposé en présente les définitions essentielles et quelques résultats. On a choisi ces résultats parce qu'ils font intervenir la condition "stationnaire", nouvelle dans ces questions. On trouvera dans la Thèse une exposition plus approfondie des sujets abordés ici.

Ces sujets sont répartis en cinq sections ; la section A traite des tas, des homomorphismes de tas et des divers tas associés à un groupoïde ; la section B , des propriétés élémentaires des équivalences principales dans un système et dans un tas ; la section C , du comportement par homomorphisme des équivalences principales et des notions associées ; la section D établit deux théorèmes d'homomorphisme de théorie des tas ; la section E en déduit des théorèmes de théorie des groupoïdes ou des demi-groupes, après étude, dans un groupoïde, des diverses conditions introduites par la théorie des tas. Les énoncés sont numérotés à l'intérieur de chaque section.

A. Catégorie des tas.

Si E est un ensemble, on note $\mathfrak{A}(E)$ l'ensemble des applications de E dans E , et I_E l'application identique de E .

1. Définition des tas.

DÉFINITION 1. - On appelle tas tout couple (E , Σ) d'ensembles non vides tels que $\Sigma \subseteq \mathfrak{A}(E)$ et que Σ soit stable (pour la composition des applications). E s'appelle le support du tas, et les éléments de Σ les multiplicateurs du tas.

Si $E \neq \emptyset$, $(E , \mathfrak{A}(E))$ est un tas de support E , qu'on appelle tas universel sur E . On a vu d'autres exemples dans l'introduction, et on les reverra au § 5 ; mais auparavant il faut structurer la classe des tas en catégorie, ce qui requiert les définitions suivantes.

2. Application associée à une surjection [2].

Soit f une surjection de E vers F .

PROPOSITION 1. - Soit $\sigma \in \mathfrak{A}(E)$; pour qu'il existe $\tau \in \mathfrak{A}(F)$ tel que $f \circ \sigma = \tau \circ f$, il faut et il suffit que

$$(\forall\ x , y \in E) \qquad (f(x) = f(y) \implies f(\sigma x) = f(\sigma y))$$

et τ est alors unique.

---

[2] Les définitions et propriétés de ce paragraphe sont une mise sous la forme qui nous sera la plus commode par la suite de propriétés triviales de théorie des ensembles ; toute référence à la littérature qui me sera communiquée à ce sujet sera la bienvenue.

La condition est évidemment nécessaire. Si elle est remplie, il existe $\tau \in \mathfrak{A}(f(E))$ qui, à $f(x)$, fait correspondre $f(\sigma x)$; f étant surjective, $\tau \in \mathfrak{A}(F)$ et la condition est suffisante, puisque $f \circ \sigma = \tau \circ f$; f étant surjective, τ est unique, car

$$\tau \circ f = \tau' \circ f \implies \tau = \tau' .$$

DÉFINITION 2. – On appelle <u>application associée</u> [3] <u>à</u> f l'application incomplète de $\mathfrak{A}(E)$ vers $\mathfrak{A}(F)$ φ, telle que $\varphi(\sigma)$ soit définie si et seulement si σ vérifie la condition de la proposition 1, et que $\varphi(\sigma)$ soit alors l'unique $\tau \in \mathfrak{A}(F)$ tel que $f \circ \sigma = \tau \circ f$.

La notion ainsi introduite possède les propriétés suivantes, avec les mêmes notations :

PROPOSITION 2. – $\varphi(I_E)$ est défini et $\varphi(I_E) = I_F$; si $\varphi(\sigma)$ et $\varphi(\sigma')$ sont définis, $\varphi(\sigma\sigma')$ est défini et $\varphi(\sigma\sigma') = \varphi(\sigma)\, \varphi(\sigma')$.

PROPOSITION 3. – Soient f une surjection de E vers F, g une surjection de F vers G, φ (resp. ψ) l'application associée à f (resp. g) ; alors l'application associée à $g \circ f$ prolonge $\psi \circ \varphi$.

PROPOSITION 4.

a. Si f est bijective, φ est partout définie et bijective, et φ^{-1} est l'application associée à f^{-1}.

b. L'application associée à I_E est $I_{\mathfrak{A}(E)}$.

Ces propositions se démontrent sans peine en utilisant, par exemple, les propriétés des diagrammes commutatifs ; par exemple, la seconde assertion de la proposition 2 résulte de la commutativité du diagramme :

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "\sigma'"] \arrow[d, "f"'] & E \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "f"'] & E \arrow[d, "f"'] \\
F \arrow[r, "\varphi(\sigma')"'] & F \arrow[r, "\varphi(\sigma)"'] & F
\end{tikzcd}$$

---

[3] Le mot "associé" est employé dans toute la suite pour traduire le passage d'un ou plusieurs ensembles E, ... aux ensembles d'applications $\mathfrak{A}(E)$, ...

3. Catégorie des tas.

DÉFINITION 3. - Etant donnés deux tas $\mathcal{T} = (E , \Sigma)$, $\mathcal{T}' = (E' , \Sigma')$, on appelle homomorphisme de $\mathcal{T}$ sur $\mathcal{T}'$ toute surjection f de E vers E' telle que, si φ est l'application associée à f , φ soit définie sur Σ et $\varphi(\Sigma) = \Sigma'$.

La restriction de φ à Σ est alors un homomorphisme (de demi-groupes) de Σ sur Σ' (proposition 2), qu'on appellera homomorphisme associé à f .

PROPOSITION 5. - Avec les notations de la définition 3, une surjection f de E vers E' est un homomorphisme de $\mathcal{T}$ sur $\mathcal{T}'$ si et seulement s'il existe une surjection φ de Σ vers Σ' telle que

$$(\forall\ x \in E)\quad (\forall\ \sigma \in \Sigma)\qquad f(\sigma x) = \varphi(\sigma)\ f(x) .$$

La condition est nécessaire d'après la définition 3. Réciproquement, si elle est remplie, l'application associée à f est définie sur Σ , et sa restriction à Σ coïncide avec φ (proposition 1), donc elle envoie Σ sur Σ' .

Les propriétés de l'application associée donnent immédiatement des propriétés des homomorphismes de tas.

PROPOSITION 6. - Si $\mathcal{T} = (E , \Sigma)$ est un tas, I_E est un homomorphisme de $\mathcal{T}$ sur $\mathcal{T}$.

Ceci résulte de la proposition 4 (b).

PROPOSITION 7. - Si $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}'$, $\mathcal{T}''$ sont trois tas, f un homomorphisme de $\mathcal{T}$ sur $\mathcal{T}'$ et g un homomorphisme de $\mathcal{T}'$ sur $\mathcal{T}''$, $g \circ f$ est un homomorphisme de $\mathcal{T}$ sur $\mathcal{T}''$.

Ceci résulte de la proposition 3.

PROPOSITION 8. - Les tas et les homomorphismes de tas sont respectivement les objets et les morphismes d'une catégorie, désignée par catégorie des tas [4].

Ceci résulte des propositions 6 et 7.

PROPOSITION 9. - Si $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ sont deux tas et f un homomorphisme bijectif de $\mathcal{T}$ sur $\mathcal{T}'$, f^{-1} est un homomorphisme de $\mathcal{T}'$ sur $\mathcal{T}$.

---

(4) Les catégories ne servent dans cet exposé que pour l'exhibition de quelques foncteurs, en sorte que l'introduction des univers est inutile.

Ceci résulte de la proposition 4 (a). On dit que f est un isomorphisme, etc.

4. Théorème d'homomorphisme.

LEMME 1. (Transfert par surjection). - Soient $\mathcal{T} = (E , \Sigma)$ un tas et f une surjection de E vers F ; pour qu'il existe un tas $\mathcal{T}'$ de support F tel que f soit un homomorphisme de $\mathcal{T}$ sur $\mathcal{T}'$, il faut et il suffit que l'application associée à f soit définie sur Σ, et $\mathcal{T}'$ est alors unique.

On épargnera au lecteur l'injure d'une démonstration.

DÉFINITION 4. - Si $\mathcal{T} = (E , \Sigma)$ est un tas, une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur E est dite compatible si et seulement si c'est l'équivalence d'un homomorphisme partant de $\mathcal{T}$.

PROPOSITION 10. - Si $\mathcal{T} = (E , \Sigma)$ est un tas, une équivalence $\mathcal{R}$ sur E est compatible si et seulement si

$$(\forall\ x , y \in E) \quad (\forall\ \sigma \in \Sigma) \qquad (x \mathcal{R} y \Longrightarrow \sigma x \mathcal{R} \sigma y) .$$

Soit f un homomorphisme partant de $\mathcal{T}$; l'application associée à f est définie sur Σ, donc tout élément de Σ vérifie la condition de la proposition 1, et la condition ci-dessus est vérifiée par l'équivalence d'homomorphisme.

Réciproquement, soit une équivalence $\mathcal{R}$ sur E vérifiant cette condition, il existe un ensemble F ($E/\mathcal{R}$ par exemple) et une surjection f de E vers F, telle que $f(x) = f(y) \iff x \mathcal{R} y$; d'après l'hypothèse faite sur $\mathcal{R}$, tout élément de Σ vérifie la condition de la proposition 1, en sorte que l'application associée à f est définie sur Σ ; il existe donc un tas $\mathcal{T}'$ de support F tel que f soit un homomorphisme de $\mathcal{T}$ sur $\mathcal{T}'$, donc $\mathcal{R}$ est compatible.

THÉORÈME 1. - Soient $\mathcal{T}, \mathcal{T}', \mathcal{T}''$ trois tas, f un homomorphisme de $\mathcal{T}$ sur $\mathcal{T}'$, et g un homomorphisme de $\mathcal{T}$ sur $\mathcal{T}''$; si f et g ont même équivalence d'homomorphisme, il existe un isomorphisme h unique de $\mathcal{T}'$ sur $\mathcal{T}''$ tel que $g = h \circ f$.

Posons $\mathcal{T} = (E , \Sigma)$, $\mathcal{T}' = (E' , \Sigma')$, $\mathcal{T}'' = (E'' , \Sigma'')$; d'après un résultat connu de théorie des ensembles, il existe une bijection h unique de E' vers E'' telle que $g = h \circ f$. L'application associée à h étant définie sur Σ' (proposition 4 (a)), il existe un tas de support E'', soit $\mathcal{T}'''$, tel que h soit un homomorphisme de $\mathcal{T}'$ sur $\mathcal{T}'''$ (lemme 1) ; g est alors un homomorphisme de $\mathcal{T}$ sur $\mathcal{T}'''$ (proposition 7), et il en résulte que $\mathcal{T}'' = \mathcal{T}'''$ (lemme 1) ; h est donc un homomorphisme, et par suite un isomorphisme, de $\mathcal{T}'$ sur $\mathcal{T}''$. L'unicité de h résulte de la théorie des ensembles.

5. Equivalence de l'homomorphisme associé.

DÉFINITION 5. - Si $\mathcal{T} = (E , \Sigma)$ est un tas et $\mathcal{R}$ une équivalence sur E , on appelle équivalence associée à $\mathcal{R}$ la relation binaire ρ sur Σ définie par

$$\sigma \rho \tau \iff (\forall \ x \in E) \quad \sigma x \ \mathcal{R} \ \tau x$$

qui est une relation d'équivalence.

PROPOSITION 11. - Si f est un homomorphisme de tas de $\mathcal{T} = (E , \Sigma)$ sur $\mathcal{T}'$, l'équivalence de l'homomorphisme associé φ est associée à l'équivalence de l'homomorphisme f .

En effet soient $\sigma , \tau \in \Sigma$:

$$\begin{aligned}\varphi(\sigma) = \varphi(\tau) &\iff (\forall \ x \in E) \quad \varphi(\sigma)\ f(x) = \varphi(\tau)\ f(x) \\ &\iff (\forall \ x \in E) \quad f(\sigma x) = f(\tau x) \\ &\iff \sigma \rho \tau .\end{aligned}$$

6. Tas canoniques d'un groupoïde.

Soit G un groupoïde, considéré comme couple ordonné $(E , \top)$ d'un ensemble (non vide) E et d'une loi de composition interne notée $\top$.

DÉFINITION 6. - Si $a \in E$, on appelle translation à gauche (resp. à droite) associée à a l'application $\gamma_a \in \mathfrak{A}(E)$ (resp. δ_a) définie par

$$(\forall \ x \in E) \qquad \gamma_a x = a \top x \quad (\text{resp. } \delta_a x = x \top a) .$$

On exhibe les tas canoniques à partir des translations en définissant leurs multiplicateurs.

DÉFINITION 7. - On appelle $\Sigma_g(G)$ l'ensemble des produits finis de translations à gauche, $\Sigma_d(G)$ l'ensemble des produits finis de translations à droite, $\Sigma_b(G)$ l'ensemble des produits finis de translations à gauche ou à droite (5), et $\Sigma_m(G)$ l'ensemble des produits finis de translations à gauche ou à droite faisant intervenir effectivement au moins une translation à gauche et au moins une translation à droite.

---

(5) $\Sigma_g(G)$, $\Sigma_d(G)$, $\Sigma_b(G)$ sont considérés par R. H. BRUCK [1] sous le nom de "multiplication semigroups" de G .

PROPOSITION 12. - $\Sigma_c(G)$ est stable pour $c = g , d , m , b$.

PROPOSITION 13. - $\Sigma_m(G)$ est idéal bilatère de $\Sigma_b(G)$; et

$$\Sigma_b(G) = \Sigma_g(G) \cup \Sigma_d(G) \cup \Sigma_m(G) .$$

Ceci résulte immédiatement de la définition 7.

DÉFINITION 8. - Si $c = g , d , m , b$, on pose $G_c = (E , \Sigma_c(G))$; les quatre tas ainsi définis sont appelés les tas canoniques de G.

Si G est un demi-groupe, on l'appelle D et on le note multiplicativement ; la définition des tas canoniques se simplifie alors quelque peu :

PROPOSITION 14. - Si D est un demi-groupe, $\Sigma_g(D)$ est l'ensemble des translations à gauche, $\Sigma_d(D)$ est l'ensemble des translations à droite, ces deux ensembles commutent élément par élément et

$$\Sigma_m(D) = \Sigma_g(D)\ \Sigma_d(D) = \Sigma_d(D)\ \Sigma_g(D) .$$

Ceci résulte de l'associativité.

Dans le cas général, G_g et G_d sont des notions duales, G_m et G_b des notions ipsoduales.

7. Propriété fonctorielle des tas canoniques d'un groupoïde.

THÉORÈME 2. - Si $G = (E , \top)$, $G' = (E' , \top')$ sont deux groupoïdes, f un homomorphisme de G sur G' et $c = g , d , m$ ou b , f est un homomorphisme de G_c sur G'_c.

Soit φ l'application associée à f. On suppose f telle que $(\forall\ a , b \in E)$ $f(a \top b) = f(a) \top' f(b)$; il en résulte que

$$(\forall\ a , b \in E) \qquad f \circ \gamma_a = \gamma_{f(a)} \circ f , \qquad f \circ \delta_b = \delta_{f(b)} \circ f$$

et que l'application associée à f est définie sur l'ensemble des translations à gauche où à droite de G et l'envoie sur celui des translations à gauche ou à droite de G', conformément aux formules $\varphi(\gamma_a) = \gamma_{f(a)}$, $\varphi(\delta_b) = \delta_{f(b)}$. Par suite φ est définie sur $\Sigma_b(G)$ (proposition 2) ; donc sur $\Sigma_c(G) \subseteq \Sigma_b(G)$; comme φ laisse invariante la nature (= à gauche ou à droite) des translations, et transforme les produits en produits (proposition 2), φ envoie les produits de translations à gauche sur les produits de translations à gauche, etc., c'est-à-dire que $\varphi(\Sigma_c(G)) = \Sigma_c(G')$; et f est un homomorphisme de G_c sur G'_c.

Ce théorème exprime que l'on obtient un foncteur (covariant) de la catégorie des groupoïdes vers celle des tas, en associant à tout groupoïde G le tas G_c, et à tout homomorphisme de groupoïdes f l'homomorphisme de tas f (la catégorie des groupoïdes considérée ici a pour objets les groupoïdes et pour morphismes les homomorphismes surjectifs).

Les foncteurs g, d, m, b seront dans la suite appelés côtés.

8. Notions latérales dans un groupoïde.

On considère ici une définition sur une catégorie comme une façon de faire correspondre, à tout objet O de la catégorie, une classe d'êtres mathématiques $\mathcal{D}(O)$ (ceux qui "vérifient" la définition $\mathcal{D}$). On emploiera aussi le mot "notion" dans ce sens.

DÉFINITION 9. – Une définition $\mathcal{D}$ sur la catégorie des groupoïdes est dite latérale s'il existe un côté c tel que $G_c = G'_c \Longrightarrow \mathcal{D}(G) = \mathcal{D}(G')$. On dit aussi que $\mathcal{D}$ est de côté c.

Une façon d'obtenir des définitions latérales :

PROPOSITION 15. – Si $\mathcal{D}$ est une définition sur la catégorie des tas, la définition $\mathcal{D}_c$ sur la catégorie des groupoïdes définie par $\mathcal{D}_c(G) = \mathcal{D}(G_c)$ est une définition latérale, de côté c.

Convention de langage. – La définition $\mathcal{D}_c$ sera baptisée du nom de la définition $\mathcal{D}$, suivi de la lettre c entre parenthèses.

Les trois exemples suivants seront utiles dans la suite. Si $\mathcal{T} = (E, \Sigma)$ est un tas, une équivalence $\mathcal{R}$ sur E est compatible si et seulement si (proposition 10) :

$$(\forall\ x, y \in E)\quad (\forall\ \sigma \in \Sigma)\qquad (x \mathcal{R} y \Longrightarrow \sigma x \mathcal{R} \sigma y)\ ;$$

(ici $\mathcal{D}(\mathcal{T})$ est l'ensemble des équivalences compatibles de $\mathcal{T}$). Si G est un groupoïde, de support E, une équivalence $\mathcal{R}$ sur E est donc compatible(c) si et seulement si elle est compatible dans G_c.

PROPOSITION 16. – Les notions suivantes coïncident pour toute équivalence $\mathcal{R}$ sur le support d'un groupoïde :

compatible(g) et compatible à gauche ,
compatible(d) et compatible à droite ,
compatible(b) et compatible .

Ces assertions sont immédiates, si l'on remarque que l'ensemble des $\sigma \in \mathfrak{M}(E)$ qui, pour une équivalence $\mathcal{R}$ donnée, vérifient l'implication ci-dessus, est stable ; on obtient donc une implication équivalente en remplaçant Σ par un système de générateurs.

Le procédé est le même pour les deux exemples suivants.

DÉFINITION 10. - Si $\mathcal{T} = (E , \Sigma)$ est un tas, une équivalence $\mathcal{R}$ sur E est dite <u>simplifiable</u> si et seulement si

$$(\forall\ x , y \in E) \quad (\forall\ \sigma \in \Sigma) \qquad (\sigma x \,\mathcal{R}\, \sigma y \implies x \,\mathcal{R}\, y) \ .$$

PROPOSITION 17. - Les notions suivantes coïncident pour toute équivalence sur le support d'un groupoïde :

simplifiable(g) et simplifiable à gauche,
simplifiable(d) et simplifiable à droite,
simplifiable(b) et simplifiable (des deux côtés).

DÉFINITION 11. - Si $\mathcal{T} = (E , \Sigma)$ est un tas, une partie A de E est dite **un** <u>idéal</u> si et seulement si

$$(\forall\ \sigma \in \Sigma) \qquad (x \in A \implies \sigma x \in A) \ .$$

autrement dit, si A est permise pour tous les $\sigma \in \Sigma$.

PROPOSITION 18. - Les notions suivantes coïncident pour toute partie du support d'un groupoïde :

idéal(g) et idéal à gauche,
idéal(d) et idéal à droite,
idéal(b) et idéal bilatère.

Nous sommes naturellement enclins à attacher un adjectif à chaque côté ; "gauche" est attaché à g , "droite" à d ; l'attribution de l'adjectif "bilatère" soulève plus de difficultés, car les notions "bilatères" de l'introduction dépendent de m , alors que dans les exemples précédentes elles dépendent de b . Ceci nous conduit à faire un choix ; le mien est d'attacher "bilatère" à b , l'adjectif attaché à m étant "médian". Ceci m'obligera à rebaptiser en conséquence les notions dues à R. CROISOT [4], ou à y faire figurer le mot "bilatère" entre guillements.

B. Propriétés élémentaires des équivalences principales.

1. Equivalence principale dans un système.

DÉFINITION 1. – On appelle système le triple (E, F, Σ) de trois ensembles non vides, les éléments de Σ étant des applications de E vers F.

Par exemple :

DÉFINITION 2. – Si $\mathcal{T} = (E, \Sigma)$ est un tas, on appelle système naturel de $\mathcal{T}$ le système $\mathcal{T}_n = (E, E, \Sigma)$.

On définit dans un système les équivalences principales par la

DÉFINITION 3. – Etant donnés un système $\mathbb{S} = (E, F, \Sigma)$ et une partie H de F, on appelle équivalence principale définie par H, et on note $\mathcal{P}_H(\mathbb{S})$, ou $\mathcal{P}_H$ si aucune confusion n'est à craindre, la relation binaire sur E définie par

$$(\forall\ x, y \in E)\quad (x\, \mathcal{P}_H\, y \iff ((\forall\ f \in \Sigma)\quad (f(x) \in H \iff f(y) \in H)))$$

qui est une relation d'équivalence.

On peut aussi définir $\mathcal{P}_H$ à partir des résiduels, ou quotients, de H :

DÉFINITION 4. – Etant donnés un système (E, F, Σ), $H \in \mathfrak{P}(F)$, $a \in E$ et $g \in \Sigma$, on pose

$$H \,{}^{\bullet}\!\!.\; a = \{f \in \Sigma\ ;\ f(a) \in H\}$$

$$H \,.^{\bullet}\; g = \{x \in E\ ;\ g(x) \in H\} = g^{-1}(H).$$

PROPOSITION 1. – Etant donnés un système (E, F, Σ) et $H \in \mathfrak{P}(F)$,

$$(\forall\ x, y \in E)\quad (x\, \mathcal{P}_H\, y \iff H \,{}^{\bullet}\!\!.\; x = H \,{}^{\bullet}\!\!.\; y).$$

2. Résidu ; parties nettes ou franches.

On se donne un système $\mathbb{S} = (E, F, \Sigma)$ et $H \in \mathfrak{P}(F)$.

DÉFINITION 5. – On appelle résidu de H, et on note W_H, la partie de E définie par

$$W_H = \{x \in E\ ;\ H \,{}^{\bullet}\!\!.\; x = \emptyset\}.$$

PROPOSITION 2. – W_H, s'il n'est pas vide, est classe pour $\mathcal{P}_H$.

DÉFINITION 6. – H est dite <u>nette</u> si et seulement si $W_H = \emptyset$, c'est-à-dire si et seulement si

$$(\forall\ x \in E)\quad (\exists\ f \in \Sigma)\qquad f(x) \in H\ .$$

On définit de même une partie franche :

DÉFINITION 7. – H est dite <u>franche</u> si et seulement si

$$(\forall\ f \in \Sigma)\quad (\exists\ x \in E)\qquad f(x) \in H\ .$$

La notion de partie franche peut être introduite à partir d'un autre résidu dont nous ne ferons pas usage ici.

On notera qu'<u>une partie nette ou franche est toujours non vide.</u>

3. Parties fortes.

On se donne un système $\mathbb{S} = (E\ ,\ F\ ,\ \Sigma)$ et $H \in \mathfrak{P}(F)$.

DÉFINITION 8. – H est dite <u>forte</u> si et seulement si

$$(\forall\ x\ ,\ y \in E)\quad (\forall\ f\ ,\ g \in \Sigma)\quad (f(x) \in H\ ,\ g(x) \in H\ ,\ f(y) \in H \implies g(y) \in H)\ .$$

PROPOSITION 3. – H est forte si et seulement si

$$(\forall\ x\ ,\ y \in E)\qquad (H \,^{\bullet}\!\!\cdot\, x \text{ rencontre } H \,^{\bullet}\!\!\cdot\, y \implies H \,^{\bullet}\!\!\cdot\, x = H \,^{\bullet}\!\!\cdot\, y)$$

si et seulement si

$$(\forall\ f\ ,\ g \in \Sigma)\qquad (H \cdot^{\bullet} f \text{ rencontre } H \cdot^{\bullet} g \implies H \cdot^{\bullet} f = H \cdot^{\bullet} g)\ .$$

Ceci résulte immédiatement de la définition.

PROPOSITION 4. – Si H est forte, les classes pour $\wp_H$ sont les parties non vides de la forme W_H ou $H \cdot^{\bullet} f$ $(f \in \Sigma)$.

D'après la définition de W_H, les parties de la forme W_H ou $H \cdot^{\bullet} f$ forment un recouvrement de E ; il suffit alors de montrer que toutes ces parties sont indivisibles et saturées. Pour W_H, cela résulte de la proposition 2. Soit alors $f \in \Sigma$; $H \cdot^{\bullet} f$ est saturée car $f(x) \in H\ ,\ x \wp_H y \implies f(y) \in H$ par définition de $\wp_H$; $H \cdot^{\bullet} f$ est indivisible car, H étant forte,

$$x\ ,\ y \in H \cdot^{\bullet} f \implies H \,^{\bullet}\!\!\cdot\, x \text{ rencontre } H \,^{\bullet}\!\!\cdot\, y \implies x \wp_H y$$

(propositions 1 et 3).

4. Systèmes et tas.

Les définitions et propriétés précédentes s'appliquent à un tas en considérant des systèmes adéquats. Il y a déjà le système naturel (définition 2).

DÉFINITION 9. - Etant donné un tas $\mathcal{T} = (E , \Sigma)$, on appelle système médian de $\mathcal{T}$, et on note $\mathcal{T}_m$, le système $(\Sigma , E , \Sigma_m(\mathcal{T}))$, où $\Sigma_m(\mathcal{T})$ est l'ensemble des applications $\tau \rightsquigarrow \sigma\tau x$ de Σ vers E quand $(\sigma , x) \in \Sigma \times E$.

On note l'analogie de cette construction avec celle qui définit D_m à partir d'un demi-groupe D (proposition A, 14) ; chassez le naturel. Les systèmes jouent ici vis-à-vis des tas le rôle que l'on a fait jouer aux tas vis-à-vis des groupoïdes au § A, 8 ; une définition $\mathcal{D}$ de théorie des systèmes donne aussitôt deux définitions $\mathcal{D}_n$ et $\mathcal{D}_m$ sur la catégorie des tas.

Convention de langage. - La définition $\mathcal{D}_n$ est baptisée du même nom que la définition $\mathcal{D}$; la définition $\mathcal{D}_m$ est baptisée du nom de la définition $\mathcal{D}$ précédé de m - . Par exception, on note π_H pour $\mathcal{P}_H(\mathcal{T}_m)$. Si $\mathcal{T} = (E , \Sigma)$, on note ~~aussi~~ $\mathcal{P}_H(\Sigma)$ pour $\mathcal{P}_H(\mathcal{T}_n)$.

PROPOSITION 5. - π_H est l'équivalence associée à $\mathcal{P}_H$.

Soient ρ l'équivalence associée à $\mathcal{P}_H$, et $\sigma , \tau \in \Sigma$. On sait (définition A, 5) que

$$\sigma \rho \tau \iff (\forall\ x \in E) \quad \sigma x\ \mathcal{P}_H\ \tau x$$

Par suite

$$\sigma \rho \tau \iff (\forall\ x \in E) \ (\forall\ \upsilon \in \Sigma) \quad (\upsilon\sigma x \in H \iff \upsilon\tau x \in H)$$

$$\sigma \rho \tau \iff \sigma\ \pi_H\ \tau .$$

5. Résidu et conditions de netteté ou de force dans un tas.

Soient $\mathcal{T} = (E , \Sigma)$ un tas et $H \in \mathfrak{P}(E)$.

Le résidu de H dans le système $\mathcal{T}_n$ est encore noté W_H , et appelé résidu. On ne fera pas usage du résidu de H dans $\mathcal{T}_m$.

PROPOSITION 6. - W_H est un idéal.

Soient en effet $x \in E$ et $\sigma \in \Sigma$; $x \in W_H \Longrightarrow \sigma x \in W_H$ car

$$\sigma x \notin W_H \Longrightarrow (\exists\ \tau \in \Sigma) \quad \tau\sigma x \in H \Longrightarrow x \notin W_H .$$

PROPOSITION 7. - Le sous-ensemble H est

net si et seulement si $(\forall\ x \in E)\ (\exists\ \sigma \in \Sigma)\quad \sigma x \in H$

franc si et seulement si $(\forall\ \sigma \in \Sigma)\ (\exists\ x \in E)\quad \sigma x \in H$

m-net si et seulement si $(\forall\ \tau \in \Sigma)\ (\exists\ \sigma \in \Sigma)\ (\exists\ x \in E)\quad \sigma\tau x \in H$

m-franc si et seulement si $(\forall\ \sigma \in \Sigma)\ (\forall\ x \in E)\ (\forall\ \tau \in \Sigma)\quad \sigma\tau x \in H$.

Ceci résulte immédiatement des définitions 6, 7 et 2, 9, et de la convention de langage du § 4 .

PROPOSITION 8. – Pour tout sous-ensemble H de E :

$$\begin{tikzcd}
 & \text{net} \arrow[dr, Rightarrow] & \\
\text{m-franc} \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & \text{m-net} \\
 & \text{franc} \arrow[ur, Rightarrow] &
\end{tikzcd}$$

Ceci résulte de la proposition 7.

PROPOSITION 9. – H est m-franc si et seulement si $H \mathbin{.^{\bullet}} \sigma$ est net pour tout $\sigma \in \Sigma$.

Ceci résulte de la proposition 7.

PROPOSITION 10. – Si H est franc, $H \mathbin{.^{\bullet}} \sigma$ est franc pour tout $\sigma \in \Sigma$.

Soit $\sigma \in \Sigma$; $(\forall\ \tau \in \Sigma)\ (\exists\ x \in E)\ (\sigma\tau)\, x \in H$; ceci exprime que $H \mathbin{.^{\bullet}} \sigma$ est franc.

Pour les conditions de force, on a la

PROPOSITION 11. – H est

– fort si et seulement si

$$(\forall\ x , y \in E)\ (\forall\ \sigma , \tau \in \Sigma)\quad (\sigma x \in H ,\ \sigma y \in H ,\ \tau x \in H \Longrightarrow \tau y \in H)$$

– m-fort si et seulement si

$$(\forall\ x , y \in E)\ (\forall\ \rho , \sigma , \tau , \upsilon \in \Sigma)\quad (\rho\sigma x \in H ,\ \upsilon\sigma y \in H ,\ \rho\tau x \in H \Longrightarrow \upsilon\tau y \in H).$$

Ceci résulte immédiatement des définitions 8 et 2, 9, et de la convention de langage du § 4.

PROPOSITION 12. – Si H est fort, les classes pour $\wp_H$ sont les parties non vides de la forme W_H ou $H \mathbin{.^{\bullet}} \sigma$ $(\sigma \in \Sigma)$.

Ceci résulte de la proposition 4.

Enfin si $x \in E$, on dira par abus de langage, que x est net si $\{x\}$ est un sous-ensemble net, et de même pour franc, fort, m-net, m-fort.

6. Compatibilité.

PROPOSITION 13. - Toute équivalence principale d'un tas est compatible.

On va en fait démontrer un peu plus :

PROPOSITION 14. - Si (E , Σ) , (E , Σ') sont des tas de même support et si Σ est un idéal à droite de Σ' , $\wp_H(\Sigma)$ est compatible dans (E , Σ') pour tout $H \in \mathfrak{P}(E)$.

Soient $x , y \in E$ et $\tau \in \Sigma'$; $(\forall \ \sigma \in \Sigma)\ \sigma\tau \in \Sigma$, donc

$$x \wp_H(\Sigma)\, y \implies (\forall \ \sigma \in \Sigma) \quad (\sigma x \in H \iff \sigma y \in H)$$
$$\implies (\forall \ \sigma \in \Sigma) \quad (\sigma\tau x \in H \iff \sigma\tau y \in H) \implies \tau x \wp_H(\Sigma)\, \tau y ,$$

et $\wp_H(\Sigma)$ est compatible dans (E , Σ') (proposition A, 10).

La proposition 13 n'est pas vraie si on ne suppose pas que Σ soit stable, comme on l'a fait dans la définition d'un tas. Prenons en effet $E = \{a , b , c\}$ et $\Sigma = \{\sigma\}$, où σ est définie par $\sigma a = b$, $\sigma b = a$, $\sigma c = c$. Σ n'est pas stable, car $\sigma^2 = I_E$. Si on choisit $H = \{a , c\}$, on a $H^{\bullet}.\ b = H^{\bullet}.\ c = \Sigma$, et $H^{\bullet}.\ a = \emptyset$, donc $\wp_H$ a pour classes $\{a\}$ et $\{b , c\}$. $\wp_H$ n'est pas compatible, car σb et σc n'appartiennent pas à la même classe.

7. Equivalences principales dans un groupoïde.

DÉFINITION 10. - Si $G = (E , \top)$ est un groupoïde et si $H \in \mathfrak{P}(E)$, on pose, pour tout $c \in \{g , d , m , b\}$:

$$\wp_H^c = \wp_H(\Sigma_c(G)) .$$

On a donc

$$(\forall \ x , y \in E) \quad (x \wp_H^c\, y \iff ((\forall \ \sigma \in \Sigma_c(G)) \quad (\sigma x \in H \iff \sigma y \in H))) .$$

PROPOSITION 15. - $\wp_H^c$ est compatible(c) pour $c = g , d , b$ et compatible(b) pour $c = m$.

Ceci résulte des propositions 12 et 13.

PROPOSITION 16. – $\wp_H^b = \wp_H^g \cap \wp_H^d \cap \wp_H^m$.

On sait que $\Sigma_b(G) = \Sigma_g(G) \cup \Sigma_d(G) \cup \Sigma_m(G)$ (proposition A, 13) ; par suite, si x , $y \in E$, l'équivalence $(\sigma x \in H \iff \sigma y \in H)$ est vraie pour tout $\sigma \in \Sigma_b(G)$ si et seulement si elle est vraie simultanément pour tout $\sigma \in \Sigma_g(G)$, pour tout $\sigma \in \Sigma_d(G)$ et pour tout $\sigma \in \Sigma_m(G)$; d'où la formule à démontrer.

PROPOSITION 17. – Si D est un demi-groupe, on a, pour toute partie H du support de D :

$$\wp_H^g = {}_H\mathcal{R} , \quad \wp_H^d = \mathcal{R}_H , \quad \wp_H^m = \mathcal{R}'_H .$$

Ceci résulte de la proposition A, 14, et de la définition de $\wp_H^c$. $\wp_H^b$ est alors définie par la proposition 16.

8. Résidus et conditions de netteté dans un groupoïde.

Soient $G = (E , \top)$ un groupoïde et H un sous-ensemble de E .

DÉFINITION 11. – On appelle, pour tout $c \in \{g , d , m , b\}$, W_H^c le résidu de H dans G_c .

PROPOSITION 18. – Pour tout $c \in \{g , d , m , b\}$, W_H^c est un idéal(c).

Ceci résulte de la proposition 6.

PROPOSITION 19/ – $W_H^b = W_H^g \cap W_H^d \cap W_H^m$.

On sait que $\Sigma_b(G) = \Sigma_g(G) \cup \Sigma_d(G) \cup \Sigma_m(G)$; par suite le quotient $H \cdot\!\!.\ x$ de H par $x \in E$ dans G_b est la réunion des quotients $H \cdot\!\!.\ x$ dans G_g , G_d , G_m ; et il est vide si et seulement si ces trois quotients sont vides simultanément.

D'autre part, les quatre conditions de netteté dans un tas fournissent **seize** conditions de netteté dans un groupoïde. Plusieurs de ces conditions sont équivalentes. On a tout d'abord les implications dues à la proposition 8 entre les notions de même côté c :

$$\begin{tikzcd} & \text{net}(c) \arrow[dr, Rightarrow] & \\ \text{m-franc}(c) \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & \text{m-net}(c) \\ & \text{franc}(c) \arrow[ur, Rightarrow] & \end{tikzcd}$$

On a ensuite les dix implications suivantes :

PROPOSITION 20. – $\text{franc}(g) \implies \text{net}(d)$.

Soit $x \in E$; si H est franc(g) , $(\exists\ y \in E)$ $\gamma_x y \in H$; comme $\gamma_x y = \delta_y x$, on trouve $\sigma = \delta_y \in \Sigma_d(G)$ tel que $\sigma x \in H$, et H est net(d).

PROPOSITION 21. - m-net(g) $\Longrightarrow$ net(m).

Soit $x \in E$; si H est m-net(g), $(\exists\ y \in E)$ $(\exists\ \gamma \in \Sigma_g(G))$ $\gamma\gamma_x y \in H$; or $\gamma\gamma_x y = \gamma\delta_y x$ et $\gamma\delta_y \in \Sigma_m(G)$, on a trouvé $\sigma \in \Sigma_m(G)$ tel que $\sigma x \in H$; et H est net(m).

PROPOSITION 22. - m-net(m) $\Longrightarrow$ net(m).

Soit $x \in E$; $\gamma_x \delta_x \in \Sigma_m(G)$. Si H est m-net(m) , $(\exists\ y \in E)$ $(\exists\ \mu \in \Sigma_m(G))$ $\mu\gamma_x \delta_x y \in H$; comme $\mu\gamma_x \delta_x y = \mu\gamma_x \gamma_y x$, et que $\mu\gamma_x \gamma_y \in \Sigma_m(G)$, on a trouvé $\sigma \in \Sigma_m(G)$ tel que $\sigma x \in H$; et H est net(m).

PROPOSITION 23. - net(m) $\Longrightarrow$ net(b).

En effet $\Sigma_m(G) \subseteq \Sigma_b(G)$.

PROPOSITION 24. - m-net(b) $\Longrightarrow$ net(m).

Soit $x \in E$; $\delta_x \delta_x \in \Sigma_b(G)$. Si H est m-net(b), $(\exists\ y \in E)$ $(\exists\ \beta \in \Sigma_b(G))$ $\beta\delta_x \delta_x y \in H$; comme $\beta\delta_x \delta_x y = \beta\delta_x \gamma_y x$, et que $\beta\delta_x \gamma_y \in \Sigma_m(G)$, on a trouvé $\sigma \in \Sigma_m(G)$ tel que $\sigma x \in H$; et H est net(m).

PROPOSITION 25. - franc(m) $\Longrightarrow$ m-franc(g).

Soient $x \in E$ et $\gamma \in \Sigma_g(G)$; $\gamma\delta_x \in \Sigma_m(G)$. Si H est franc(m), $(\exists\ y \in E)$ $\gamma\delta_x y \in H$; comme $\gamma\delta_x y = \gamma\gamma_y x$, et que $\gamma\gamma_y \in \Sigma_g(G)$, on a trouvé $\tau \in \Sigma_g(G)$ tel que $\gamma\tau x \in H$; et H est m-franc(g).

PROPOSITION 26. - franc(m) $\Longrightarrow$ m-franc(m).

Soient $x \in E$ et $\mu \in \Sigma_m(G)$; $\mu\gamma_{x\top x} \in \Sigma_m(G)$. Si H est franc(m) , $(\exists\ y \in E)$ $\mu\gamma_{x\top x} y \in H$; comme $\mu\gamma_{x\top x} y = \mu\delta_y(x \top x) = \mu\delta_y \gamma_x x$, et que $\delta_y \gamma_x \in \Sigma_m(G)$, on a trouvé $\tau \in \Sigma_m(G)$ tel que $\mu\tau x \in H$; et H est m-franc(m).

PROPOSITION 27. - franc(b) $\Longleftrightarrow$ franc(g) , (d) et (m).

Ceci résulte de $\Sigma_b(G) = \Sigma_g(G) \cup \Sigma_d(G) \cup \Sigma_m(G)$.

PROPOSITION 28. - m-franc(b) $\Longrightarrow$ m-franc(m).

Soient $x \in E$ et $\mu \in \Sigma_m(G)$; $\mu^2 \in \Sigma_b(G)$. Si H est m-franc(b), $(\exists\ \beta \in \Sigma_b(G))$ $\mu^2\ \beta x \in H$; comme $\mu\beta \in \Sigma_m(G)$, on a trouvé $\tau \in \Sigma_m(G)$ tel que $\mu\tau x \in H$; et H est m-franc(m).

PROPOSITION 29. – m-franc(g) , (d) et (m) $\Longrightarrow$ m-franc(b).

Soient $x \in E$ et $\beta \in \Sigma_b(G) = \Sigma_g(G) \cup \Sigma_d(G) \cup \Sigma_m(G)$. Si H est m-franc(g) , (d) et (m), et si $\beta \in \Sigma_g(G)$ (resp. d , m), $(\exists\ \tau \in \Sigma_g(G))$ (resp. d , m) $\beta\tau x \in H$; comme $\tau \in \Sigma_b(G)$, H est m-franc(b).

Finalement, on a la

PROPOSITION 30.

$$
\begin{tikzcd}
 & & & & \text{net}(g) \arrow[dr, Rightarrow] & & & & \\
 & \text{franc}(m) \arrow[rr, Rightarrow] \arrow[dl, Leftrightarrow] \arrow[dr, Leftrightarrow] & & \text{m-franc}(g) \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & \text{m-net}(g) \arrow[rr, Rightarrow] & & \text{net}(m) \arrow[dl, Leftrightarrow] \arrow[dr, Leftrightarrow] & \\
\text{franc}(b) \arrow[dr, Leftrightarrow] & & \text{m-franc}(m) \arrow[dl, Leftrightarrow] & & \text{franc}(g) \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & & \text{m-net}(m) \arrow[dr, Leftrightarrow] & & \text{net}(b) \arrow[dl, Leftrightarrow] \\
 & \text{m-franc}(b) & & & \text{net}(d) & & & \text{m-net}(b) &
\end{tikzcd}
$$

Les implications résultent des propositions 8 et 20, 21, 25. Pour les équivalences, m-net(m) $\Longleftrightarrow$ net(m) (propositions 24 et 8), net(m) $\Longrightarrow$ net(b) $\Longrightarrow$ m-net(b) $\Longrightarrow$ net(m) (propositions 23, 8, 24), d'où l'équivalence des conditions de droite. De même franc(m) $\Longleftrightarrow$ m-franc(m) (propositions 26 et 8) ; et, comme franc(m) $\Longrightarrow$ franc(g) et (d) (propositions 25 et 8), franc(m) $\Longleftrightarrow$ franc(b) (proposition 27) ; enfin m-franc(b) $\Longrightarrow$ m-franc(m) $\Longrightarrow$ m-franc(g) , (d) et (m) $\Longrightarrow$ m-franc(b) (propositions 28, 8 et 25, 29) ; d'où l'équivalence des conditions de gauche.

Il semble improbable que d'autres implications existent entre les notions étudiées ici ; mais ce n'est pas exclu, car de telles implications existent sous l'hypothèse d'associativité.

9. Résidus et conditions de netteté dans un demi-groupe.

Soient $D = (E , .)$ un demi-groupe et H un sous-ensemble de E .

PROPOSITION 31. – Dans un demi-groupe,

$$\text{franc}(g) \Longleftrightarrow \text{net}(d) \Longleftrightarrow \text{net à droite} .$$

En effet H est

- franc(g) si et seulement si

$$(\forall\ a \in E) \quad (\exists\ x \in E) \qquad ax \in H ;$$

- net(d) si et seulement si

$$(\forall\ x \in E) \quad (\exists\ b \in E) \qquad xb \in H ;$$

ces conditions sont équivalentes, et on y reconnait la condition de netteté à droite introduite par P. DUBREIL [6].

PROPOSITION 32. - Dans un demi-groupe,

$$\text{net}(m) \iff \text{m-net}(g) \iff \text{m-net}(d) \iff \text{"bilatèrement" net}.$$

En effet H est

- net(m) si et seulement si

$$(\forall\ x \in E)\quad (\exists\ a\ ,\ b \in E)\qquad axb \in H\ ;$$

- m-net(g) si et seulement si

$$(\forall\ a' \in E)\quad (\exists\ a\ ,\ x \in E)\qquad aa'x \in H\ ;$$

ces conditions sont équivalentes ; dualement net(m) $\iff$ m-net(d) ; on reconnait enfin, dans la première condition, la condition "bilatèrement" net de R. CROISOT [4].

La terminologie adoptée ici, et la proposition 32, poussent à dire médianement net, ou m-net, au lieu de bilatèrement net.

PROPOSITION 33. - Dans un demi-groupe,

$$\text{franc}(m) \iff \text{m-franc}(g) \iff \text{m-franc}(d) \iff \text{totalement net}.$$

La condition totalement net est due à R. DESQ [5] ; H est totalement net si et seulement si

$$(\forall\ a\ ,\ b \in E)\quad (\exists\ x \in E)\qquad axb \in H\ .$$

Or H est

- franc(m) si et seulement si

$$(\forall\ a\ ,\ b \in E)\quad (\exists\ x \in E)\qquad axb \in H\ ;$$

- m-franc(g) si et seulement si

$$(\forall\ a\ ,\ x \in E)\quad (\exists\ a' \in E)\qquad aa'x \in H\ ;$$

les trois conditions sont équivalentes, et, par dualité, franc(m) $\iff$ m-franc(d).

Les seize conditions de netteté que l'on pouvait craindre se réduisent donc, dans un demi-groupe, à quatre.

Quant aux résidus, on les obtient par la

PROPOSITION 34. - Dans un demi-groupe, $W_H^g = {}_HW$, $W_H^d = W_H$, $W_H^m = W_H^!$.
W_H^b est alors déterminé par la proposition 19.

10. Conditions de force.

Soient $G = (E , \top)$ un groupoïde, H un sous-ensemble de E et c un côté. H est

- fort(c) si et seulement si

$$(\forall\ x , y \in E) \quad (\forall\ \sigma , \tau \in \Sigma_c(G)) \quad (\sigma x \in H ,\ \sigma y \in H ,\ \tau x \in H \implies \tau y \in H)$$

- m-fort(c) si et seulement si

$$(\forall\ x , y \in E) \quad (\forall\ \rho , \sigma , \tau , \upsilon \in \Sigma_c(G))$$

$$(\rho\sigma x \in H ,\ \rho\tau x \in H ,\ \upsilon\sigma y \in H \implies \upsilon\tau y \in H) .$$

PROPOSITION 35. - fort(b) $\implies$ fort(g) , (d) et (m) ;
m-fort(b) $\implies$ m-fort(g) , (d) et (m).

En effet $\Sigma_c(G) \subseteq \Sigma_b(G)$ pour $c = g , d , m$.

PROPOSITION 36. - Dans un demi-groupe,

$$\text{fort}(g) \iff \text{fort}(d) \iff \text{fort} .$$

En effet H est

- fort(g) si et seulement si

$$(\forall\ x , y , a , b \in E) \qquad (ax \in H ,\ ay \in H ,\ bx \implies by \in H)$$

- fort(d) si et seulement si

$$(\forall\ x , y , a , b \in E) \qquad (xa \in H ,\ ya \in H ,\ xb \in H \implies yb \in H)$$

ces conditions ne diffèrent que par les noms donnés aux éléments et on y reconnait la condition "fort".

PROPOSITION 37. - Dans un demi-groupe,
fort(m) $\iff$ m-fort(g) $\iff$ m-fort(d) $\iff$ "bilatèrement" fort .

H est

- fort(m) si et seulement si

$$(\forall\ x , y , a , b , c , d \in E) \qquad (axb \in H,\ ayb \in H ,\ cxd \in H \implies cyd \in H)$$

- m-fort(g) si et seulement si

$(\forall\ x, y, a, b, c, d \in E) \quad (abx \in H\ ,\ acx \in H\ ,\ dbx \in H \implies dcx \in H)$

ces conditions ne diffèrent que par les noms donnés aux éléments, et on y reconnait la condition "bilatèrement" fort. Dualement, fort(m) $\iff$ m-fort(d).

La terminologie adoptée ici pousse à dire médianement fort, ou m-fort, au lieu de bilatèrement fort.

C. Equivalences principales et homomorphismes.

1. Remontée d'une équivalence principale par homomorphisme.

Si f est une surjection de E vers F, et $\mathcal{R}$ une équivalence sur F, j'appelle remontée de $\mathcal{R}$ par f l'équivalence $f^{-1}(\mathcal{R})$ définie par

$$(\forall\ x , y \in E) \quad (x\, f^{-1}(\mathcal{R})\, y \iff f(x)\ \mathcal{R}\ f(y)) .$$

On sait (P. DUBREIL [7]) que l'on définit ainsi une bijection de l'ensemble des équivalences sur F vers l'ensemble des équivalences sur E contenant l'équivalence d'application ; je note f^{-1} cette bijection par abus de langage.

THÉORÈME 1. - Soient f un homomorphisme de tas de (E , Σ) sur (F , Σ') et $H \in \mathfrak{P}(F)$; alors

$$\mathcal{P}_{f^{-1}(H)} = f^{-1}(\mathcal{P}_H)$$

et de même $\pi_{f^{-1}(H)} = \varphi^{-1}(\pi_H)$, où φ est l'homomorphisme associé.

Soient en effet $x , y \in E$, $\sigma \in \Sigma$; puisque

$\sigma x \in f^{-1}(H) \iff \varphi(\sigma)\ f(x) \in H , \qquad \sigma y \in f^{-1}(H) \iff \varphi(\sigma)\ f(y) \in H ,$

il est clair, φ étant surjectif, que

$$x\ \mathcal{P}_{f^{-1}(H)}\ y \iff f(x)\ \mathcal{P}_H\ f(y) .$$

On procède de même pour π_H .

2. Remontée des conditions par homomorphisme.

PROPOSITION 1. - Soient f un homomorphisme de tas de (E , Σ) sur (F , Σ') et $H \in \mathfrak{P}(F)$; alors H et $f^{-1}(H)$ sont simultanément nets, francs, m-nets, m-francs, forts, m-forts.

Soient en effet $x \in E$, $\sigma \in \Sigma$; puisque

$$\sigma x \in f^{-1}(H) \iff \varphi(\sigma)\ f(x) \in H ,$$

et que f et φ sont surjectifs, les conditions

$(\forall\ x \in E)$ $(\exists\ \sigma \in \Sigma)$ $\sigma x \in f^{-1}(H)$ et $(\forall\ y \in F)$ $(\exists\ \tau \in \Sigma')$ $\tau y \in H$

sont équivalentes ; donc H est $f^{-1}(H)$ sont nets en même temps. On procède de même pour les autres conditions.

3. Descente des conditions par homomorphisme.

La proposition 1 permet d'effectuer cette descente, mais seulement dans le cas d'une partie de E saturée pour l'équivalence d'homomorphisme. Pour le cas général, on a la

PROPOSITION 2. - Soient f un homomorphisme de tas de (E , Σ) sur $\mathcal{T}'$, et $H \in \mathfrak{P}(E)$; alors si H est net, ou franc, m-net, m-franc, il en est de même de $f(H)$.

Ceci résulte du fait que toute partie de E contenant une partie nette (resp. franche, m-nette, m-franche) est elle-même nette (resp. franche, m-nette, m-franche) ; (ceci n'est pas vrai avec les conditions de force). Soit alors $H_1 = f^{-1}(f(H))$; de $H \subseteq H_1$ résulte que, si H vérifie une condition de netteté, H_1 vérifie cette condition, et $f(H)$ aussi d'après la proposition 1.

D. Deux théorèmes d'homomorphisme.

Ces théorèmes concernant des tas particuliers que nous allons préciser.

1. Tas injectifs, surjectifs, transitifs, à noyau, stationnaires.

PROPOSITION 1. - Etant donné un tas $\mathcal{T} = (E , \Sigma)$, les conditions suivantes sont équivalentes :

a. Tout élément de Σ est une injection.

b. $(\forall\ x , y \in E)$ $(\forall\ \sigma \in \Sigma)$ $(\sigma x = \sigma y \implies x = y)$.

c. L'égalité est une équivalence simplifiable.

Ceci résulte de la définition A, 10.

DÉFINITION 1. – Un tas est dit <u>injectif</u> quand il satisfait à l'une des conditions de la proposition 1.

PROPOSITION 2. – Etant donné un tas $\mathfrak{T} = (E , \Sigma)$, les conditions suivantes sont équivalentes :

a. Tout élément de Σ est une surjection.

b. $(\forall\ x \in E)\ (\forall\ \sigma \in \Sigma)\ (\exists\ y \in E)\ \sigma y = x$.

c. Tout élément de E est franc.

Ceci résulte de la proposition B, 7.

DÉFINITION 2. – Un tas est dit <u>surjectif</u> quand il satisfait à l'une des conditions de la proposition 2.

PROPOSITION 3. – Etant donné un tas $\mathfrak{T} = (E , \Sigma)$, les conditions suivantes sont équivalentes :

a. $\mathfrak{T}$ n'a pas d'idéal propre.

b. $(\forall\ x , y \in E)\ (\exists\ \sigma \in \Sigma)\ \sigma y = x$.

c. Tout élément de E est net.

(a) $\Longrightarrow$ (b) : si $\mathfrak{T}$ n'a pas d'idéal propre et si $y \in E$, Σy est un idéal non vide, donc $\Sigma y = E$ et $(\forall\ x \in E)\ (\exists\ \sigma \in \Sigma)\ \sigma y = x$.

(b) $\Longrightarrow$ (a) : car si A est un idéal non vide de $\mathfrak{T}$, il existe $y \in A$, et $E = \Sigma y \subseteq A \Longrightarrow E = A$.

(b) $\Longleftrightarrow$ (c) d'après la proposition B, 7.

DÉFINITION 3. – Un tas est dit <u>transitif</u> quand il satisfait à l'une des conditions de la proposition 3.

Cette condition peut être affaiblie ainsi :

PROPOSITION 4. – Etant donné un tas $\mathfrak{T} = (E , \Sigma)$, les conditions suivantes sont équivalentes :

a. Il existe un élément net.

b. Il existe un idéal non vide <u>minimum</u>.

et cet idéal est alors l'ensemble des éléments nets.

Ceci a pour conséquences, en théorie des demi-groupes, des propositions antérieurement établies par A. H. CLIFFORD et D.D. MILLER [2], R. CROISOT [4].

(a) $\Longrightarrow$ (b) : soit $h \in E$ un élément net. L'ensemble N des éléments nets est non vide ; c'est un idéal car

$$y \in N \iff (\forall \ x \in E) \ y \in \Sigma x \qquad \text{donc} \qquad N = \bigcap_{x \in E} \Sigma x \ .$$

Et, si A est un idéal non vide et si $a \in A$, $N \subseteq \Sigma \ a \subseteq A$, en sorte que A est un idéal non vide minimum.

(b) $\Longrightarrow$ (a) : soit N un idéal non vide minimum ; alors $N \subseteq \bigcap_{x \in E} \Sigma x$, en sorte que tout élément de N est net, et qu'il existe un élément net. Et, en ce cas, l'ensemble des éléments nets est un idéal non vide minimum, d'après ce qui précède, donc coïncide avec N.

DÉFINITION 4. - On appelle <u>noyau</u> d'un tas un idéal non vide minimum de ce tas.

S'il existe un noyau, il est unique.

La cinquième condition est très naturelle si on remarque que la règle de simplification à gauche dans un tas s'exprime par l'injectivité, et que la règle de simplification à droite n'est pas encore exprimée.

DÉFINITION 5. - Un tas (E, Σ) est dit <u>stationnaire</u> si et seulement si

$$(\forall \ x \in E) \quad (\forall \ \sigma, \tau \in \Sigma) \qquad (\sigma x = \tau x \Longrightarrow \sigma = \tau) \ .$$

Cette condition s'écrit aussi $\sigma x = \tau x \Longrightarrow \sigma y = \tau y$, ce qui justifie son nom.

On notera aussi que "simplement transitif" équivaut à "transitif et stationnaire".

L'analogie entre les tas injectifs et les tas stationnaires va être précidée par la notion d'aquivalence stationnaire, elle même analogue à la notion d'équivalence simplifiable.

2. Equivalence stationnaires et équivalences simplifiables.

DÉFINITION 6. - Si $\mathcal{T} = (E, \Sigma)$ est un tas, une équivalence $\mathcal{R}$ sur E est dite <u>stationnaire</u> si, ρ étant l'équivalence associée :

$$(\forall \ x \in E) \quad (\forall \ \sigma, \tau \in \Sigma) \qquad (\sigma x \ \mathcal{R} \ \tau x \Longrightarrow \sigma \ \rho \ \tau) \ .$$

PROPOSITION 5. - Un tas est stationnaire si et seulement si l'égalité est une équivalence stationnaire.

En effet l'équivalence associée à l'égalité est l'égalité (définition A, 5).

Dans un tas, la notion de partie forte est liée à des propriétés de simplifiabilité, celle de partie m-forte à des propriétés de stationnarité. Soit H un sous-ensemble de E .

PROPOSITION 6. - Si H est classe pour une équivalence compatible et simplifiable, H est fort.

Soit $\mathcal{R}$ une telle équivalence ; si $x , y \in E$, $\sigma , \tau \in \Sigma$:

$$\sigma x \in H \,, \quad \sigma y \in N \implies \sigma x \,\mathcal{R}\, \sigma y \implies x \,\mathcal{R}\, y \implies \tau x \,\mathcal{R}\, \tau y$$

et alors $\tau x \in H \implies \tau y \in H$.

PROPOSITION 7. - Si H est fort et net, $\mathcal{P}_H$ est simplifiable.

Soient $x , y \in E$, $\sigma \in \Sigma$, tels que $\sigma x \,\mathcal{P}_H\, \sigma y$. H étant net, $(\exists\ \upsilon \in \Sigma)$ $\upsilon\sigma x \in H$; et $\upsilon\sigma y \in H$. Par suite, H étant fort, $x \,\mathcal{P}_H\, y$ (proposition B, 3).

PROPOSITION 8. - Si H est m-fort et net, $\mathcal{P}_H$ est stationnaire.

Soient $x \in E$, $\sigma , \tau \in \Sigma$, tels que $\sigma x \,\mathcal{P}_H\, \tau x$. H étant net, $(\exists\ \upsilon \in \Sigma)$ $\upsilon\sigma x \in H$; et $\upsilon\tau x \in H$. Par suite, H étant m-fort, $\sigma \,\pi_H\, \tau$ (proposition B, 3) ; et π_H est l'équivalence associée à $\mathcal{P}_H$ (proposition B, 5).

PROPOSITION 9. - Si H est fort et net, $\mathcal{P}_H$ est stationnaire si et seulement si H est m-fort.

La condition est suffisante (proposition 8). Si $\mathcal{P}_H$ est stationnaire, H fort et net, et si $x , y \in E$, $\rho , \sigma , \tau , \upsilon \in \Sigma$ sont tels que $\rho\sigma x \in H$, $\rho\tau x \in H$, $\upsilon\sigma y \in H$, alors $\sigma x \,\mathcal{P}_H\, \tau x$, d'où $\sigma \,\pi_H\, \tau$, et $\upsilon\sigma y \in H \implies \upsilon\tau y \in H$.

Enfin, on a la

PROPOSITION 10. - Soient f un homomorphisme de tas de $\mathcal{T} = (E , \Sigma)$ sur $\mathcal{T}' = (F , \Sigma')$ et $\mathcal{R}$ une équivalence sur F ; $\mathcal{R}$ et sa remontée sont simplifiables, ou stationnaires, en même temps.

En effet, si $x , y \in E$, $\sigma \in \Sigma$,

$$\sigma x \, f^{-1}(\mathcal{R}) \, \sigma y \iff \varphi(\sigma) \, f(x) \,\mathcal{R}\, \varphi(\sigma) \, f(y) \,, \qquad x \, f^{-1}(\mathcal{R}) \, y \iff f(x) \,\mathcal{R}\, f(y) \quad ;$$

f et φ étant surjectifs, $\mathcal{R}$ et $f^{-1}(\mathcal{R})$ sont simplifiables en même temps. On procède de même avec la condition "stationnaire", en la mettant sous la forme

$$(\forall\ x , y \in E) \quad (\forall\ \sigma , \tau \in \Sigma) \qquad (\sigma x \,\mathcal{R}\, \tau x \implies \sigma y \,\mathcal{R}\, \tau y) \,.$$

3. Théorèmes d'homomorphisme.

Le théorème d'homomorphisme (théorème A, 1) laisse entendre que des propriétés, invariantes par isomorphisme, d'une image homomorphe d'un tas donné, peuvent être caractérisée par des propriétés de l'équivalence d'homomorphisme.

On peut ainsi caractériser les images homomorphes possédant une ou plusieurs des propriétés du § 1 par des propriétés de l'équivalence d'homomorphisme ; j'ai borné mon intérêt au cas où l'équivalence d'homomorphisme est principale pour un sous-ensemble vérifiant des conditions de netteté et de force ; ceci arrive dès que l'image est un tas injectif à noyau ; on trouvera les théorèmes correspondants dans la Thèse annoncée ci-dessus. On se limite ici aux théorèmes où figure la condition stationnaire, c'est-à-dire où l'image est un tas injectif stationnaire à noyau. Le nombre des théorèmes est alors limité par l'implication :

PROPOSITION 11. - Un tas injectif stationnaire à noyau a pour ensemble de multiplicateurs un groupe de bijections, et est en particulier surjectif.

Soient $\mathcal{T} = (E\ ,\ \Sigma)$ un tel tas, et h un élément net de E (proposition 4)

$$(\forall\ x \in E)\quad (\exists\ \sigma \in \Sigma)\qquad \sigma x = h\ .$$

En particulier $(\exists\ \varepsilon \in \Sigma)$ $\varepsilon h = h$; de $\varepsilon h = \varepsilon^2 h$, on déduit $\varepsilon^2 = \varepsilon = \varepsilon I_E$, et, ε étant injectif, $\varepsilon = I_E$; donc $I_E \in \Sigma$.

D'autre part, si $\sigma \in \Sigma$, $(\exists\ \varepsilon \in \Sigma)$ $\tau\sigma h = h = I_E\, h$; par suite $\tau\sigma = I_E$; il en résulte $\tau\sigma\tau = \tau = \tau I_E$, et, τ étant injectif, $\sigma\tau = I_E$; donc σ est une bijection, et, puisque $\sigma^{-1} = \tau \in \Sigma$, et que Σ est stable, Σ est un groupe de bijections.

Nous deonnerons les théorèmes où l'image est un tas injectif stationnaire à noyau, ou injectif stationnaire transitif.

4. Premier théorème.

THÉORÈME 1. - Une image homomorphe d'un tas $\mathcal{T} = (E\ ,\ \Sigma)$ est un tas injectif stationnaire à noyau, si et seulement s'il existe une partie H de E , nette, forte, m-forte et indivisible pour $\mathcal{P}_H$, telle que l'équivalence d'homomorphisme soit $\mathcal{P}_H$; et on peut prendre pour H toute classe de l'équivalence d'homomorphisme qui s'envoie dans le noyau de l'image.

Prouvons que la condition est nécessaire.

LEMME 1. - Soit $\mathcal{T} = (E , \Sigma)$ un tas injectif stationnaire à noyau ; alors tout élément h du noyau est net, fort, m-fort, et l'équivalence principale définie par $\{h\}$ est l'égalité.

En effet h est net (proposition 4) ; et, comme l'égalité de $\mathcal{T}$ est simplifiable, h est fort (proposition 6). Montrons maintenant que $\wp_{\{h\}}$ est l'égalité ; si $x , y \in E$ sont tesl que $x \wp_{\{h\}} y$, $(\exists\ \sigma \in \Sigma)$ $\sigma x = h$ puisque h est net ; et $\sigma y = h$; de $\sigma x = h = \sigma y$ résulte alors $x = y$. h est alors m-fort (proposition 9).

Revenant aux notations du théorème, et soient h un élément du noyau de l'image, H son image réciproque, il résulte du lemme que H est nette, forte et m-forte (proposition C, 1), et que $\wp_H$ est l'équivalence d'homomorphisme (théorème C, 1) ; H est enfin indivisible pour $\wp_H$.

Prouvons que la condition est suffisante. Si H est une partie nette, forte et m-forte de E , $\wp_H$ est simplifiable (proposition 7) et stationnaire (proposition 9) ; si $\wp_H$ est l'équivalence d'homomorphisme, l'égalité dans l'image est aussi simplifiable et stationnaire (proposition 10), et l'image est un tas injectif et stationnaire. Enfin l'image de H est formée d'un élément, et cet élément est net (proposition C, 2), donc l'image a un noyau (proposition 4).

5. Second théorème.

THÉORÈME 2. - Une image homomorphe d'un tas $\mathcal{T} = (E , \Sigma)$ est un tas injectif stationnaire transitif si et seulement s'il existe une partie H de E , m-franche, forte et m-forte, telle que l'équivalence d'homomorphisme soit $\wp_H$; et on peut prendre pour H toute classe de l'équivalence d'homomorphisme.

La condition est nécessaire. En effet un tas transitif a un noyau, qui est son support ; il résulte alors du théorème 1 que, si H est une classe quelconque de l'équivalence d'homomorphisme, H est nette, forte, m-forte, et $\wp_H$ est l'équivalence d'homomorphisme. D'autre part l'image est un tas surjectif (proposition 11) et tout élément de son support est franc (proposition 2), donc H est franche (proposition C, 2) ; en sorte que $H \mathbin{.^{\bullet}} \sigma$ est non vide pour tout $\sigma \in \Sigma$. Par suite, pour tout $\sigma \in \Sigma$, $H \mathbin{.^{\bullet}} \sigma$ est une classe de $\wp_H$ (proposition B, 12), donc une partie nette ; et H est m-franche (proposition B, 9).

La condition est suffisante : en effet $\mathcal{P}_H$ est alors simplifiable (proposition 7) et stationnaire (proposition 9) ; de plus les classes de $\mathcal{P}_H$ sont des $H \cdot^{\bullet} \sigma$, pour $\sigma \in \Sigma$, et sont toutes nettes (proposition B, 9). L'image est donc un tas où l'égalité est simplifiable et stationnaire (proposition 10), et tout élément de son support est net (proposition C, 1) ; c'est donc un tas injectif, stationnaire et transitif.

E. Application aux groupoïdes.

1. Groupoïdes dont l'un des tas canoniques possède une ou plusieurs des propriétés de la section précédente.

Soit $G = (E , \top)$ un groupoïde.

PROPOSITION 1. – Un groupoïde est injectif(g) (resp. (d) , (b)) si et seulement s'il vérifie la règle de simplification à gauche (resp. à droite, des deux côtés).

Ceci résulte de la proposition A, 17.

PROPOSITION 2. – Un groupoïde est injectif(m) si et seulement s'il vérifie la règle de simplification des deux côtés.

Un groupoïde injectif(b) est injectif(m). Réciproquement, si G est injectif(m), et si $a , b , c \in E$ sont tels que $a \top b = a \top c$, alors

$$\delta_{a\gamma a}\, b = (a \top b) \top a = (a \top c) \top a = \delta_{a\gamma a}\, c ,$$

et $b = c$, puisque $\delta_{a\gamma a} \in \Sigma_m(G)$; dualement,

$$b \top a = c \top a \implies b = c .$$

On dira dans la suite "simplifiable ..." pour "vérifiant la règle de simplification ...", et "simplifiable" pour simplifiable des deux côtés.

PROPOSITION 3. – Un groupoïde est surjectif(g) (resp. (d) , (b)) si et seulement s'il vérifie l'axiome d'existence des quotients à droite (resp. à gauche, des deux côtés).

En effet l'ensemble des surjections de E vers E est stable, donc G est surjectif(g) (resp. (d) , (b)) si et seulement si toute translation à gauche (resp. à droite, à gauche ou à droite) est surjective.

PROPOSITION 4. - Un groupoïde est surjectif(m) si et seulement s'il a des quotients à droite et à gauche.

Un tel groupoïde est surjectif(b), donc surjectif(m). Réciproquement, si G est surjectif(m), et si $a , b \in E$, $\gamma_a \delta_b$ et $\delta_b \gamma_a$ sont surjectives, donc aussi γ_a et δ_b .

PROPOSITION 5. - Un noyau(g) (resp. (d) , (b)) est un idéal à gauche (resp. à droite, bilatère) non vide minimum.

Ceci résulte de la proposition A, 18.

On dira désormais "noyau à gauche" pour "idéal à gauche non vide minimum", etc.

PROPOSITION 6. - Un noyau(m) est un noyau(b), et réciproquement.

En effet un noyau(c) est l'ensemble éventuel des éléments nets(c) (proposition D, 4) ; or net(m) $\Longleftrightarrow$ net(b) (proposition B, 30). On peut aussi donner une démonstration directe.

Un groupoïde est dit <u>simple à gauche</u> quand il n'a pas d'idéal à gauche propre, etc.

PROPOSITION 7. - Un groupoïde est transitif(g) (resp. (d) , (b)) si et seulement s'il est simple à gauche (resp. simple à droite, simple).

Ceci résulte de la proposition A, 18.

PROPOSITION 8. - Un groupoïde transitif(m) est simple, et réciproquement.

Ceci résulte de la proposition 6.

Contrairement aux conditions précédentes, les conditions de stationnarité canulent.

PROPOSITION 9. - Un groupoïde est stationnaire(b) si et seulement si c'est un demi-groupe abélien stationnaire(g).

Un demi-groupe abélien stationnaire(g) D est stationnaire(b) puisque $\Sigma_g(D) = \Sigma_b(D)$. Réciproquement, si G est stationnaire(b), G est stationnaire(g), puisque $\Sigma_g(G) \subseteq \Sigma_b(G)$.

G est abélien ; soient $a , b \in E$; on a :

$$a \top a = a \top a \Longrightarrow \gamma_a a = \delta_a a \Longrightarrow \gamma_a b = \delta_a b \Longrightarrow a \top b = b \top a .$$

G est associatif : soient $a , b , c \in E$; G étant abélien,

$$(a \top b) \top a = (b \top a) \top a = a \top (b \top a) ,$$

$$\gamma_{a\top b}\, a = \gamma_a \gamma_b\, a \implies \gamma_{a\top b}\, c = \gamma_a \gamma_b\, c \implies (a \top b) \top c = a \top (b \top c) .$$

PROPOSITION 10. - Un groupoïde simplifiable est stationnaire(m) si et seulement si c'est un semi-groupe abélien.

Un semi-groupe abélien $D = (E , .)$ est stationnaire(m) car, si a , b , c , d , x , y E,

$$axb = cxd \implies ab = cd \implies ayb = cyd .$$

Réciproquement, supposons G stationnaire(m), et soit $\mu \in \Sigma_m(G)$.

G est abélien ; soient $a , b \in E$; on a :

$$\mu(a \top a) = \mu(a \top a) \implies \mu\gamma_a\, a = \mu\delta_a\, a \implies \mu\gamma_a\, b = \mu\delta_a\, b$$
$$\implies \mu(a \top b) = \mu(b \top a) \implies a \top b = b \top a .$$

G est associatif ; soient $a , b , c \in E$; comme ci-dessus,

$$\mu((a \top b) \top a) = \mu(a \top (b \top a)) \implies \mu\gamma_{a\top b}\, a = \mu\gamma_a \gamma_b\, a \implies \mu\gamma_{a\top b}\, c = \mu\gamma_a\gamma_b\, c$$
$$\implies \mu((a \top b) \top c) = \mu(a \top (b \top c)) \implies (a \top b) \top c = a \top (b \top c) .$$

J'ignore si cette implication reste vraie sans l'hypothèse de simplifiabilité. Par contre un groupoïde stationnaire(g) n'est pas en général associatif, même en présence de fortes conditions à gauche comme on le verra ci-dessous, ou de la simplifiabilité (voir Thèse). Il en est toutefois ainsi dès que le groupoïde contient un triple associatif, en particulier s'il est abélien ou unitaire d'un côté, ainsi qu'il résulte du raisonnement de la proposition 9.

Les conditions figurant dans les théorèmes D, 1 et D, 2 sont alors :

PROPOSITION 11. - Un groupoïde est injectif-stationnaire-à-noyau (g) si et seulement s'il est simplifiable à gauche, stationnaire(g) et a un noyau à gauche ; un groupoïde est injectif-stationnaire-transitif(g) si et seulement s'il est simplifiable à gauche, simple à gauche et stationnaire(g) ; ces groupoïdes ont des quotients à droite. Un groupoïde est injectif-stationnaire-à-noyau (m) ou stationnaire-à-noyau (b) si et seulement si c'est un groupe abélien, qui est alors transitif(m) et transitif(b).

La première phrase d'assertions résulte des propositions précédentes, et de la proposition D, 11. Et un groupoïde injectif-stationnaire-à-noyau (m) ou stationnaire-à-noyau (b) est un semi-groupe abélien à noyau ; ce noyau est aussi un noyau à droite et à gauche, le semi-groupe est donc un homogroupe, et par suite un groupe (G. THIERRIN [9]). Réciproquement, un groupe abélien est injectif stationnaire transitif(m) et transitif(b).

Le groupoïde de support $E = \{a , b\}$, dont la loi est définie par $(\forall \ x \in E)$ $x \top a = b$, $x \top b = a$, admet une seule translation à gauche α, et $\Sigma_g(G) = \{I_E , \alpha\}$ est un groupe simplement transitif de bijections ; G est donc injectif stationnaire transitif(g). G n'est pas simplifiable à droite. G n'est pas un quasi-groupe. G n'est ni abélien ni associatif car

$$(a \top a) \quad a = b \top a = b \neq a = a \top b = a \top (a \top a) .$$

2. Demi-groupes dont l'un des tas ... (voir ci-dessus).

Soit $D = (E , .)$ un demi-groupe.

Dans un demi-groupe, la condition stationnaire(g) est bien connue.

PROPOSITION 12. - Pour un demi-groupe,

$$\text{stationnaire}(g) \iff \text{stationnaire à gauche} .$$

D est en effet stationnaire(g) si et seulement si

$$(\forall \ x , y , a , b \in E) \qquad (ax = bx \implies ay = by) ;$$

on reconnait là la condition "stationnaire à gauche" de G. THIERRIN [10].

PROPOSITION 13. - Pour un demi-groupe,

$$\text{surjectif}(g) \iff \text{transitif}(d) .$$

En effet un demi-groupe est simple à droite si et seulement s'il y existe des quotients à droite.

Les conditions figurant dans les théorèmes sont alors :

PROPOSITION 14. - Un demi-groupe injectif stationnaire-à-noyau (g) est un groupe.

Un tel demi-groupe est en effet surjectif(g) (proposition D, 11) ; donc tous ses éléments sont nets à droite. Or il existe un élément net à gauche ; l'ensemble des éléments nets à gauche coïncide alors avec l'ensemble des éléments nets à droite et c'est un groupe (A. H. CLIFFORD et D. D. MILLER [2]) ; c'est-à-dire, D est un groupe.

3. Passage des homomorphismes de tas aux homomorphismes de groupoïdes.

Il reste alors à montrer comment les théorèmes d'homomorphisme de la section D vont donner des théorèmes de théorie des groupoïdes. Ceci résulte du

LEMME 1. - Une image homomorphe d'un groupoïde G est un groupoïde G' tel que G'_c possède la propriété P si et seulement si G'_c est une image homomorphe de G_c possédant P et si l'équivalence d'homomorphisme est compatible $(c \in \{g , d , m , b\})$.

La condition est nécessaire : si f est un homomorphisme (de groupoïdes) de G sur G' , l'équivalence d'homomorphisme est compatible, et f est un homomorphisme (de tas) de G_c sur G'_c (théorème A, 2). Réciproquement, si f est un homomorphisme de G_c sur un tas $\mathcal{T}'$, tel que l'équivalence d'homomorphisme soit compatible (dans G), il existe un groupoïde G' et un seul sur le support de $\mathcal{T}'$ tel que f soit un homomorphisme (de groupoïdes) de G sur G' ; f est alors un homomorphisme (de tas) de G_c sur G'_c , et il en résulte $G'_c = \mathcal{T}'$ (lemme A, 1, unicité).

Ceci amène à poser :

DÉFINITION 1. - Si c est un côté et $G = (E , \top)$ un groupoïde, une partie H est dite compatible(c) si et seulement si $\wp^c_H$ est compatible dans G .

PROPOSITION 15. - Toute partie d'un groupoïde est compatible(m) ou compatible(b).

Ceci résulte de la proposition B, 15.

Pour avoir de même des demi-groupes images homomorphes d'un groupoïde, on posera la

DÉFINITION 2. - Si c est un côté et $G = (E , \top)$ un groupoïde, une partie H de E est dite associative(c) si et seulement si $\wp^c_H$ est associative (c'est-à-dire $(\forall\ x , y , z \in E)\quad x \top (y \top z)\ \wp^c_H\ (x \top y) \top z$).

En effet une image homomorphe d'un groupoïde est associative si et seulement si l'équivalence d'homomorphisme est associative.

Ces définitions ne ressortent pas de la théorie des tas. Leurs notations sont un évident abus de langage, destiné à donner une allure homogène aux conditions imposées à H dans les théorèmes à venir.

Si T est un théorème de théorie des tas :

THÉORÈME T. - Une image homomorphe d'un tas $\mathcal{T} = (E , \Sigma)$ est un tas possédant la propriété P si et seulement s'il existe une partie H de E vérifiant la condition C et telle que l'équivalence d'homomorphisme soit ρ_H.

On en déduit, pour tout côté c , les théorèmes :

THÉORÈME T_c. - Une image homomorphe d'un groupoïde $G = (E , \top)$ est un groupoïde possédant la propriété P(c) si et seulement s'il existe une partie H de E vérifiant la condition C(c) et compatible(c), telle que l'équivalence d'homomorphisme soit ρ_H^c.

THÉORÈME T_c'. - Une image homomorphe d'un groupoïde $G = (E , \top)$ est un demi-groupe possédant la propriété P(c) si et seulement s'il existe une partie H de E vérifiant la condition C(c) , compatible(c) et associative(c), telle que l'équivalence d'homomorphisme soit ρ_H^c.

THÉORÈME T_c''. - Une image homomorphe d'un demi-groupe $D = (E , .)$ est un demi-groupe possédant la propriété P(c) si et seulement s'il existe une partie H de E , vérifiant la condition C(c) et compatible(c), telle que l'équivalence d'homomorphisme soit ρ_H^c.

4. Théorèmes obtenus.

Chaque théorème de théorie des tas fournit ainsi douze théorèmes de théorie des groupoïdes ou des demi-groupes. Les théorèmes D, 1 et D, 2 fournissent a priori vingt-quatre théorèmes.

Les théorèmes obtenus pour c = b sont sans intérêt : en effet, pour ces théorèmes, $P(b) \iff P(m)$, alors que $C(b) \implies C(m)$; et le renseignement que ρ_H^b est l'équivalence d'homomorphisme peut être retrouvé avec les théorèmes des cas g , d , b . Quant aux théorèmes du cas c = d , il se déduisent par dualité des théorèmes du cas c = g . Dans le cas c = m , il y a lieu enfin de supprimer les théorèmes T', puisque l'image est toujours associative, et ceux qui se déduisent du théorème D, 2, qui donnent la même condition sur l'image à partir d'une condition plus forte sur H que les théorèmes correspondants déduits du théorème D, 1. Il en est de même des théorèmes T_g' et T_g''. Finalement il reste six théorèmes.

THÉORÈME 1 = $(D, 1)_g$. - Une image homomorphe d'un groupoïde $G = (E , \top)$ est un groupoïde simplifiable à gauche, stationnaire(g) ayant un noyau à gauche, si et seulement s'il existe une partie H de E , nette(g), forte(g), m-forte(g), compatible(g) et indivisible pour ρ_H^g , telle que l'équivalence d'homomorphisme soit ρ_H^g.

THÉORÈME 2 = $(D, 2)_g$. – Une image homomorphe d'un groupoïde $G = (E, \top)$ est un groupoïde simplifiable à gauche, simple à gauche et stationnaire(g) si et seulement s'il existe une partie H de E, m-franche(g), forte(g), m-forte(g) et compatible(g), telle que l'équivalence d'homomorphisme soit $\mathcal{P}^g_H$.

THÉORÈME 3 = $(D, 1)'_g$. – Une image homomorphe d'un groupoïde $G = (E, \top)$ est un groupe si et seulement s'il existe une partie H de E, nette(g), forte(g), m-forte(g), compatible(g), associative(g) et indivisible pour $\mathcal{P}^g_H$, telle que l'équivalence d'homomorphisme soit $\mathcal{P}^g_H$.

THÉORÈME 4 = $(D, 1)''_g$. – Une image homomorphe d'un demi-groupe $D = (E, .)$ est un groupe si et seulement s'il existe une partie H de E, nette à gauche, forte, médianement forte, compatible(g) et indivisible pour ${}_H\mathcal{R}$, telle que l'équivalence d'homomorphisme soit ${}_H\mathcal{R}$.

THÉORÈME 5 = $(D, 1)_m$. – Une image homomorphe d'un groupoïde $G = (E, \top)$ est un groupe abélien si et seulement s'il existe une partie H de E, nette(m), forte(m), m-forte(m) et indivisible pour $\mathcal{P}^m_H$, telle que l'équivalence d'homomorphisme soit $\mathcal{R}^m_H$.

THÉORÈME 6 = $(D, 1)''_m$. – Une image homomorphe d'un demi-groupe $D = (E, .)$ est un groupe abélien si et seulement s'il existe une partie H de E, médianement nette, médianement forte, m-forte(m) et indivisible pour $\mathcal{R}'_H$, telle que l'équivalence d'homomorphisme soit $\mathcal{R}'_H$.

On peut prendre pour H : dans le théorème 1, une classe de l'équivalence d'homomorphisme s'envoyant sur un élément du noyau de l'image ; dans les autres, une classe quelconque.

Ces théorèmes appellent quelques remarques :

1° La théorie fournit d'autres théorèmes concernant les groupes images homomorphes d'un groupoïde ou demi-groupe donné ; elle permet de retrouver les théorèmes classiques et de les étendre aux groupoïdes (voir Thèse) ;

2° Dans les deux théorèmes concernant les groupes abéliens, il n'y a aucune condition de commutativité explicite sur H ;

3° Le théorème 4, concernant les groupes images homomorphes d'un demi-groupe, est, comme les autres, nouveaux, et révèle, outre l'emploi de la seule équivalence ${}_H\mathcal{R}$, un affaiblissement des conditions de netteté classiques au profit des conditions de force.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BRUCK (Richard H.). - A survey of binary systems. - Berlin, Springer-Verlag, 1958 (Ergebnisse der Mathematik, Neue Folge, 20, Reihe : Gruppentheorie).

[2] CLIFFORD (A. H.) and MILLER (D. D.). - Semi-groups having zeroïd elements, Amer. J. of Math., t. 70, 1948, p. 117-125.

[3] CROISOT (Robert). - Propriétés des complexes forts et symétriques des demi-groupes, Bull. Soc. math. France, t. 80, 1952, p. 217-223.

[4] CROISOT (Robert). - Equivalences principales bilatères définies dans un demi-groupe, J. Math. pures et appl., 9e série, t. 36, 1957, p. 373-417.

[5] DESQ (Roger). - Sur certaines relations d'équivalence dans un demi-groupe, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 255, 1962, p. 2348-2350.

[6] DUBREIL (Paul). - Contribution à la théorie des demi-groupes. - Paris, Gauthier-Villars, 1941 (Mém. Acad. Sc. Inst. France, t. 63, 52 p.).

[7] DUBREIL (Paul). - Remarques sur les théorèmes d'isomorphisme, C. R. Acad. Sc. Paris., t. 215, 1942, p. 239-241.

[8] PIERCE (R. S.). - Homorphisms of semi-groups, Annals of Math., Series 2, t. 59, 1954, p. 287-291.

[9] THIERRIN (Gabriel). - Contribution à la théorie des équivalences dans les demi-groupes, Bull. Soc. math. France, t. 83, 1955, p. 103-159 (Thèse Sc. math. Paris. 1954).

[10] THIERRIN (Gabriel). - Demi-groupes inversés et rectangulaires, Acad. royale Belg., Cl. Sc., 5e série, t. 41, 1955, p. 83-92.