Monique Bertrand

Algèbres non-associatives et applications à la génétique

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 16, n° 2 (1962-1963), exp. n° 18, p. 1-18

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1962-1963__16_2_A7_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
16e année, 1962/63, n° 18

1er et 8 mars 1963

ALGÈBRES NON-ASSOCIATIVES ET APPLICATIONS À LA GÉNÉTIQUE

par Mme Monique BERTRAND

A. Algèbres non-associatives.

Nous allons voir quelques aspects des théories d'algèbres non associatives, et, en particulier, ceux qui permettent une application à la génétique.

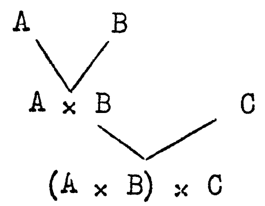
En effet, les applications principales de ces algèbres sont ces applications génétiques, et il n'est pas difficile de voir pourquoi :

Considérons un ensemble E d'individus capables de s'unir et de se reproduire, et définissons, dans cet ensemble, une loi de composition, ou produit.

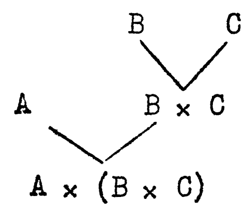
Si A et B sont deux éléments de E, l'élément $P = A \times B$, $P \in E$, est l'individu produit de l'union de A et B. Si A et B ont plusieurs enfants, la notation $A \times B$ désignera leur ensemble : on voit que cette loi n'est pas associative.

Ecrivons :

- d'une part, $(A \times B) \times C$



- d'autre part, $A \times (B \times C)$



on voit bien qu'en général :

$$(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C) .$$

I. Notions sur les "formes".

Soit un ensemble E muni d'une loi non-associative, notée multiplicativement. Nous allons donner quelques définitions qui nous serviront par la suite.

Les produits non-associatifs sont classés selon leur "forme", c'est-à-dire, selon la manière dont les facteurs sont associés sans s'inquiéter de leur identité. Ainsi, si la loi n'est pas commutative, $P = (BA.C)D$, $P' = (AB.C)D$ sont différents, mais ils ont même forme, tandis que $P'' = D(AB.C)$ est de forme différente.

Nous allons définir

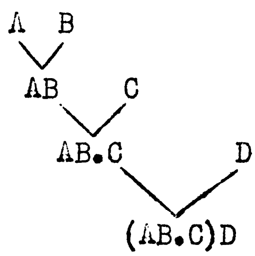
- le degré δ d'une forme. C'est le nombre d'éléments de F qui figurent dans l'écriture du produit.

Par exemple : $P = (AB.C)D$, $\delta = 4$.

- l'altitude α d'une forme. C'est le nombre de "générations" donnant naissance au produit.

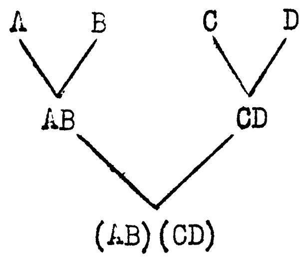
Exemple :

$(AB.C)D$ s'écrit :



d'où $\alpha = 3$

$(AB)(CD)$ s'écrit :



d'où $\alpha = 2$

II. Rappels et résultats valables dans une algèbre non-associative.

1. Axiomes de définition.

- anneau A_1 : un anneau A_1 est un ensemble muni d'une loi d'addition qui en fait un groupe abélien, et d'une loi de multiplication qui en fait un groupoïde, en supposant, de plus, la distributivité à droite et à gauche de la multiplication par rapport à l'addition. La commutativité de la loi de multiplication n'est pas supposée au départ.

- algèbre A : une algèbre A est définie de la façon suivante :

A est un anneau non-associatif ;

A est de plus un B-module unitaire, c'est-à-dire : B étant un anneau associatif, commutatif et unitaire, on a les propriétés suivantes : pour tout $x \in A$, pour tout $y \in A$, pour tout α , $\beta \in B$:

$$\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y \ , \quad (\alpha + \beta)\, x = \alpha x + \beta x$$

$$\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)\, x \ , \quad \alpha(xy) = (\alpha x)\, y = x(\alpha y) \quad .$$

Nous nous bornerons dans toute la suite aux algèbres de degré fini, dont on rappelle la définition :

On a pu trouver, dans A, n éléments $e_1, \dots, e_n$ formant une base, c'est-à-dire :

- pour tout $x \in A$, il existe $\xi_1, \dots, \xi_n$ éléments de B tels que $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$
- si $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} \eta_i e_i$, l'égalité $x = y$ entraîne $\xi_i = \eta_i$ pour tout i.

D'autre part, il résulte des axiomes de définition qu'il existe des éléments γ_{ijk} avec $i, j, k = 1, \dots, n$ tels que

$$e_i e_j = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ijk} e_k \text{ pour tout } i \text{ et tout } j .$$

On a ainsi écrit une table de multiplication de A.

2. Algèbre ayant un élément unité e. – Soit donc $e_1 = e, e_2, \dots, e_n$ une base de A.

a. Equations caractéristiques. – A tout $x \in A$, associons les transformations de matrices R_x et L_x (par rapport à la base choisie), définies par :

$$y \in A \to z' \in A, \quad z' = yx \quad \text{matrice } R_x$$
$$y \in A \to z'' \in A, \quad z'' = xy \quad \text{matrice } L_x$$

R_x et L_x sont respectivement les matrices de multiplication à droite et à gauche de x. Considérons l'équation caractéristique de R_x

$$|\lambda I - R_x| = 0, \quad \lambda^n - t_1 \lambda^{n-1} + \dots + (-1)^n \det R_x = 0$$

où les t_i sont des polynômes homogènes, en $\xi_1, \dots, \xi_n$ coordonnées de x, de degré i au plus, et cela, d'après la définition même de l'équation caractéristique. Or $x = ex = eR_x$, $x^p = eR_x^p$.

(Dans tout cet exposé la notation x^p, pour $x \in A$, signifie $[(x \times x)\ x]\ x \dots$ p fois ; il est nécessaire de le préciser, la non-associativité de la loi de multiplication rendant l'écriture " x^p " ambiguë.)

Donc si $c_d(x)$ désigne le polynôme obtenu en remplaçant, dans le premier membre de l'équation caractéristique, λ par x, on a :

$$c_d(x) = e\, c_d(R_x) = 0$$

puisque R_x est racine de son équation caractéristique.

D'où le résultat :

L'élément général $x \in A$, A, étant une algèbre non-associative ayant une base finie sur un anneau B, est racine de son équation caractéristique à droite. De même à gauche.

b. Equation principale. - Il résulte de ce qui précède qu'il existe une équation à droite :

$$\Delta_x x^p - \Delta_{x,x} x^{p-1} \dots - \Delta_{\underbrace{x,\dots x}_{p+1}} e = 0 \qquad x \in A$$

telle que p soit minimum.

C'est l'équation minima à droite de x, ou équation principale à droite de A, ou équation au rang à droite de A. p est le degré à droite de A. De même à gauche.

Remarque 1. - S'il existe une autre équation principale, son degré est nécessairement p.

Soit donc

$$\Delta_x x^p - \Delta_{x,x} x^{p-1} \dots - \Delta_{x\dots x} e = 0$$
$$\Delta'_x x^p - \Delta'_{x,x} x^{p-1} \dots - \Delta'_{x\dots x} e = 0$$

on en déduit

$$(\Delta'_x \Delta_{xx} - \Delta_x \Delta'_{xx}) x^{p-1} + \dots + (\Delta'_x \Delta_{x\dots x} - \Delta_x \Delta'_{x\dots x}) e = 0$$

p étant minimum, on a

$$\Delta'_x \Delta_{xx} = \Delta_x \Delta'_{xx} \dots \Delta'_x \Delta_{x\dots x} = \Delta_x \Delta'_{x\dots x}$$

ou encore, si $\vec{\Delta}$ et $\vec{\Delta}'$ désignent les vecteurs dont les composantes sont les coefficients des équations, éventuellement changés de signe, on a :

$$\Delta'_x \vec{\Delta} = \Delta_x \vec{\Delta}' .$$

Remarque 2. - Remplaçons x par λx

$$\lambda^p \Delta_{\lambda x} x^p - \lambda^{p-1} \Delta_{\lambda x, \lambda x} x^{p-1} \dots - \Delta_{\lambda x, \dots, \lambda x} e = 0 .$$

Si B est d'intégrité, utilisant $\Delta'_x \vec{\Delta} = \Delta_x \vec{\Delta}'$, on a

$$\Delta_x \Delta_{\lambda x, \lambda x} = \lambda \Delta_{\lambda x} \Delta_{x,x}$$

$$\dots$$

$$\Delta_x \Delta_{\lambda x, \dots, \lambda x} = \lambda^p \Delta_{\lambda x} \Delta_{x\dots x} .$$

Supposons maintenant B d'intégrité, et supposons de plus que l'on puisse prendre $\Delta_x = 1$.

Alors les remarques précédentes montrent que l'équation principale est unique et que les coefficients des x^q sont des polynômes homogènes en ξ_i de degré q ou sont identiquement nuls.

Cas où B est un corps F . – C'est a fortiori un domaine d'intégrité, et l'on y définit l'équation principale comme l'équation de plus petit degré à droite, dont le premier coefficient est 1 et dont les autres coefficients sont des fractions rationnelles en $\xi_1 \dots \xi_n$. Le lemme de Gauss permet alors de montrer que ces coefficients sont en fait des polynômes. Et on montre aussi que le polynôme principal divise le polynôme caractéristique.

3. Algèbre sans élément unité. – On se ramène au cas précédent en considérant l'algèbre A^+ , déduite de A en ajoutant $e = e_0$ élément neutre à A . On complète la base et sa loi de multiplication avec

$e = e_0\, e_1 \dots e_n$ $\gamma_{ij0} = 0$, $\forall$ (i , j) , $\gamma_{0jk} = \delta_{jk}$, $\gamma_{i0k} = \delta_{ik}$ $x^+ = x + \xi_0 e$

on écrit comme au 2° :

$$c_d^+(x^+) = x^{+(n+1)} - t_1^+\, x^{+(n)} - \dots = 0$$

équation caractéristique de x^+ .

Si l'on fait, dans cette équation, $\xi_0 = 0$, on trouve que x satisfait à

$$x\, c_d(x) = 0 \ .$$

Donc résultats analogues à ceux du 2°.

III. Axiomatisation des algèbres génétiques.

A partir d'ici, B est un corps F .

1. Algèbre pondérée.

a. Définition. – A est dite pondérée sur F , s'il existe un homomorphisme $\omega : A \to F$ tel que :

il existe $x_0 \in F$ tel que $\omega(x_0) \neq 0$

$$\omega(x + y) = \omega(x) + \omega(y) \ ; \quad \omega(xy) = \omega(x)\ \omega(y) \ ; \quad \omega(\alpha x) = \alpha\omega(x)$$

où $x , y \in A$, $\alpha \in F$. ω est la fonction poids.

Il en résulte que ω est un homomorphisme de A sur F. En effet, soit $\alpha \in F$: $\omega[\frac{\alpha x_0}{\omega(x_0)}] = \alpha$. Donc si N est le noyau de ω, c'est-à-dire : $N = \{n \in A ; \omega(n) = 0\}$, $A - N$ est de même dimension que F, c'est-à-dire 1.

b. Autre définition. - Parmi toutes les bases de A, on appelle base génétique de A, toute base $\{c_i\}$ telle que, si $c_i\, c_j = \sum_k \gamma_{ijk}\, c_k$, on ait

$$\sum_k \gamma_{ijk} = 1 , \quad \forall \quad (i , j) .$$

c. THÉORÈME. - Pour que A soit pondérée dans F, il faut et il suffit que A possède une base génétique.

Démonstration.

- Supposons qu'il existe une base génétique $\{c_i\}$, alors nous disons que la fonction ω, définie par

$$\omega(x) = \omega(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\, e_i) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$$

convient.

En effet d'abord $\omega(c_i) = 1$; de plus ω est un homomorphisme :

$$\omega(x + y) = \omega(x) + \omega(y) \qquad \omega(\alpha x) = \alpha' \omega(x)$$

ceci de façon évidente.

$$\omega(xy) = \ ? \qquad xy = \sum_{i,j} \xi_i\, \eta_j\, c_i\, c_j = \sum_{i,j} \xi_i\, \eta_j (\sum_k \gamma_{ijk}\, c_k)$$

$$xy = \sum_k (\sum_{i,j} \xi_i\, \eta_j\, \gamma_{ijk})\, c_k$$

d'où

$$\omega(xy) = \sum_{ijk} \gamma_{ijk}\, \xi_i\, \eta_j = \sum_{i,j} \xi_i\, \eta_j (\sum_k \gamma_{ijk})$$

$$\omega(xy) = \sum_{i,j} \xi_i\, \eta_j = \omega(x)\ \omega(y) .$$

- Réciproquement, supposons qu'il existe ω, fonction poids de A sur F. Soit N son noyau, et soit $b_2 , \dots , b_n$ une base de N. Il existe $b \in A$ tel que $\omega(b) = 1$.

Formons donc $\{c_i\}$ base de A définie par $c_1 = b$, $c_i = b + b_i$, $i = 2 , \dots , n$, alors $\omega(c_i) = 1$, $i = 1 , \dots , n$, d'où :

$$\omega(c_i\ c_j) = \omega(c_i) \circ \omega(c_j) = 1$$

d'autre part,

$$\omega(c_i\, c_j) = \sum_k \gamma_{ijk}$$

d'où

$$\sum_k \gamma_{ijk} = 1$$

et $\{c_i\}$ est base génétique.

Nous allons maintenant supposer le produit commutatif.

2. Algèbre génétique.

a. Définition. - Une algèbre A, commutative, pondérée sur F, sera dite génétique si elle satisfait à la définition suivante :

Soit comme plus haut R_x la matrice de multiplication à droite de $x \in A$.

Soit T un élément de l'algèbre des transformations de A

$$T = \alpha I + f(R_{x_1}, \dots, R_{x_p})$$

$\alpha \in F$, I identité, $x_i \in A$, f polynôme. Alors s'il existe ω telle que, pour tout T de cette forme, les coefficients du polynôme caractéristique de T, dans la mesure où ils dépendent des x_i, ne dépendent que des $\omega(x_i)$, A est algèbre génétique.

b. THÉORÈME. - Soient A l'algèbre génétique et N noyau de ω. Si on a

$$T = f(R_{n_1}, \dots, R_{n_m}) \qquad n_i \in N$$

alors $T^n = 0$.

En effet

$$|\lambda I - T| = \lambda^n + t_1\, \lambda^{n-1} \dots - t_n$$

avec t_j polynômes dont les termes constants sont t_{j_0}.

D'abord, $t_{j_0} = 0$, $\forall\ j$.

En effet, si l'on fait $n_i = 0$, $\forall\ i$,

$$|\lambda I - T| = \lambda^n - t_{1_0}\, \lambda^{n-1} \dots - t_{n_0}$$

et $|\lambda I - T| = \lambda^n$, puisque $T = 0$, donc $t_{j_0} = 0$, $\forall\ j$.

D'autre part A étant génétique, les t_j ne dépendent que des $\omega(n_i)$, comme $n_i \in N$, $\omega(n_i) = 0$, et de plus $t_{j_0} = 0$, donc $|\lambda I - T| = \lambda^n$.

Donc l'équation caractéristique de T est $\lambda^n = 0$, donc $T^n = 0$.

Cette notion d'algèbre génétique est une généralisation de la notion introduite par ETHERINGTON de "train algebra".

3. "Train algebra".

a. Définition. - Une algèbre commutative pondérée sera dite "train algebra" quand les coefficients de l'équation principale dépendront seulement des $\omega(\xi_i)$, $(x = \sum_1^n \xi_i\, e_i)$, c'est-à-dire qu'il existe $\beta_1 \dots \beta_{r-1} \in F$, tels que l'équation principale s'écrive

$$x^r + \beta_1\, \omega(x)\, x^{r-1} + \dots + \beta_{r-1}[\omega(x)]^{r-1}\, x = 0$$

ceci d'après l'étude de l'équation principale faite au § II.

b. THÉORÈME. - Une algèbre génétique sur F est train algebra sur F.

En effet, soit A génétique sur F et soit $T = R_x$.

$$\varphi(\lambda) = |\lambda I - R_x| = \lambda^n + \gamma_1\, \omega(x)\, \lambda^{n-1} + \dots + \gamma_n[\omega(x)]^n \quad \text{avec} \quad \gamma_i \in F .$$

En faisant une extension finie de F

$$\varphi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1\, \omega) \dots (\lambda - \lambda_n\, \omega) \qquad \lambda_i \in F$$

soit

$$\psi(\lambda) = \lambda^r + \psi_1\, \lambda^{r-1} + \dots + \psi_{r-1}\, \lambda$$

l'équation principale. D'après II, elle divise $\lambda\varphi(\lambda)$, d'où l'on peut écrire

$$\lambda^r + \dots + \psi_{r-1}\, \lambda = \lambda(\lambda - \lambda_1\, \omega) \dots (\lambda - \lambda_{r-1}\, \omega)$$

$$\psi_j = (-1)^j\, \omega^j \quad \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_j}$$

et A est une train algebra.

4. "Spécial train algebras".

a. Définition. - Une algèbre pondérée commutative est dite "spécial train algebra" lorsque :

- N est nilpotent d'altitude α, c'est-à-dire : tous les produits (d'éléments quelconques de A) d'altitude α sont nuls.

- $N, N^1, \dots, N_1^k - N^{\alpha-1}$ [N^k = ensemble des combinaisons linéaires des produits d'altitude k] sont des idéaux.

b. Décomposition canonique. - Exploitons les hypothèses de définition.

– A pondérée. – Choisissons une base de A, telle que $e_1 \dots e_{n-1} \in N$, N noyau de ω, et, $e_n = a$ de poids 1.

Alors

$$a^n = a + (e) \qquad a\, e_i = (e) \qquad e_i\, e_j = (e)$$

en désignant par (e) une combinaison linéaire quelconque des e_k.

– N nilpotent d'altitude α. – On a

$$0 \subset N^{\alpha-1} \subset N^{\alpha-2} \dots \subset N^1 \subset N$$

avec l'inclusion stricte, puisque $N^\alpha = \{0\}$. Nous pouvons donc réaliser une partition de la base de N en E_0-éléments, E_1-éléments, ..., E_k-éléments, ... ainsi définis :

Les E_0-éléments appartenant à N et non à N^1, les E_1-éléments à N^1 et non à N^2, ..., les $E_{\alpha-2}$-éléments à $N^{\alpha-2}$ et non à $N^{\alpha-1}$, ..., les $E_{\alpha-1}$-éléments à $N^{\alpha-1}$. Alors le produit de deux E_0-éléments appartient à N^1 (par définition), celui de deux E_k-éléments à N^{k+1}.

– N^1, N^2, – $N^{\alpha-1}$ sont des idéaux. – Alors, a multiplié par E_k-élément donne une combinaison linéaire de E_k, E_{k+1} ... Considérons maintenant chaque ensemble E_θ d'éléments de la base, comme formant un vecteur dont les composantes sont les éléments de E_θ :

$$a\, E_\theta = p_\theta\, E_\theta + q_\theta\, E_{\theta+1} + \dots$$

où p_θ est une matrice carrée et q_θ, r_θ ... sont des matrices rectangulaires en général.

Une transformation linéaire de A sur les E_θ, soit H, donne $F_\theta = H(E_\theta)$, $E_\theta = H^{-1}(F_\theta)$.

$$a\, F_\theta = H\, p_\theta\, H^{-1}(F_\theta) + H\, q_\theta\, E_{\theta+1} + \dots$$

Si H est la matrice qui transforme p_θ en matrice diagonale et si cela a été fait pour chaque E_θ, A a été ramenée à sa forme canonique.

Pour la suite, il suffira que chaque p_θ ait été réduite à sa forme jacobienne c'est-à-dire qu'elle ait ses valeurs propres sur la diagonale principale et des 0 en dessous.

Alors en notant λ_i les valeurs propres des matrices p_θ (il y a $n\lambda_i$ en tout) si

$$x = \xi a + \sum_{1}^{n-1} \alpha_i\, e_i \quad \text{alors} \quad \xi = \omega(x)$$

$$R_x = \begin{pmatrix} \xi\lambda_1 & ** & & ** \\ 0 & \xi\lambda_2 & & ** \\ 0 & 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & & \xi\lambda_n \end{pmatrix}$$

c. THÉORÈME. - Une "special train algebra" est une algèbre génétique sur F.

Soit $f(R_{x_1} \ldots R_{x_p})_n + \alpha I = T$. Alors d'après la forme de R_x

$$f(R_{x_1}, \ldots, R_{x_p}) = \begin{pmatrix} f(\xi_1 \lambda_1, \xi_2 \lambda_1, \ldots) \ldots & & \\ 0 & f(\xi_1 \lambda_2, \xi_2 \lambda_2, \ldots) \ldots & \\ 0 & 0 & f(\xi_1 \lambda_N, \ldots) \end{pmatrix}$$

d'où

$$|\lambda I - T| = |(\lambda - \alpha) I - f(R_{x_1} \ldots R_{x_p})|$$

$$= (\lambda - \alpha - \eta_1)(\lambda - \alpha - \eta_2) \ldots (\lambda - \alpha - \eta_n)$$

avec $\eta_i = f(\xi_1 \lambda_i, \xi_2 \lambda_i, \ldots, \xi_p \lambda_i)$, donc les coefficients de $|\lambda I - T|$ ne dépendent que des $\omega(x_i)$ puisqu'ils ne dépendent que des $\xi_i = \omega(x_i)$ et des λ_i.

A est une algèbre génétique.

Nous allons voir maintenant quelques exemples particuliers d'algèbres utilisées en génétique, et tout d'abord nous allons rappeler quelques notions sur l'hérédité mendélienne.

B. Algèbres utilisées en génétique.

I. Notions sur l'hérédité mendélienne.

Si nous considérons chez une espèce quelconque les cellules reproductrices, elles contiennent $2n$ chromosomes, n paires de chromosomes.

Si nous classons les individus de cette espèce relativement à un caractère héréditaire déterminé, par exemple chez l'homme la couleur des yeux, chez certaines mouches la forme des ailes, etc., il se trouve que les modalités de ce caractère se trouvent déterminées, par une paire bien définie de chromosomes parmi les n paires, et de plus, se trouvent localisées à un endroit bien déterminé sur chaque chromosome de la paire en question ; cet endroit est appelé "locus". Donc, à chaque locus de cette paire se trouve "quelque chose", qui déterminera la modalité du caractère chez l'individu en question. Ce "quelque chose" s'appelle un gène.

Considérons donc un individu I , relativement à un caractère C . Prenons pour fixer ces idées l'exemple classique des belles de nuits, et le caractère : couleur. Des deux gènes qui déterminent la couleur, l'un vient du père et l'autre de la mère. Supposons que l'un des parents de I soit une belle de nuit rouge : il a transmis à I le gène R , et que l'autre soit une belle de nuit blanche : il a transmis à I le gène B . I se trouve avoir pour formule RB . L'un de ses deux chromosomes porte R , l'autre B . On représente le "parent rouge" par RR , le blanc par BB . I est rose = RB .

Si maintenant nous croisons deux individus RB ensemble, ils donneront :

$$RR \qquad RB \qquad BB$$

en proportion : $\frac{1}{4}$ RR , $\frac{1}{2}$ RB , $\frac{1}{4}$ BB .

Pour justifier le symbolisme qui va suivre, et qui est classique, introduisons la notion de gène dominant et gène récessif.

Soient D et R les deux modalités d'un caractère. Dans certains cas il se trouve que "l'hétérozygote", c'est-à-dire l'individu ayant pour formule DR , est apparemment identique à l'individu DD . Le gène D domine alors le gène R , qui est dit récessif.

Nous pouvons alors maintenant introduire nos premiers exemples.

II. Algèbres gamétiques et zygotiques de l'hérédité mendélienne simple.

1. Algèbre gamétique.

Considérons une population formée d'individus DD (ou D^2), DR , RR (ou R^2). Ces individus sont capables de fournir les "gamètes" D et R , dans une certaine proportion. C'est ce que va exprimer la définition de l'algèbre gamétique.

Considérons l'algèbre engendrée sur le corps des réels par (D , R) ; la loi d'addition signalant simplement la présence des deux gamètes $P = \alpha D + \beta R$ signifie que, dans une population P , on peut trouver le gamète D avec la proportion α , le gamète R avec la proportion β (d'où $\alpha + \beta = 1$), la loi de multiplication rendant compte des lois de l'hérédité :

$$D^2 = DD = D \qquad DR = \frac{1}{2} D + \frac{1}{2} R \qquad R^2 = RR = R \ .$$

En effet les indivudus DD libèrent le gamète D , les DR une proportion égale de D et de R , et RR le gamète R .

Un élément de cette algèbre est donc l'élément général $P = \alpha D + \beta R$ avec $\alpha + \beta = 1$. On voit facilement que, d'après ces définitions, la base (D , R) est une base génétique, donc que l'algèbre est pondérée.

De façon plus générale, considérons un corps F de caractéristique $\neq 2$ et, sur F, l'algèbre commutative $A = (u_1 , u_2)$ avec $u_1^2 = u_1$, $u_1 u_2 = \frac{1}{2} u_1 + \frac{1}{2} u_2$, $u_2^2 = u_2$. Il est facile de voir que ce produit n'est pas associatif :

$$u_1(u_2^2) = u_1 u_2 = \frac{1}{2} u_1 + \frac{1}{2} u_2 \qquad (u_1 u_2) u_2 = \frac{1}{4} u_1 + \frac{3}{4} u_2 .$$

Un changement de base, $u = \frac{u_1 + u_2}{2}$, $z = u_1 - u_2$ donne $A = (u , z)$, $u^2 = u$, $uz = \frac{1}{2} z$, $z^2 = 0$. Alors soit $x = \xi u + \eta z$. On voit que $\omega(x) = \xi$ convient. Le noyau N est (z). On a $N^2 = 0$. On voit que A est "special train algebra". Ecrivons $R_x = \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ \frac{1}{2}\eta & \frac{1}{2}\xi \end{pmatrix}$. Quel que soit, dans $T = \alpha I + f(R_{x_1} \dots R_{x_p})$, la forme du polynôme f, on voit que, parmi ses termes, ne figureront que des matrices carrées avec les 0 en première ligne deuxième colonne, donc que les coefficients de $|\lambda I - T|$ ne dépendront que des ξ_i, c'est-à-dire des $\omega(x_i)$.

2. Algèbre zygotique.

Considérons toujours une population formée de DD, DR, RR. Et appelons $A = DD$, $B = DR$, $C = RR$. Considérons l'algèbre engendrée par (A , B , C) sur le corps des réels, avec la même loi d'addition qu'au § 1, et la loi de multiplication rendant compte des lois de croisement des "génotypes", A, B, C.

$$A^2 = (DD)(DD) = A \quad B^2 = (DR)(DR) = \frac{1}{4} A + \frac{1}{2} B + \frac{1}{4} C \qquad C^n = (RR)(RR) = C$$

$$BC = (DR)(RR) = \frac{1}{2} B + \frac{1}{2} C \qquad CA = (RR)(DD) = B \qquad AB = (DD)(DR) = \frac{1}{2} A + \frac{1}{2} B .$$

Un élément de l'algèbre est comme ci-dessus $P = \alpha A + \beta B + \gamma C$ avec $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

Plus généralement, considérons sur F l'algèbre $A = (a , b , c)$ avec $a^2 = a$, $b^2 = \frac{1}{4} a + \frac{1}{2} b + \frac{1}{4} c$, $c^2 = c$, $bc = \frac{1}{2} b + \frac{1}{2} c$, $ca = b$, $ab = \frac{1}{2} a + \frac{1}{2} b$, et faisons un changement de base pour avoir $A = (u , v , w)$, $u^2 = a$, $uv = \frac{1}{2} v$, $v^2 = \frac{1}{4} w$, $uw = vw = w^2 = 0$, $x = \xi u + \eta v + \Sigma_w$. On peut prendre $w(x) = \xi$, et le N noyau est $N = (v , w)$.

On a $N^2 = (w)$, $N^3 = 0$. A est "special train algebra".

On voit que ces deux exemples d'algèbres ne sont pas indépendants. On les déduit facilement l'une de l'autre, et le procédé par lequel on obtient la deuxième s'appelle la duplication, ce que nous allons étudier maintenant.

III. Duplication des algèbres commutatives.

1. Définition.

Soit A une algèbre commutative d'ordre n sur F, et soit $u_1 \dots u_n$ une base de A avec

$$u_i\, u_j = \sum_k \gamma_{ijk}\, u_k \,.$$

Définissons A' de la façon suivante = A' est commutative d'ordre $\frac{n(n+1)}{2}$ sur F et ses éléments de base sont v_{ij}, $i \leqslant j$, $i, j = 1, \dots, n$, avec pour loi de multiplication

$$v_{ij}\, v_{rs} = \sum_{k,t} \gamma_{ijk}\, \gamma_{rst}\, v_{kt} \quad \text{où} \quad v_{kt} = v_{tk}\,, \quad t > k$$

la définition de A' est indépendante du choix de la base, car l'on peut voir facilement que A isomorphe à A_1 entraîne A' isomorphe à A_1'. A' est dite déduite par duplication de A.

a. A pondérée entraîne A' pondérée. – En effet, si l'on a pu prendre

$$w(x) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \quad \text{pour} \quad x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i\, u_i \quad \text{dans} \quad A$$

on voit facilement que dans A' on peut prendre

$$w'(x') = \sum_{i,j} \xi_{ij} \quad \text{avec} \quad x' = \sum_{i,j} \xi_{ij}\, v_{ij}\,.$$

b. Définition d'un homomorphisme de A' dans A.

$H : A' \to A$.

$v_{ij} \in A' \to H(v_{ij}) = u_i\, u_j = \sum_k \gamma_{ijk}\, u_k \in A$.

D'où le transformé de l'élément $x' \in A'$.

$$x' = \sum_{i,j} \xi_{ij}\, v_{ij} \qquad H(x') = \sum_{i,j} \xi_{ij} \Big(\sum_k \gamma_{ijk}\, u_k\Big)$$

$$H(x') = \sum_k \Big(\sum_{i,j} \xi_{ij}\, \gamma_{ijk}\Big)\, u_k\,.$$

En fait H est un homomorphisme de A' sur A^2 puisque les $u_i\, u_j$ engendrent A^2. Soit Ω' le noyau de H.

c. Le noyau Ω' est tel que $\Omega' A' = 0$. – En effet, soit $\omega' \in \Omega'$.

$$\omega' = \sum_{i,j} \xi_{ij}\, v_{ij} \qquad H(\omega') = \sum_k \Big(\sum_{i,j} \xi_{ij}\, \gamma_{ijk}\Big)\, u_k$$

comme $H(\omega') = 0$, on a

$$\sum_{i,j} \xi_{ij} \gamma_{ijk} = 0 \qquad \forall \ k .$$

Si nous prouvons que $\omega' v_{rs} = 0$, v_{rs} étant un élément quelconque de la base de A', nous aurons prouvé la proposition $\Omega' A' = 0$.

Or,

$$\omega' v_{rs} = \sum_{i,j} \xi_{ij} v_{ij} v_{rs} = \sum_{i,j} \xi_{ij} (\sum_{k,t} \gamma_{ijk} \gamma_{rst} v_{kt})$$

$$\omega' v_{rs} = \sum_{k,t} (\sum_{i,j} \xi_{ij} \gamma_{ijk}) \gamma_{rst} v_{kt} = 0 .$$

2. LEMME. - Soit $a' \in A'$, soit $R'_{a'}$ une matrice de multiplication de a' dans A'.

$T' = \alpha I' + f(R'_{a'_1}, \dots, R'_{a'_p})$ est un élément de l'algèbre des transformations de A'.

Soit $T = \alpha I + f(R_{a_1}, \dots, R_{a_p})$ l'élément de l'algèbre des transformations de A tel que $a_i = H(a'_i)$.

Alors nous allons prouver le résultat :

$$|\lambda I' - T'| = (\lambda - \alpha)^{1/2(n-1)n} |\lambda I - T| .$$

<u>Démonstration</u>. - Soient Ω' le noyau de H, et m son ordre. On peut écrire

$$A' = \Omega' + \Omega'_1 \text{ avec ordre de } \Omega'_1 = p = \frac{1}{2} n(n+1) - m .$$

Si l'on écrit A' sous cette forme, se souvenant que $\Omega' A' = 0$, la matrice $R'_{a'}$ s'écrit

$$R'_{a'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ M_{a'} & N_{a'} \end{pmatrix}$$

$M_{a'}$ et $N_{a'}$ étant des matrices $p \times m$ et $p \times p$ respectivement.

Comme $A' - \Omega'$ est isomorphe à A^2, on peut considérer $N_{a'}$ comme la matrice de multiplication à droite correspondant à $H(a')$ dans A^2

$$N_{a'} = R^*_{H(a')} \quad \text{avec} \quad a = H(a') \in A^2$$

et $R'_{a'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ * & R^*_a \end{pmatrix}$.

Alors

$$f(R'_{a'_1} \dots R'_{a'_p}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ & \\ * & f(R^*_{a_1}, \dots, R^*_{a_p}) \end{pmatrix}$$

$$f(R_{a_1} \dots R_{a_p}) = \begin{pmatrix} f(R^*_{a_1}, \dots, R^*_{a_p}) & 0 \\ * & 0 \end{pmatrix} .$$

Alors $$|\lambda I' - T'| = (\lambda - \alpha)^m \,|(\lambda - \alpha)\, I_p - f(R^*_{a_1}, \dots, R^*_{a_p})| .$$

Or $$|\lambda I - T| = (\lambda - \alpha)^{n-p} \,|(\lambda - \alpha)\, I_p - f(R^*_{a_1}, R^*_{a_p})$$

d'où $$|\lambda I' - T'| = (\lambda - \alpha)^{m-(n-p)} \,|\lambda I - T|$$

c'est-à-dire

$$|\lambda I' - T'| = (\lambda - \alpha)^{(n(n-1))/2} \,|\lambda I - T| .$$

3. THÉORÈME. — A' algèbre déduite par duplication d'une algèbre A génétique est une algèbre génétique. En effet, si A admet comme fonction poids ω, prenons pour ω' dans A'

$$\omega'(a') = \omega(H(a')) .$$

D'après le lemme précédent les coefficients de $|\lambda I' - T'|$ dépendent seulement des $\omega(a_i)$, c'est-à-dire des $\omega(H(a'_i))$, c'est-à-dire des $\omega'(a'_i)$. A' est génétique.

4. Application.

On voit facilement que l'algèbre zygotique étudiée ci-dessus est déduite par duplication de l'algèbre gamétique. L'algèbre gamétique, étant "special train algebra" donc a fortiori, algèbre génétique, l'algèbre zygotique est donc génétique d'après le théorème qui précède. Elle est d'ailleurs davantage puisqu'elle est "special train algebra".

Autre exemple : Considérons l'algèbre déduite par duplication de l'algèbre zygotique, elle est engendrée par :

$$E = AA \; ; \quad F = BB \; ; \quad G = CC \; ; \quad H = BC \; ; \quad I = CA \; ; \quad J = AB$$

avec comme table :

$$(AA)^2 = E^2 = E \qquad F^2 = \frac{1}{16} E + \frac{1}{4} F + \frac{1}{16} G + \frac{1}{4} H + \frac{1}{8} I + \frac{1}{4} J \qquad \text{etc.}$$

Par changement de base, nous aurons

$$A = (v , p_1 , p_2 , p_3 , p_4 , p_5)$$

avec $v^2 = v$; $v_{p_1} = \frac{1}{2} p_1$; $v_{p_2} = \frac{1}{4} p_3$; $p_1^2 = \frac{1}{4} p_2$; $p_1 p_2 = \frac{1}{8} p_4$; $p_2^2 = \frac{1}{16} p_5$; $v_{p_j} = p_i p_j = 0$ pour $i = 1, \dots, 5$, $j = 3, 4, 5$. Ecrivant $x = \xi v + \sum_i n_i p_i$, $\omega(x) = \xi$

$N = (p_1 , p_2 , p_3 , p_4 , p_5) \qquad N^2 = (p_2 , p_4 , p_5) \qquad N^3 = (p_4 , p_5) \qquad N^4 = 0$.

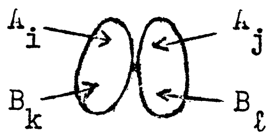
Cependant A n'est pas "special train algebra" car AN^2 n'est pas
$N^2 = vp_2 = \frac{1}{4} p_3 \notin N^2$, N^2 n'est pas un idéal de A .

Cependant A est une algèbre génétique d'après le théorème précédent.

IV. Autre exemple : "crossing-over".

Nous avons jusqu'à présent considéré un seul caractère n'ayant que deux modalités. Or un caractère peut présenter plusieurs modalités, par exemple les groupes sanguins chez l'homme (4 modalités). D'autre part on peut étudier la transmission conjointe de deux caractères à la fois, ou plus.

Supposons donc deux caractères A et B ; A ayant m modalités et B ayant p modalités. Supposons de plus que ces caractères sont localisés sur la même paire de chromosomes. Un individu I possèdera donc une paire de chromosomes ainsi faite



Théoriquement, dans le croisement avec un autre individu, I devrait transmettre soit le couple de gènes $A_i\ B_k$, soit le couple $A_j\ B_\ell$. Or l'expérience prouve qu'il n'en est rien. Pendant la durée des phénomènes subis par les cellules reproductrices, il arrive qu'il y ait comme l'on dit "crossing-over", c'est-à-dire que I peut transmettre $A_i\ B_\ell$ ou $A_j\ B_k$: ce que l'on exprime :

$$AB.A'B' = \frac{1}{2}(1-\omega)(AB + A'B') + \frac{1}{2}\omega(AB' + A'B')$$

ω est la fréquence de recombinaison. Elle est souvent faible, mais intervient souvent de façon non négligeable.

Il y a mp éléments de base $A_i\ B_\ell$

$$x = \sum_{i,\ell} \alpha_{i\ell} A_i\ B_\ell \qquad \sum_{i,\ell} \alpha_{i\ell} = 1 .$$

Plus généralement, soit A l'algèbre sur F engendrée par les $A_i\ B_\ell$,
$i = 1 , \ldots , m$, $\ell = 1 , \ldots , p$ avec

$$A_i\ B_\ell\ \ A_j\ B_k = \frac{1}{2}(1-\omega)(A_i\ B_\ell + A_j\ B_k) + \frac{\omega}{2}(A_i\ B_k + A_j\ B_\ell) \qquad x = \sum_{i,\ell} \alpha_{ik} A_i\ B_\ell .$$

Etudions cette algèbre.

Pour cela posons :

$$A_0\ B_0 = I$$

$$u_j = A_0\ B_j - A_0\ B_0\ , \quad j = 1\ ,\ \dots\ ,\ p - 1$$

$$v_i = A_i\ B_0 - A_0\ B_0\ , \quad i = 1\ ,\ \dots\ ,\ m - 1$$

$$w_{ij} = (A_0\ B_j - A_0\ B_0)(A_i\ B_0 - A_0\ B_0)$$

$A_0\ B_0$ est un élément choisi au hasard et définitivement fixé, il y a $(p - 1)$ u_j , $(m - 1)$ v_i et $(m - 1)(p - 1)$ w_{ij} ; et avec I , cela fait :

$$1 + (m - 1) + (p - 1) + (m - 1(p - 1) = mp \quad \text{éléments}$$

exprimons

$$w_{ij} = u_i\ v_j \quad w_{ij} = (A_0\ B_j - A_0\ B_0)(A_i\ B_0 - A_0\ B_0)$$

tous calculs effectués :

$$w_{ij} = \frac{\omega}{2}\ (A_i\ B_j - A_0\ B_0 - (v_i + u_j))$$

on voit ainsi que les I , u_j , v_i , w_{ij} sont indépendants. Etant au nombre de mp , ils forment une base de A . D'autre part, en prenant pour fonction poids la somme des coordonnées,

$$\omega(I) = 1 \qquad \omega(u_j) = \omega(v_i) = \omega(w_{ij}) = 0\ .$$

Donc le noyau de A est

$$N = (u_j\ ,\ v_i\ ,\ w_{ij}) \qquad i = 1\ ,\ \dots\ ,\ p\ , \quad j = 1\ ,\ \dots\ ,\ m\ .$$

D'autre part, on a

$$Iu_j = A_0\ B_0(A_0\ B_j - A_0\ B_0) = \frac{1}{2}\ (1 - \omega)(A_0\ B_0 + A_0\ B_j) + \frac{\omega}{2}\ (A_0\ B_j + A_0\ B_0) - A_0\ B_0$$

$$Iu_j = \frac{1}{2}\ (A_0\ B_j - A_0\ B_0) \qquad Iu_j = \frac{1}{2}\ u_j$$

de même $Iu_j = \frac{1}{2}\ v_j$.

D'autre part, $u_0^2 = 0$, $v_i^2 = 0$

$$u_j\ v_i = w_{ij}$$

$$Iw_{ij} = \frac{(1 - \omega)\ \omega}{4}\ w_{ij} \qquad u_j\ w_{ij} = (\frac{\omega}{2} - 1)\ w_{ij} \qquad w_{ij}^2 = 0\ .$$

Il en résulte que A est "special train algebra" avec

$$N = (u_j\ ,\ w_{ij}\ ,\ v_i) \quad \text{et} \quad N^1 = (w_{ij})\ , \quad N^2 = (0)\ .$$

Nous allons en déduire l'équation principale de A

$$x = \xi I + \sum \alpha_i\ v_i + \sum \beta_j\ u_j + \sum \gamma_{ij}\ w_{ij}$$

$$x(x - \xi) = x^2 \xi x$$

$$x^2 = \xi^2 I + \sum \xi \alpha_i v_i + \sum \xi \beta_j u_j + \text{termes en } w_{ij}$$

$$x^2 - \xi x = \text{termes en } w_{ij} = \lambda w_{ij}$$

$$(x^2 - \xi x)\, x = \text{termes en } w_{ij} = \lambda \times \frac{\xi(1 - \omega)}{2} w_{ij}$$

$$(x^2 - \xi x)\left(x - \frac{\xi(1 - \omega)}{2}\right) = 0 \ .$$