Guy Renault

Étude des sous-modules compléments dans un A-module

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 16, n° 2 (1962-1963), exp. n° 16, p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1962-1963__16_2_A5_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et théorie des nombres)
16e année, 1962/63, n° 16

1er avril 1963

ÉTUDE DES SOUS-MODULES COMPLÉMENTS DANS UN A-MODULE

par Guy RENAULT

1. Rappels.

Soit A un anneau unitaire ; on considérera dans la suite des A-modules à gauche.

Définition [2]. - Soit N un sous-module de M, et soit X un sous-module de M pour lequel $X \cap N = (0)$, X étant maximal pour cette propriété ; X sera appelé un sous-module complément relatif de N dans M, et on appellera sous-module complément un sous-module X pour lequel il existe un sous-module N dont X est complément relatif.

Rappelons qu'un module M est extension essentielle d'un sous-module N si, pour tout sous-module P de M, la relation $P \cap N = (0) \implies P = (0)$.

PROPOSITION 1. - *Pour qu'un sous-module X de M soit un sous-module complément dans M, il faut et il suffit qu'il n'admette pas d'extension essentielle propre dans M.*

Soit P une extension essentielle de X, où X est complément relatif de N, $X \cap N = (0)$, d'où $P \cap N = (0)$, et par suite $P = X$. Réciproquement, soit X un sous-module de M sans extension essentielle propre dans M, soit N un complément relatif de X, il existe un complément relatif P de N contenant X, soit Q un sous-module de P tel que $Q \cap X = (0)$, on a $(Q \oplus N) \cap X = (0)$, d'où $Q = (0)$, et par suite P est extension essentielle de X, d'où $P = X$.

On sait que tout A-module M est plongé dans une extension essentielle maximale de M qui est un A-module injectif appelé enveloppe injective de M et qui sera noté $E(M)$.

2. Relations entre les sous-modules compléments dans M et les sous-modules injectifs de E/M.

PROPOSITION 2. - *Soit M un A-module extension essentielle d'un sous-module N, alors la trace sur N d'un sous-module complément X dans M est un sous-module complément dans N.*

Soit X un sous-module complément dans M, X est un sous-module complément relatif à X' ; $X \cap N$ et $X' \cap N$ sont des sous-modules de N non nuls (on écarte le cas trivial où $X = (0)$ ou $X = M$), et on a

$$(X \cap N) \cap (X' \cap N) = (0) .$$

Soit S un complément relatif dans N de $X' \cap N$ contenant $X \cap N$, on a

$$S = S + X \cap N = (S + X) \cap N ,$$

et on a la relation

$$((S + X) \cap N) \cap X' \cap N = (0) .$$

N est essentiel dans M, cela implique $(S + X) \cap N = (0)$ et par suite $S \subset X$.

Soient X un sous-module complément dans M et $E(X)$ une enveloppe injective de X contenue dans $E(M)$, $E(X) \cap M$ est extension essentielle de X, et par suite $E(X) \cap M = X$ (proposition 1) ; les sous-modules compléments dans $E(M)$ sont des sous-modules injectifs, et compte tenu de la proposition 2, on a le résultat :

THÉORÈME 1. - Pour qu'un sous-module X de M soit un sous-module complément dans M, il faut et il suffit que X soit la trace sur M d'un sous-module injectif de $E(M)$.

Exemple. - Un A-module M est quasi-injectif [4] s'il vérifie la condition suivante :

soient N un sous-module de M et f un homomorphisme de N dans M, alors f se prolonge en un endomorphisme de M ; on montre que la condition précédente est équivalente à la propriété suivante :

M est stable pour tout endomorphisme de $E(M)$.

Donnons un exemple assez général de tels modules ; soient B l'anneau des endomorphismes d'un module injectif I et Λ un idéal bilatère de B et soit

$$M = \bigcap_{\varphi \in \Lambda} \ker \varphi ,$$

M est alors quasi-injectif en particulier le coeur [5] d'un module est quasi-injectif.

Les sous-modules compléments dans un module quasi-injectif sont des facteurs directs, et si X est un sous-module complément dans M et N un sous-module quelconque tout homomorphisme de N dans X se prolonge en un endomorphisme de M dans X.

Nous allons utiliser le résultat précédent pour étudier les sous-modules compléments minimaux (resp. maximaux).

THÉORÈME 2. - Soit M un A-module et X un sous-module de M, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) X est un sous-module complément minimal,

(ii) X est un sous-module complément co-irréductible (i. e., (0) est $\cap$-irréductible dans X).

D'après le théorème 1, la condition (i) est équivalente au fait que $E(X)$ ne contient aucun sous-module injectif et par suite $E(x)$ est un injectif indécomposable. On voit aisément que si M est tel que $E(M)$ soit somme directe d'un nombre fini n de sous-modules injectifs et indécomposables, alors les chaînes maximales de sous-modules compléments ont pour longueur n. Ces derniers résultats répondent à une question posée dans [5]. (Cf. également [2], p. 202.)

THÉORÈME 3. - Soit X un sous-module complément maximal dans M alors $E(M/X)$ est isomorphe à un sous-module injectif et indécomposable de $E(M)$ et X est un sous-module $\cap$-irréductible minimal de M.

D'après le théorème 1, X est un sous-module complément maximal dans $M \iff E(X)$, est un sous-module injectif maximal de $E(M) \iff E(M)/E(X)$, est un sous-module injectif et indécomposable, d'autre part on a

$$E(M/X) \cong E(M)/E(X) ;$$

la deuxième assertion résulte du lemme suivant :

LEMME 1. - Soient N un sous-module de M et X un sous-module complément dans M contenant N, alors X/N est un sous-module complément dans M/N.

La démonstration de ce lemme est immédiate.

3. Définition et étude d'un sous-module particulier du A-module M.

Soit M un A-module ; nous allons montrer qu'il existe un sous-module $\Gamma(M)$ de M, tel que l'intersection de deux sous-modules compléments dans $\Gamma(M)$ soit un sous-module complément.

On considère l'ensemble B' des endomorphismes essentiels φ de $E(M)$ satisfaisant aux propriétés suivantes :

(i) il existe un A-module injectif K tel que $\ker \varphi = K \oplus H$,

(ii) $\varphi(E(M)) \subset K$.

On pose

$$\Gamma(E) = \bigcap_{\varphi \in B'} \ker \varphi \quad \text{et} \quad \Gamma(M) = M \cap \Gamma(E) \ .$$

LEMME 2. - Soient N un sous-module de $\Gamma(E)$ et I une enveloppe injective de N contenue dans $E(M)$, alors $N \subset \Gamma(I)$.

Soit φ un endomorphisme essentiel de I satisfaisant aux conditions (i) et (ii) ; soit $\varphi' = \varphi \circ p$ où p est la projection de $E(M)$ sur I parallélement à K', où K' est un supplémentaire de I dans E.

φ' est un endomorphisme de $E(M)$ de noyau $\ker \varphi \oplus K'$, c'est donc un endomorphisme essentiel qui satisfait de façon évidente à (i) et (ii), et par suite $\ker \varphi' \supset N$; d'où $\ker \varphi \supset N$ et $N \subset \Gamma(I)$.

LEMME 3. - Soient I et I' deux sous-modules injectifs de $E(M)$ tels que $I \cap M$ et $I' \cap M$ sont extensions essentielles différentes de $I \cap I' \cap M$; alors $\Gamma(E) \not\supset M$.

Soit N un complément relatif de $I' \cap M$, on a

$$E(M) = E(N) \oplus I' , \quad \text{et} \quad E(N) \cap I = (0) \ ;$$

sinon $E(N)$ rencontrerait $I \cap M$ suivant un sous-module non nul, et par hypothèse $I \cap M$ est extension essentielle de $I \cap I' \cap M$, d'où $E(N) \cap I' \cap M \neq (0)$. On en déduit que I et I' ont les mêmes modules supplémentaires dans $E(M)$ et on a

$$E(M) = I \oplus E(N) = I' \oplus E(N) \ .$$

Soit x un élément quelconque de $E(M)$; on a $x = i + n = i' + n'$, où n et $n' \in E(N)$. On pose $\varphi(x) = i - i' = n' - n$; il est clair que φ est un endomorphisme de noyau $I \cap I' \oplus E(N)$, il satisfait aux conditions (i) et (ii), et par hypothèse on a $\varphi(M) \neq (0)$.

Les lemmes 2 et 3 entrainent la propriété suivante :

THÉORÈME 4. - L'intersection de deux sous-modules compléments dans $\Gamma(M)$ est un sous-module complément.

En particulier si $E(M) = \Gamma(E)$, alors l'intersection de deux sous-modules injectifs de $E(M)$ est un sous-module injectif.

THÉORÈME 5. - Soit E un A-module injectif, pour que $E = \Gamma(E)$ il faut et il suffit que l'intersection de deux sous-modules injectifs de E soit un sous-module injectif.

Si $E \neq \Gamma(E)$, il existe un endomorphisme φ essentiel, tel que $\ker \varphi = K \oplus H$ avec $\ker \varphi \neq E$, posons $\psi(x) = x - \varphi(x)$, $\psi(x)$ est une injection, si I désigne une enveloppe injective de H, on a

$$I \cap \psi(I) = H .$$

On peut généraliser le résultat précédent de la façon suivante :

Soit P un module essentiel dans $E(M)$, P étant quasi-injectif et tel que l'intersection de deux sous-modules compléments dans P soit un sous-module complément, alors $P \subset \Gamma(E)$.

Exemple. - Considérons le $\underset{\sim}{Z}$-module $\underset{\sim}{Q}/\underset{\sim}{Z}$, on a $\Gamma(\underset{\sim}{Q}/\underset{\sim}{Z}) = \underset{\sim}{Q}/\underset{\sim}{Z}$. Soit $C(\underset{\sim}{Q}/\underset{\sim}{Z})$ le coeur [5] de ce module, on a

$$C(\underset{\sim}{Q}/\underset{\sim}{Z}) = \bigoplus_{P} \underset{\sim}{Z}^{1/P}/\underset{\sim}{Z} .$$

4. Etude des A-modules M tels que toute intersection de sous-modules compléments dans M est un sous-module complément.

THÉORÈME 6. - Soit M un A-module, les conditions suivantes sont équivalentes :

a. L'intersection de deux sous-modules compléments dans M est un sous-module complément.

b. Pour que X sous-module de M soit un sous-module complément dans M, il faut et il suffit qu'il vérifie la propriété suivante :

(I) $x \notin X \implies$ il existe $a \in A$ avec $ax \neq 0$ tel que $Aax \cap X = (0)$.

c. Toute intersection de sous-modules compléments dans M est un sous-module complément.

(a) $\implies$ (b). - Soit X un sous-module complément dans M ayant la propriété suivante : il existe $x \notin X$ tel que, pour tout $ax \neq 0$, $Aax \cap X \neq (0)$, il existe un sous-module complément X' extension essentielle de Ax, et la propriété précédente entraîne que X' est extension essentielle de $X' \cap X$, $X' \cap X$ est par hypothèse un sous-module complément dans M, d'où $X' = X' \cap X$, et par suite $X' \subset X$, mais par hypothèse $x \notin X$, d'où l'assertion.

(b) $\Longrightarrow$ (c). - Soient $(X_i)_{i\in I}$ une famille de sous-modules compléments dans M, et $X = \bigcap_{i\in I} X_i$; $x \notin X \Longrightarrow$ il existe $i \in I$ tel que $x \notin X_i$, et par suite ne peut trouver $a \in A$ avec $ax \neq 0$ tel que $Aax \cap X_i = (0)$ et a fortiori $Aax \cap X = (0)$.

(c) $\Longrightarrow$ (a). - C'est évident.

On vérifie aisément la propriété suivante :

PROPOSITION 3. - *Soit M un A-module, les conditions suivantes sont équivalentes:*

a. *Toute intersection de sous-modules compléments est un sous-module complément,*

b. *Pour tout sous-module X de M, il existe un plus petit sous-module complément dans M, $\overline{X}$ contenant X ; et alors l'application $X \to \overline{X}$ est une application de fermeture.*

Soit M un A-module, on dira qu'un sous-module X de M est *fermé* s'il vérifie la condition (I) du théorème 6.

Soit x un élément de M, on notera $\mathrm{Ann}(x)$ l'annulateur de x, et si X est un sous-module de M, on notera $X \,^{\bullet}\!. \, x = \{a \in A \,,\ ax \in X\}$.

PROPOSITION 4. - *Soit M un A-module, les conditions suivantes sont équivalentes:*

a. *Toute intersection de sous-modules compléments dans M est un sous-module complément,*

b. *Pour tout sous-module complément X dans M et tout $x \notin X$, $(X \,^{\bullet}\!. \, x)/\mathrm{Ann}(x)$ est un sous-module fermé de $A_s/\mathrm{Ann}(x)$.*

Soit $a \in A$, on notera $\overline{a}$ la classe de a dans $A_s/\mathrm{Ann}\, x$.

(a) $\Longrightarrow$ (b). - Soit $\overline{a} \notin X \,^{\bullet}\!. \, x/\mathrm{Ann}\, x \Longrightarrow a \notin X \,^{\bullet}\!. \, x \Longrightarrow ax \notin X$, par suite il existe $b \in A$ avec $bax \neq 0$, tel que

$$Abax \cap X = (0) \Longrightarrow Aba \cap X \,^{\bullet}\!. \, x \in \mathrm{Ann}\, x \,.$$

avec $ba \notin \mathrm{Ann}\, x$, d'où

$$Ab\overline{a} \cap X \,^{\bullet}\!. \, x/\mathrm{Ann}\, x = (0) \,.$$

(b) $\Longrightarrow$ (a). - Soit $\overline{a} \notin X \,^{\bullet}\!. \, x/\mathrm{Ann}\, x$; il existe b avec $b\overline{a} \neq 0$ tel que

$$Ab\overline{a} \cap X \,^{\bullet}\!. \, x/\mathrm{Ann}\, x = (0) \Longrightarrow Aba \cap X \,^{\bullet}\!. \, x = \mathrm{Ann}\, x \Longrightarrow Aba\, x \cap X = (0)$$

et par suite X est un sous-module fermé, le théorème 6 permet de conclure.

Soit M un A-module, nous allons définir une relation d'équivalence ρ dans l'ensemble des sous-modules de M. Soient N et N' deux sous-modules

$$N \rho N' \iff N \text{ et } N' \text{ ont même ensemble de compléments relatifs.}$$

LEMME 4. - <u>N et N' sont équivalents $\iff$ N et N' sont extensions essentielles de $N \cap N'$.</u>

Soit P un sous-module de N', tel que $P \cap (N \cap N') = (0) \implies P \cap N = (0)$. P est donc contenu dans un complément relatif de N, donc de N', et par suite $P = (0)$.

Réciproquement, si N et N' sont extensions essentielles de $N \cap N'$, soit S un sous-module de M

$$S \cap N = (0) \iff S \cap (N \cap N') = (0) \iff S \cap N' = (0) ,$$

d'où le résultat.

THÉORÈME 7. - <u>Soit M un A-module, les propriétés suivantes sont équivalentes</u> :

a. <u>L'intersection de deux sous-modules compléments dans M est un sous-module complément.</u>

b. <u>soient N et N' deux sous-modules de M ; pour tout sous-module P, on a</u>

$$\text{(II)} \qquad N \rho N' \implies (N + P) \rho (N' + P) .$$

Considérons la condition (II')

$$\text{(II')} \qquad \begin{matrix} N \subset P_1 \\ N \rho N' \end{matrix} \implies (N' + P_1) \rho P_1$$

cette dernière condition entraîne la condition (II) ; en effet, prenons $P_1 = N + P$, on a

$$(N' + N + P) \rho (N + P) ,$$

de même on a

$$(N' + N + P) \rho (N' + P)$$

d'où

$$(N + P) \rho (N' + P) .$$

1° Nous allons donc établir que la propriété (a) entraine (II').

Soient N, N', P des sous-modules de M, tels que l'on ait :

$$N \subset P \text{ et } N \rho N'$$

et soit $N \to \overline{N}$ l'application de fermeture, d'après le lemme précédent $\overline{N} = \overline{N'} = \overline{N \cap N'}$, d'autre part $\overline{P} \supset \overline{N} = N \cap N' = N'$, et par suite P et $P + N'$ sont des sous-modules essentiels de $\overline{P}$, d'où la propriété.

2° Soit N un sous-module de M ; nous allons montrer qu'il existe un seul sous-module complément $\overline{N}$ estension essentielle de N.

Soient X_1 et X_2 deux sous-modules compléments dans M, extensions essentielles de N

$$\begin{matrix} N \subset X_2 \\ N \,\rho\, X_1 \end{matrix} \implies (X_1 + X_2)\,\rho\, X_2$$

et par suite (lemme 3) $X_1 + X_2$ est extension essentielle de X_2, d'où $X_1 = X_2$.

Nous allons établir une caractérisation des A-modules M précédemment étudiés, caractérisation qui aura l'avantage de ne pas faire intervenir de façon explicite les sous-modules compléments.

Soient M un A-module quelconque et X un sous-module complément dans M non fermé ; il existe $x \notin X$ tel que, pour tout $ax \neq 0$, $Aax \cap X \neq (0)$, alors $X \,{}^{\bullet}\!.\, x$ est un idéal à gauche essentiel dans A, soit $a \notin X \,{}^{\circ}\!.\, x$, $ax \notin X$ et a fortiori $ax \neq 0$, il existe donc $b \in A$ avec $bax \neq 0$ tel que $bax \notin X$, d'où $ba \in X \,{}^{\bullet}\!.\, x$ avec $ba \neq 0$.

LEMME 5. - <u>Soit</u> X <u>un sous-module de</u> M, <u>l'ensemble des éléments</u> x <u>de</u> M <u>tels que</u> $X \,{}^{\bullet}\!.\, x$ <u>soit essentiel dans</u> A <u>est un sous-module</u> $X' \supset X$.

Cela résulte des relations suivantes :

$$X \,{}^{\circ}\!.\, (x + y) \supset (X \,{}^{\bullet}\!.\, x) \cap (X \,{}^{\circ}\!.\, y)$$

$$X \,{}^{\bullet}\!.\, ax = (X \,{}^{\circ}\!.\, x) \,{}^{\circ}\!.\, a .$$

La première relation prouve que, si x et $y \in X'$, alors $x + y \in X'$; montre que $X \,{}^{\bullet}\!.\, x$ essentiel dans $A \implies (X \,{}^{\circ}\!.\, x) \,{}^{\circ}\!.\, a$ essentiel dans A ; soit

$$\alpha \notin (X \,{}^{\circ}\!.\, ax) \implies \alpha a \notin X \,{}^{\circ}\!.\, x \;;$$

il existe $\beta \in A$ tel que $\beta\alpha a \neq 0$ avec

$$\beta\alpha a \in X \,{}^{\bullet}\!.\, x \implies \beta\alpha \in (X \,{}^{\circ}\!.\, ax) \text{ avec } \beta\alpha \neq 0 .$$

Soit maintenant X un sous-module complément dans un A-module M non fermé, alors X' est un sous-module contenant strictement X. Soit Y un complément relatif de X dans M ; $Y \cap X' \neq (0)$ si $x \in Y \cap X'$, alors $(X \,{}^{\bullet}\!.\, x) = \mathrm{Ann}(x)$ d'où

PROPOSITION 5. - Soient M un A-module et X un sous-module complément dans M non fermé, soit Y un complément relatif de X dans M, il existe un élément x non nul de X' tel que $\mathrm{Ann}(x)$ soit un idéal à gauche essentiel dans A.

Soit M un A-module ; on appelle sous-module singulier de M, l'ensemble des éléments $x \in M$, tels que $\mathrm{Ann}(x)$ soit essentiel dans A_s.

COROLLAIRE. - Soit M un A-module tel que le sous-module singulier $J(M)$ soit nul ; alors l'intersection de deux sous-modules compléments dans M est un sous-module complément.

LEMME 6. - Soit X un sous-module complément non fermé dans M, il existe $y \notin M$, $y \neq (0)$ avec $Ay \cap X = (0)$ et un élément $x \neq 0 \in X$ tel que $A(x + y)$ soit extension essentielle de $A(x + y) \cap X$.

Il existe $z \neq 0$, $z \notin X$ tel que, pour tout $az \neq 0$, $Aaz \cap X \neq (0)$, $X + Az$ est un sous-module de M contenant strictement X ; si X' est un complément relatif de X, on a

$$(X + Az) \cap X' \neq (0) ,$$

il existe $x \in X$ et $y \in X'$ tels que

$$y = - x + bz \quad \text{avec} \quad y \neq 0 \quad \text{si} \quad x = 0 \implies bz \in X' \quad \text{et} \quad Abz \cap X = (0) .$$

Contrairement à l'hypothèse faite sur z, pour tout $a(x + y) \neq 0$, $Aa(x + y) \cap X \neq (0)$, et par suite $A(x + y)$ est extension essentielle de $A(x + y) \cap X$.

THÉORÈME 8. - Soit M un A-module, les propriétés suivantes sont équivalentes :

a. il existe deux sous-modules compléments dans M dont l'intersection n'est pas un sous-module complément,

b. il existe deux éléments x et y non nuls de M tels que

(i) $Ax \cap Ay = (0)$

(ii) $A_s/\mathrm{Ann}(x) \cap \mathrm{Ann}(y)$ est extension essentielle de $\mathrm{Ann}(x)/\mathrm{Ann}(x) \cap \mathrm{Ann}(y)$.

(b) $\implies$ (a). - $Ax \cap Ay = (0) \implies \mathrm{Ann}(x + y) = \mathrm{Ann}(x) \cap \mathrm{Ann}(y)$; soit X un sous-module complément dans M extension essentielle de Ay, $Ax \cap X = (0)$, et on a d'autre part

$$X \,{}^{\bullet}\!\!.\, (x + y) = X \,{}^{\bullet}\!\!.\, x = \mathrm{Ann}(x)$$

la relation (ii) s'écrit :

$$A_s/\mathrm{Ann}(x + y) \text{ extension essentielle de } X \cdot (x + y)/\mathrm{Ann}(x + y) \quad ,$$

et d'après la proposition 4 , X n'est pas un sous-module fermé.

(a) $\Longrightarrow$ (b). - Soit X un sous-module complément non fermé, d'après le lemme 6, il existe x et y éléments non nuls de M ayant les propriétés suivantes : $y \in X$, $Ax \cap X = (0)$ et par suite $Ax \cap Ay = (0)$; d'autre part $A(x + y)$ est extension essentielle de $A(x + y) \cap X$. On a les relations d'isomorphismes suivantes :

$$A(x + y) \cong A_s/\mathrm{Ann}(x + y)$$

$$A(x + y) \cap X \cong X \cdot (x + y) \mid \mathrm{Ann}(x + y) = \mathrm{Ann}(x + y) = \mathrm{Ann}(x)/\mathrm{Ann}(x) \cap \mathrm{Ann}(y).$$

<u>Exemples</u>.

Soient A un anneau et Λ un idéal à gauche essentiel dans A . Le A-module $A_s \times A_s/\Lambda$ vérifie les conditions du théorème précédent.

Soit le $\mathbb{Z}$-module injectif $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Soient x et y tels que $Ax \cap Ay = (0)$, $Ax = \mathbb{Z}^{(p/q)}/\mathbb{Z}$ et $Ay = \mathbb{Z}^{(p'/q')}/\mathbb{Z}$ et par suite

$$\mathrm{Ann}(x) = \mathbb{Z}q \qquad \mathrm{Ann}(y) = \mathbb{Z}q'$$

a. $(q , q') \neq 1$. Soit m le p. p. c. m. de $p'q$, et de pq' . On vérifie que m/qq' n'est pas un entier et appartient à $\mathbb{Z}^{(p/q)} \cap \mathbb{Z}^{(p'/q')}$.

b. $(q , q') = 1$. $\mathbb{Z}q \cap \mathbb{Z}q' = \mathbb{Z}qq'$, et par suite $(\mathbb{Z}q/\mathbb{Z}qq') \cap (\mathbb{Z}q'/\mathbb{Z}qq') = (0)$ ce qui contredit (ii), et par suite l'intersection de deux sous-modules injectifs de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est un sous-module injectif.

PROPOSITION 6. - <u>Soit</u> A <u>un anneau, les conditions suivantes sont équivalentes</u> :

a. A <u>est semi-simple</u>,

b. <u>Soit</u> M <u>un</u> A-<u>module quelconque : alors l'intersection de deux sous-modules compléments dans</u> M <u>est un sous-module complément</u>.

(a) $\Longrightarrow$ (b).- C'est trivial.

(b) $\Longrightarrow$ (a). - Soit Λ un idéal à gauche essentiel dans A , on a vu que le module $A_s \times A_s/\Lambda$ contredisait l'hypothèse, d'où $\Lambda = A_s$, et par suite A est semi-simple.

PROPOSITION 7. - Soient M un A-module et $\mathfrak{F}$ la famille des sous-modules $(X_i)_{i \in I}$ ayant la propriété suivante : pour tout $i \in I$, l'intersection de deux sous-modules compléments dans X_i est un sous-module complément : alors $\mathfrak{F}$ est un ensemble inductif.

C'est une conséquence immédiate du théorème 8.

5. Cas particulier des A-modules M dont le sous-module singulier est nul [3].

LEMME 7. - Soit M un A-module, les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathrm{Ann}(x)$ est un idéal à gauche formé de A pour tout $x \neq 0$,

(ii) le sous-module singulier de M est nul.

Il est clair que (i) $\Longrightarrow$ (ii).

(ii) $\Longrightarrow$ (i). - Soit $b \notin \mathrm{Ann}(x)$, $bx \neq 0$. Soit $a \neq 0$ appartenant à un complément relatif de $\mathrm{Ann}(bx)$,

$Aa \cap \mathrm{Ann}(bx) = (0) \Longrightarrow Aabx \neq (0)$ pour tout $\alpha a \neq 0 \Longrightarrow Aab \cap \mathrm{Ann}(x) = (0)$.

LEMME 8. - Soit X un sous-module de M, pour que $X \,{}^{\bullet}\!.\, x$ soit essentiel dans A il faut et il suffit que, pour tout $ax \neq 0$, $Aax \cap X \neq (0)$.

Il est évident que la condition est suffisante. Montrons qu'elle est nécessaire. Soit $b \notin X \,{}^{\bullet}\!.\, x \Longrightarrow b \notin \mathrm{Ann}(x)$ qui est fermé, il existe $ab \neq 0$ tel que

$$Aab \cap \mathrm{Ann}(x) = (0)$$

et on a

$$Aab \cap X \,{}^{\circ}\!.\, x \neq (0) \text{ et par suite } Aabx \cap X \neq (0) ,$$

Compte tenu de l'étude générale précédente, on en déduit le résultat suivant.

PROPOSITION 8. - Pour que X sous-module de M soit un sous-module complément dans M, il faut et il suffit qu'il vérifie la propriété :

$$x \notin X \Longrightarrow X \,{}^{\circ}\!.\, x \text{ est un idéal fermé de } A .$$

Du lemme 2, on déduit le fait suivant : soit N un sous-module de M la fermeture $\overline{N}$ de N est l'ensemble des éléments $x \in M$ tels que $N \,{}^{\bullet}\!.\, x$ soit essentiel dans A. On a d'autre part le résultat suivant: Soit X un sous-module complément maximal dans M et $x \notin X$, alors $X \,{}^{\bullet}\!.\, x$ est un sous-module fermé maximal de A.

Cas particulier. - On suppose que le A-module à gauche A_s est tel que l'idéal à gauche singulier est nul. On a les propriétés suivantes :

PROPOSITION 9. - *Soient* X *un idéal à gauche de* A *et* $\overline{X}$ *sa fermeture, on a les relations suivantes* :

a. $X \subset \overline{X}$, $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$, $X \subset Y \Longrightarrow \overline{X} \subset \overline{Y}$,

b. $\overline{X \cap Y} = \overline{X} \cap \overline{Y}$,

c. $\overline{X} \overset{\bullet}{.} a = \overline{X \overset{\bullet}{.} a}$,

d. $\overline{X}.a \in \overline{Xa}$,

et par suite l'application de fermeture peut être définie à partir d'une localisation [1].

Les propriétés (a) et (b) sont vraies dans un A-module M tel que l'intersection de deux sous-modules compléments dans M soit un sous-module complément.

c. $\overline{X} \overset{\bullet}{.} a$ est extension essentielle de $X \overset{\bullet}{.} a$. Soit $z \neq 0$, $z \in \overline{X} \overset{\bullet}{.} a \Longrightarrow za \in \overline{X}$. Si $za = (0) \Longrightarrow z \in X \overset{\bullet}{.} a$, si $za \neq 0$, $Aza \cap X \neq (0)$, par suite il existe $b \in A$ avec $bza \neq (0)$, d'où $bz \in X \overset{\bullet}{.} a$ avec $bz \neq 0$.

d. $\overline{X}a \cong (\overline{X} + \mathrm{Ann}(x))/\mathrm{Ann}(x)$, $Xa \cong (X + \mathrm{Ann}(x))/\mathrm{Ann}(x)$.

$\overline{X} + \mathrm{Ann}(x)$ est extension essentielle de $X + \mathrm{Ann}(x)$ (théorème 7). $\mathrm{Ann}(x)$ est un fermé par suite $\overline{X} + \mathrm{Ann}(x)/\mathrm{Ann}(x)$ est extension essentielle de $X + \mathrm{Ann}(x)/\mathrm{Ann}(x)$. Finalement

$$X.a \subset \overline{X}.a \subset \overline{Xa} .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] GABRIEL (Pierre). - La localisation dans les anneaux non commutatifs, Séminaire Dubreil-Pisot, t. 13, 1959/60, n° 2, 35 p.

[2] GOLDIE (A. W.). - Semi-prime rings with maximum condition, Proc. London math. Soc., t. 10, 1960, p. 201-220.

[3] JOHNSON (R. E.). - Structure theory of faithful rings, II., Trans. Amer., math. Soc., t. 84, 1957, p. 523-544.

[4] JOHNSON (R. E.) and WONG (E. T.). - Quasi-injective modules and irreductible rings, J. London math. Soc., t. 36, 1961, p. 260-265.

[5] LESIEUR (L.) et CROISOT (R.). - Coeur d'un module, Séminaire Dubreil-Pisot, t. 14, 1960/61, n° 1 et 17, 11 et 13 p.