Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres

Marie-Paule Brameret

Groupes p-réduits

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 16, n° 2 (1962-1963), exp. n° 13, p. 1-26

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1962-1963__16_2_A2_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
16e année, 1962/63, n° 13

18 février 1963
(Texte rédigé en Septembre 1963)

GROUPES p-RÉDUITS

par Mlle Marie-Paule BRAMERET

Tous les groupes considérés dans cet exposé sont supposés commutatifs. Rappelons (cf. [3]) qu'un groupe G est dit <u>divisible</u> par un entier n si, pour tout élément x de G, il existe un élément y de G tel que $x = ny$. Un sous-groupe S d'un groupe G est dit <u>pur</u> si l'on a l'égalité $nG \cap S = nS$ pour tous les entiers n, c'est-à-dire, si, lorsque l'équation $nx = a$, où n est un entier et où a est un élément de S, possède une solution x dans G, une de ces solutions appartient à S. Dans le cas où le groupe G est un groupe sans torsion, un sous-groupe S de G est pur si, et seulement si, l'égalité $pG \cap S = pS$ a lieu pour tous les nombres premiers p.

Au paragraphe 1, nous donnerons la définition des groupes p-réduits et des notions qui s'y rattachent. La structure de certains groupes p-réduits a été étudiée par I. KAPLANSKY (cf. [4]).

Les paragraphes 2 et 3 sont des compléments à l'étude des C-groupes (cf. [2]).

1. Quelques propriétés des groupes p-réduits.

DÉFINITION 1. - Etant donné un nombre premier p, un groupe abélien G est dit <u>p-réduit</u> s'il vérifie les conditions suivantes :

1° G est un groupe sans torsion,

2° G est divisible par tout nombre premier q différent de p ;

3° G ne possède pas de sous-groupe divisible par p, autre que le sous-groupe (0).

<u>Exemples</u>. - Le groupe additif $\mathfrak{P}$ de l'anneau $\mathfrak{P}$ des entiers p-adiques est p-réduit, ainsi que tous les sous-groupes purs de $\mathfrak{P}$. Il en est ainsi, en particulier, du groupe additif R_p de l'anneau P des nombres rationnels à dénominateur premier à p.

De propriétés valables dans des cas plus généraux (cf. [3]), résultent les propriétés suivantes :

(A) Toute somme directe de groupes p-réduits est un groupe p-réduit.

(B) Pour qu'un sous-groupe d'un groupe p-réduit soit lui-même p-réduit, il faut et il suffit qu'il soit divisible par tout nombre premier q différent de p.

(C) Tout sous-groupe caractéristique (en particulier, complètement invariant) et tout sous-groupe pur d'un groupe p-réduit est p-réduit.

(D) Soit G un groupe p-réduit. Soit S un sous-groupe p-réduit de G. Pour que S soit un sous-groupe pur de G, il faut et il suffit que soit vérifiée l'égalité :

$$pG \cap S = pS .$$

(E) Si G est un groupe p-réduit, il en est de même du groupe additif de l'anneau des endomorphismes de G.

(F) Si le groupe G est p-réduit, on a

$$\bigcap_{k=0}^{\infty} p^k G = 0 .$$

(G) Tout groupe p-réduit G peut être muni d'une structure de module sur l'anneau P des nombres rationnels dont le dénominateur est premier à p. Ce module est sans torsion. La topologie p-adique, induite sur G par celle de P, admet le système des $p^k G$ comme base de voisinages de 0 et elle est séparée. Inversement, le groupe additif sous-jacent d'un P-module sans torsion et dont la topologie p-adique est séparée, est un groupe p-réduit.

(H) Pour tous lea entiers positifs k et h, les groupes $G/p^h G$ et $p^k G/p^{k+h} G$ sont isomorphes.

On appelle rang d'un groupe sans torsion le nombre cardinal d'un système maximal d'éléments indépendants de ce groupe.

(I) Tout groupe p-réduit de rang 1 est isomorphe à $\underset{\sim}{R}_p$, (groupe additif de l'anneau P des nombres rationnels à dénominateur premier à p).

DÉFINITION 2. - Soit G un groupe p-réduit. Un système d'éléments $(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de G est indépendant modulo $p^k G$ (k étant un entier > 0) si une relation de la forme :

$$n_1 a_{\lambda_1} + \dots + n_s a_{\lambda_s} \in p^k G \quad \text{où les } n_i \in \underset{\sim}{Z}$$

entraîne

$$p^k \text{ divise } n_i \qquad i = 1 , \dots , s .$$

LEMME 1. - <u>Soit</u> G <u>un groupe</u> <u>p-réduit. Pour chaque entier</u> $k > 0$, <u>le groupe</u> $G/p^k G$ <u>est de la forme</u> $\bigoplus_m \underset{\sim}{C}(p^k)$, <u>où</u> $\underset{\sim}{C}(p^k)$ <u>désigne le groupe cyclique d'ordre</u> p^k <u>et où le nombre cardinal</u> m <u>est indépendant de</u> k (cf. [3], p. 36, exercice 30).

<u>Démonstration</u>. - Il est évident que G/pG est un p-groupe de la forme $\bigoplus_m \underset{\sim}{C}(p)$. Il existe donc dans G un système maximal d'éléments indépendants modulo pG , soit $(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ et le nombre cardinal de ce système est m . Alors, $(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est un système indépendant modulo $p^k G$, car s'il existait une relation de la forme :

$$n_1\, a_{\lambda_1} + \dots + n_s\, a_{\lambda_s} \in p^k G \qquad \text{où les } n_i \in \underset{\sim}{Z}$$

et si p^k ne divisait pas tous les n_i on pourrait supposer que, par exemple, n_1 est premier à p , ce qui contredirait le fait que le système $(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est indépendant modulo pG , puisque l'on a :

$$n_1\, a_{\lambda_1} + \dots + n_s\, a_{\lambda_s} \in pG .$$

Pour montrer que ce système est maximal vis-à-vis de son indépendance modulo $p^k G$, il suffit de montrer que tout système $(b_\mu)_{\mu\in M}$ qui est indépendant modulo $p^k G$, est aussi indépendant modulo pG . Or, si l'on a une relation de la forme :

$$n_1\, b_{\mu_1} + \dots + n_s\, b_{\mu_s} \in pG \qquad \text{où les } n_i \in \underset{\sim}{Z} ,$$

alors

$$p^{k-1} \sum_{i=1}^{i=s} n_i\, b_{\mu_i} \in p^k G \qquad \text{et } p \text{ divise } n_i \text{ pour } i = 1 \dots s .$$

DÉFINITION 3. - On appelle <u>base</u> d'un groupe p-réduit G tout système indépendant modulo pG et maximal.

Tout système indépendant modulo pG et, en particulier, tout élément $x \in G - pG$, peut être plongé dans une base de G .

D'arpès le lemme 1, deux bases d'un groupe p-réduit ont le même nombre cardinal.

DÉFINITION 4. - On appelle <u>dimension</u> d'un groupe p-réduit, le nombre cardinal d'une de ses bases, c'est-à-dire, le nombre cardinal m introduit dans l'énoncé du lemme 1.

D'après (H), la dimension du groupe p-réduit $p^k G$ est égale à celle de G , pour tous les entiers $k \geqslant 0$.

Toute base d'un groupe p-réduit est en particulier un système d'éléments indépendants. Donc, le rang d'un groupe p-réduit est supérieur à sa dimension.

Soit G un groupe p-réduit et soit $(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une base de G . Chaque a_λ peut être plongé dans un sous-groupe pur et de rang 1 de G ; soit S_λ ce groupe. D'après (I), S est isomorphe au groupe $\underset{\sim}{R}_p$. On peut former la somme directe :

$$B = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda \ .$$

DÉFINITION 5. - Un tel sous-groupe B est appelé <u>sous-groupe de base</u> de G .

D'après (A), B est un groupe p-réduit.

Il est évident que deux sous-groupes de base d'un groupe p-réduit sont isomorphes.

DÉFINITION 6. - On dira qu'un groupe p-réduit est <u>complètement décomposable sur</u> $\underset{\sim}{R}_p$ s'il peut se mettre sous la forme d'une somme directe de groupes isomorphes à $\underset{\sim}{R}_p$.

LEMME 2. - <u>Soit</u> S <u>un sous-groupe pur d'un groupe</u> p-<u>réduit</u> G . <u>Alors, la dimension du groupe</u> p-<u>réduit</u> S <u>est inférieure à la dimension de</u> G .

<u>Démonstration</u>. - Soit $(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une base de S . Puisque S est pur dans G , ce système est indépendant modulo pG ; il peut, par suite, être prolongé en une base de G ; son nombre cardinal est donc inférieur à la dimension de G .

LEMME 3. - <u>Soit</u> G <u>un groupe</u> p-<u>réduit. Soit</u> B <u>un sous-groupe de</u> G . <u>Alors</u> B <u>est un sous-groupe de base de</u> G <u>si et seulement s'il vérifie les conditions suivantes</u>.

1° B <u>est un groupe</u> p-<u>réduit complètement décomposable sur</u> $\underset{\sim}{R}_p$.

2° B <u>est pur dans</u> G .

3° G/B <u>est divisible</u>.

<u>Démonstration</u>. - Si B est un sous-groupe de base de G , construit sur la base $(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, les propriétés 1° et 2° résultent immédiatement de la définition de B . Puisque le groupe G/B , homomorphe à G , est divisible par tout nombre premier q distinct de p , il suffit, pour démontrer la propriété 3°, de démontrer que p divise G/B . Soit x + B un élément de G/B où $x \notin B$.

Le système $(x) \cup (a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est dépendant modulo pG ; il existe donc des entiers n et n_i, premiers à p, tels que :

$$nx + n_1 a_1 + n_2 a_2 + \dots + n_k a_k \in pG \ .$$

Donc il existe un élément $g \in G$, pour lequel

$$x = b + pg \qquad \text{où} \quad b \in B$$

et l'on a $x + B = p(g + B)$.

Réciproquement, si le sous-groupe B de G vérifie les propriétés 1°, 2° et 3°, alors $B = \bigoplus_{m} \underset{\sim}{R}_p$. En choisissant dans chaque composante $\underset{\sim}{R}_p$ de la décomposition de B un élément et un seul a_λ n'appartenant pas à $p\underset{\sim}{R}_p$, on obtient une base du groupe p-réduit B. Puisque B est pur dans G, le système $(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est indépendant modulo pG. Soit x un élément de G, $x \notin (a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$.

Il existe, d'après la condition 3°, un élément b de B pour lequel on a $x - b \in pG$.

Si b est un élément a_λ de la base de B, le lemme est démontré sinon, il existe des entiers n et n_i premiers à p pour lesquels on a

$$nb + n_1 a_{\lambda_1} + \dots + n_k a_{\lambda_k} \in pB \qquad \text{d'où} \quad nx + n_1 a_{\lambda_1} + \dots + n_k a_{\lambda_k} \in pG \ .$$

Par suite $(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est un système indépendant modulo pG et maximal. Comme d'autre part, chacune des composantes de B est le sous-groupe pur de G engendré par l'élément a_λ correspondant, B est un sous-groupe de base de G.

COROLLAIRE. - Si B est un sous-groupe de base d'un groupe p-réduit G, alors G et B ont même dimension.

Si un groupe p-réduit G coïncide avec l'un de ses sous-groupes de base, la dimension de G est égale à son rang.

LEMME 4. - Pour un groupe p-réduit G, les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(a) la dimension de G est finie et égale au rang de G.

(b) G coïncide avec chacun de ses sous-groupes de base.

Démonstration.

Implication (a) $\Longrightarrow$ (b). - Soit B un sous-groupe de base de G. La condition (a) entraîne que toute base de B, est un système indépendant maximal de G ; par suite, quel que soit $x \in G$, il existe un entier $k \geqslant 0$ pour lequel $p^k x \in B$. Puisque B est un sous-groupe pur de G, $x \in B$; donc $B = G$.

Implication (b) $\Longrightarrow$ (a). - En effet, la dimension et le rang de G sont alors égaux. Soit S un sous-groupe pur de G. Si $(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est une base du groupe p-réduit S, elle peut être plongée dans une base $(b_\mu)_{\mu\in M} \cup (a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de G. Alors

$$G = \bigoplus_{\mu\in M} T_\mu \oplus \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$$

où T_μ et S_λ sont les sous-groupes purs de rang 1, de G, engendrés par b_μ et a_λ respectivement. Mais alors $S \cap \bigoplus_{\mu\in M} T = 0$, sinon il existerait un élément c de cette intersection pour laquel $(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \cup \{c\}$ serait un système indépendant modulo pS. Donc $S = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} S$ est un terme d'une décomposition de G en somme directe. D'après [3] (théorème 46.8), le rang de G est fini.

Soit G un groupe p-réduit. Soit $\hat{G}$ le complété de G pour la topologie p-adique. Puisque G est un module sur l'anneau P, $\hat{G}$ est muni d'une structure de $\mathfrak{P}$-module sur l'anneau $\mathfrak{P}$ des entiers p-adiques.

THÉORÈME 1. - Le groupe $\hat{G}$ est p-réduit et G est un sous-groupe pur de $\hat{G}$

Démonstration. - On montre que $\hat{G}$ est réduit et que G est pur dans $\hat{G}$ comme dans [4] (lemmes 17-18). Comme G est pur dans $\hat{G}$, $\hat{G}$ est sant torsion. Puisque $\hat{G}$ est un $\mathfrak{P}$-module il est divisible par tout nombre premier $q \neq p$.

Il résulte alors que $\hat{G}$ est un $\mathfrak{P}$-module sant torsion, réduit, séparé et complet pour la topologie p-adique.

LEMME 5. - Toute base du groupe p-réduit est une base du groupe $\hat{G}$.

Démonstration. - Soit $(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une base de G. Puisque G est pur dans $\hat{G}$, alors le système $(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est indépendant modulo $p\hat{G}$. Soit x un élément de $\hat{G}$; x est limite d'une suite (x_n), où $x_n \in G$. Pour n assez grand on a $x - x_n \in p\hat{G}$.

Il existe, d'autre part, des entiers m et s_i premiers à p pour lesquels on a une relation de la forme

$$mx_n - (s_1 a_{\lambda_1} + \dots + s_n a_{\lambda_n}) \in pG .$$

D'où

$$mx_n + s_1 a_{\lambda_1} + \dots + s_n a_{\lambda_n} \in p\hat{G} \quad . \; .$$

Par suite $(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est un système indépendant modulo $p\hat{G}$ et maximal. C'est donc une base de $\hat{G}$.

Soit G un groupe p-réduit et soit H un sous-groupe pur de G. Soit $\hat{H}$ le complété de H.

Alors $\hat{H}$ est canoniquement isomorphe à un sous-groupe de $\hat{G}$ dans un isomorphisme qui laisse H inchangé. On identifiera $\hat{H}$ à ce sous-groupe de $\hat{G}$. Il est évident que $\hat{H}$ est un sous-groupe pur de $\hat{G}$.

Il résultera de [4] (théorème 23), le lemme suivant.

LEMME 6. - Si G est un groupe p-réduit et si B est un sous-groupe de base de G, alors $\hat{G} = \hat{B}$.

Si deux groupes p-réduits sont isomorphes, leurs complétés sont isomorphes.

Si G est un groupe p-réduit de dimension 1, son complété $\hat{G}$ coïncide avec le complété d'un sous-groupe de base de G. Par suite, $\hat{G}$ est isomorphe au groupe $\mathfrak{P}$ et G est isomorphe à un sous-groupe pur du groupe $\mathfrak{P}$.

Il résulte immédiatement du lemme 6, que si G est un groupe p-réduit si B est un sous-groupe de base de G, tout élément x de G est limite d'une suite fondamentale d'éléments de B et, par suite, on a pour tout entier $k \geq 0$, $G = \{B, p^k G\}$ groupe engendré par H et $p^k G$.

LEMME 7. - Si G est un groupe p-réduit, somme directe d'une famille de groupes $(G_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ de dimension 1, alors $|\Lambda|$ est égal à la dimension de G ($|\Lambda|$ désignant le nombre cardinal de l'ensemble Λ).

Démonstration. - En effet, le système obtenu en choisissant pour chaque λ, un élément a_λ et un seul de $G_\lambda - pG_\lambda$, est une base de G.

THÉORÈME 2. - Tout endomorphisme φ d'un groupe p-réduit G peut se prolonger, d'une manière unique, en un endomorphisme $\hat{\varphi}$ de $\hat{G}$. L'application qui à φ fait correspondre $\hat{\varphi}$ est un isomorphisme de l'anneau des endomorphismes de G dans l'anneau des endomorphismes de $\hat{G}$. Si l'endomorphisme φ est un automorphisme de G $\hat{\varphi}$ est un automorphisme de $\hat{G}$.

Démonstration. - Soit x un élément de $\hat{G}$. Alors x est limite d'une suite fondamentale (x_n) d'éléments de G. Si φ est un endomorphisme de G, il est clair que $(\varphi(x_n))$ est une suite fondamentale de G. Soit y sa limite dans $\hat{G}$. On montre facilement que l'application qui à x fait correspondre y est un endomorphisme $\hat{\varphi}$ de $\hat{G}$ et que la restriction à G de $\hat{\varphi}$ coïncide avec φ.

Si φ' est un second endomorphisme de G, et si $\hat{\varphi}' = \hat{\varphi}$, alors $\varphi'(x) = \varphi(x)$ pour tout x dans G et $\varphi = \varphi'$. Soient φ et ψ deux endomorphismes de G ; soit x un élément de $\hat{G}$, limite d'une suite fondamentale (x_n) d'éléments de G. On a alors

$$\widehat{\varphi\psi}(x) = \lim [(\varphi + \psi)(x_n)] = \hat{\varphi}(x) + \hat{\psi}(n) \qquad \text{donc } \widehat{\varphi + \psi} = \hat{\varphi} + \hat{\psi}$$

et

$$\widehat{\varphi\psi}(x) = \lim [\varphi\psi(x_n)] = \hat{\varphi}\hat{\psi}(x) \qquad \text{donc } \widehat{\varphi\psi} = \hat{\varphi}\hat{\psi} \cdot$$

Si φ est un automorphisme de G et s'il existe $x = \lim (x_n)$ dans $\hat{G}$ pour lequel $\hat{\varphi}(x) = 0$, alors, pour tout entier $k > 0$ il existe un entier n à partir duquel $\varphi(x_n) \in p^k G$. Donc $x_n \in p^k G$ et, par suite, $x = 0$.

Soit $\mathfrak{m}$ un nombre cardinal et soit H un groupe p-réduit de la forme $H = \bigoplus_{\mathfrak{m}} \underset{\sim}{R}_p$. On désignera par $\mathfrak{m}_0$ le rang du groupe $\hat{H}$.

THÉORÈME 3. - <u>Soient</u> $\mathfrak{m}$ <u>et</u> $\mathfrak{r}$ <u>deux nombres cardinaux tels que</u> $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{r}$. <u>Si</u> $\mathfrak{m}$ <u>est fini, il existe un groupe</u> p-<u>réduit de rang</u> $\mathfrak{r}$ <u>et de dimension</u> $\mathfrak{m}$ <u>si et seulement si</u> $\mathfrak{r} \leqslant \mathfrak{m}_0$.

<u>Démonstration. -</u> Soit G un groupe p-réduit de rang $\mathfrak{r}$ et de dimension $\mathfrak{m}$. Soit $\hat{G}$ le complété de G. Alors $\mathfrak{r}$ est inférieur au rang de $\hat{G}$, qui est égal au rang $\mathfrak{m}_0$ du complété $\hat{B}$ d'un sous-groupe de base B de G.

Réciproquement soient $\mathfrak{r}$ et $\mathfrak{m}$ deux nombres cardinaux tels que $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{r} \leqslant \mathfrak{m}_0$. Soit B un groupe p-réduit complètement décomposable sur $\underset{\sim}{R}_p$ et dont la dimension est $\mathfrak{m}$. Soit H le complété de B. Soit K un groupe divisible minimal contenant H. On a les égalités $\text{rang}(K) = \text{rang}(H) = \mathfrak{m}_0$.

Puisque $\mathfrak{r}$ est un nombre cardinal compris entre $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{m}_0$, on peut trouver un sous-groupe divisible M de K et qui contient B. Posons $G = H \cap M$. Alors G est un sous-groupe pur de H ; en effet si l'on a : $nx \in G$ et $x \in H$, alors $x \in M$ et $x \in G$. Par suite, G est un groupe p-réduit. Puisque G est pur dans H, on a $\dim G \leqslant \dim H$. Mais B, étant un sous-groupe pur de H, est un sous-groupe pur de G. Donc

$$\dim G \geqslant \dim B = \dim H \ .$$

Par suite, $\dim G = \mathfrak{m}$. D'autre part, M est un groupe divisible minimal pour l'inclusion $G \subset M$, car si $x \in M$, alors $x \in K$ et il existe un entier n pour lequel $nx \in H$, donc $nx \in G$. Il en résulte que le rang de G est $\mathfrak{r}$.

LEMME 8. - Soient G un groupe p-réduit, et soit $\hat{G}$ son complété. Soit K un groupe divisible minimal contenant $\hat{G}$, et soit M le groupe divisible minimal contenant G et contenu dans K. Alors l'anneau des endomorphismes de G, est l'ensemble des endomorphismes de K qui respectent M et $\hat{G}$.

Démonstration. - On a évidemment $G = \hat{G} \cap M$. Soit φ un endomorphisme du groupe K pour lequel $\varphi(\hat{G}) \subseteq \hat{G}$ et $\varphi(M) \subseteq M$. Alors

$$\varphi(G) = \varphi(\hat{G} \cap M) \subseteq G$$

et φ est un endomorphisme de G.

Soit φ un endomorphisme de G. Alors, d'après le théorème 2, φ se prolonge d'une manière unique en un endomorphisme $\hat{\varphi}$ de $\mathcal{S}(\hat{G})$. D'après [3] (page 231, exercice 45), $\hat{\varphi}$ est la restriction à $\hat{G}$ d'un endomorphisme ψ de K. On a donc $\psi(\hat{G}) \subseteq \hat{G}$. Soit x un élément de M. Il existe un entier $k \geqslant 0$ pour lequel $p^k x \in G$. D'autre part on peut écrire $K = M \oplus M'$, où M' est un sous-groupe de K. On a

$$\psi(x) = y + y' \qquad \text{avec } y \in M \text{ et } y' \in M'.$$

Donc

$$p^k \psi(x) = \psi(p^k x) = p^k y + p^k y' = \varphi(p^k x) \in G.$$

Il en résulte que $p^k y' = 0$ d'où $y' = 0$ et $\psi(M) \subseteq M$.

THÉORÈME 4. - Soit G un groupe p-réduit et soit $\hat{G}$ le complété de G. Si H est un sous-groupe p-réduit de G, tel que

$$p^k G \subseteq H \subseteq p^{k-1} G$$

où k est un entier $\geqslant 1$, alors, pour tout sous-groupe de base B de G, il existe une décomposition en somme directe $B = B_1 \oplus B_2$ telle que

$$H = G \cap [p^{k-1} \hat{B}_1 \oplus p^k \hat{B}_2]$$

où $\hat{B}_i$ est le complété de B_i pour $i = 1, 2$. Le groupe $p^{k-1} B_1 \oplus p^k B_2$ est un sous-groupe de base de H, et la dimension de H est égale à celle de G.

Démonstration. - Il suffit de démontrer le théorème pour $k = 1$. On peut supposer $H \neq G$ et $H \neq pG$.

Soit $(a_\nu)_{\nu \in N}$ une base de G. Et soit B le sous-groupe de base de G correspondant. Il existe au moins un élément a_ν de la base précédente qui n'appartient pas à H. En effet, sinon, on aurait, puisque H est p-réduit, $B \subseteq H$. Comme, d'autre part, pG est contenu dans H et que $G = \{B, pG\}$, alors $G = H$.

Soit $(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une sous-famille de $(a_\nu)_{\nu\in N}$ indépendante modulo H, (c'est-à-dire telle que toute relation de la forme

$$n_1 a_{\lambda_1} + \dots + n_k a_{\lambda_k} \in H, \qquad \text{où les } n_i \in \underset{\sim}{Z}$$

entraîne que p divise les n_i), et maximale vis à vis de cette indépendance. D'après ce qui précède, il existe de telles familles.

D'autre part, il est évident que la famille des sous-ensembles de $(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ indépendants modulo H, ordonnée par l'inclusion, est inductive. Elle possède donc un élément maximal.

On a donc

$$(a_\nu)_{\nu\in N} = (a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \cup (a_{\lambda'})_{\lambda'\in\Lambda'} \qquad \text{avec } N = \Lambda \cup \Lambda' .$$

L'ensemble Λ' n'est pas vide ; sinon, soit $x \in H$; si $x \notin pG$ il existe des entiers n et n_i premiers à p pour lesquels on a la relation :

$$nx + n_1 a_{\lambda_1} + \dots + n_k a_{\lambda_k} \in pG \qquad \text{d'où } n_1 a_{\lambda_1} + \dots + n_k a_{\lambda_k} \in H$$

et p divise les n_i, ce qui n'est pas. Donc $x \in pG$ et $H = pG$. Ce cas a été éliminé.

On a alors, pour chaque $\lambda' \in \Lambda'$, une relation de la forme :

$$a_{\lambda'} + r_1 a_{\lambda_1} + \dots + r_k a_{\lambda_k} \in H \qquad \text{où les } r_i \in P .$$

Posons

$$b_{\lambda'} = a_{\lambda'} + r_1 a_{\lambda_1} + \dots + r_k a_{\lambda_k} .$$

Il est clair que le système $(b_{\lambda'})_{\lambda'\in\Lambda'} \cup (a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est une base de G et que le sous-groupe de base qu'elle engendre coïncide avec B.

Le système $(pa_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \cup (b_{\lambda'})_{\lambda'\in\Lambda'}$ est contenu dans H.

Ce système est indépendant modulo pH ; en effet si l'on avait :

$$x = \sum_{i=1}^{k} n_i\, pa_{\lambda_i} + \sum_{j=1}^{\ell} m_j\, b_{\lambda'_j} \in pH$$

où les n_i et les m_j sont des entiers, on aurait $x \in pG$. Par suite p diviserait les m_j. Donc :

$$\sum_{i=1}^{k} n_i\, pa_{\lambda_i} \in pH . \qquad \text{D'où } \sum_{i=1}^{k} n_i\, a_{\lambda_i} \in H$$

et, par suite, p diviserait les n_i.

Le système $(pa_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \cup (b_{\lambda'})_{\lambda'\in\Lambda'}$ est une base du groupe p-réduit H. En effet soit $h \in H$, h n'étant pas un élément du système précédent. Supposons que l'ensemble

$$(pa_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \cup (b_{\lambda'})_{\lambda'\in\Lambda'} \cup \{h\}$$

soit indépendant modulo pH ; alors $h \notin pG$; en effet, si $h \in pG$, et puisque $(pa_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \cup (pb_{\lambda'})_{\lambda'\in\Lambda'}$ est une base de pG, il existerait des entiers n, n_i et m_j premier à p, pour lesquels on aurait :

$$nh + \sum_{i=1}^{k} n_i \, pa_{\lambda_i} + \sum_{j=1}^{\ell} m_j \, pb_{\lambda'_j} \in p^2 G \subseteq pH$$

ce qui contredirait le choix de h.

D'autre part, puisque $(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \cup (b_{\lambda'})_{\lambda'\in\Lambda'}$ est une base de G, il existe des entiers n_i, n et m_j premiers à p pour lesquels on a :

$$nh + \sum_{i=1}^{k} n_i \, a_{\lambda_i} + \sum_{j=1}^{\ell} m_j \, b_{\lambda'_j} \in pG .$$

Mais l'élément

$$nh + \sum_{j=1}^{\ell} m_j \, b_{\lambda'_j} \in H \text{. Donc } \sum_{i=1}^{k} n_i \, a_{\lambda_i} \in H$$

et p diviserait n_i.

On a donc seulement

$$nh + \sum_{j=1}^{\ell} m_j \, b_{\lambda'_j} \in pG .$$

Posons

$$nh + \sum_{j=1}^{\ell} m_j \, b_{\lambda'_j} = pg \qquad \text{où} \quad g \in G ,$$

alors $g \notin H$. Si l'on avait une relation de la forme :

$$tg + \sum_{i=1}^{m} s_i \, a_{\lambda_i} \in H \tag{1}$$

où t et les s_i sont des entiers, on aurait :

$$tnh + \sum_{j=1}^{\ell} m_j \, tb_{\lambda'_j} + \sum_{i=1}^{m} s_i \, pa_{\lambda_i} \in pH .$$

Donc p diviserait tn et, puisque p est premier à n, il diviserait t. La relation (1) entraîne alors, que p divise les s_i.

Supposons qu'il existe une relation de la forme :

$$\sum_{i=1}^{k} u_i \, a_{\lambda_i} + \sum_{j=1}^{\ell} v_j \, b_{\lambda'_j} + wg \in pG \qquad \text{où} \quad u_i , v_j , w \in \mathbb{Z} .$$

Puisque

$$\sum_{i=1}^{k} u_i \, a_{\lambda_i} + wg \in H ,$$

alors p divise w et p divise les u_i . Par suite,

$$\sum_{j=1}^{\ell} v_j \, b_{\lambda'_j} \in pG$$

donc p divise les v_j .

On a ainsi obtenu un système $(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \cup (b_{\lambda'})_{\lambda'\in\Lambda'} \cup \{g\}$ indépendant modulo pG, ce qui est impossible.

Il en résulte que l'élément $h \in H$ n'existe pas et que le système $(pa_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \cup (b_{\lambda'})_{\lambda'\in\Lambda'}$ est une base du groupe p-réduit H .

On a alors une décomposition du sous-groupe de base B en somme directe :

$$B = B_1 \oplus B_2$$

où B_1 (resp. B_2) est la somme des sous-groupes purs de rang 1 de G engendré par les $b_{\lambda'}$ (resp. les a_λ).

De la démonstration précédente, il suit que $B_1 \oplus pB_2$ est un sous-groupe de base de H .

Soit $\hat{B}_1$ et $\hat{B}_2$ les complétés dans $\hat{G}$ des groupes B_1 et B_2 alors $\hat{B}_1 \oplus p\hat{B}_2$ est le complété dans $\hat{G}$ du sous-groupe H de G . Par suite $H \subseteq G \cap [\hat{B}_1 \oplus p\hat{B}_2]$.

Soit $x \in G \cap [\hat{B}_1 \oplus p\hat{B}_2]$ alors $x = b_1 + pb_2$ où b_1 et b_2 sont les limites respectives dans G des suites $(b_1^{(n)})$ et $(b_2^{(n)})$ de B_1 et de B_2 . Pour n assez grand, on a $x - (b_1^{(n)} + pb_2^{(n)}) \in pG$. D'où $x \in H$. Par suite

$$G \cap [\hat{B}_1 \oplus p\hat{B}_2] = H .$$

Il est évident que si G est un groupe p-réduit, la famille des sous-groupes p-réduits de G est un treillis complet, sous-treillis du treillis des sous-groupes de G .

LEMME 9. - <u>Un sous-groupe maximal</u> M <u>d'un groupe</u> p-<u>réduit</u> G , <u>est un sous-groupe</u> p-<u>réduit de</u> G . <u>Par suite</u> M <u>est un élément maximal du treillis des sous-groupes</u> p-<u>réduits de</u> G .

<u>Démonstration</u>. - D'après (B) il suffit de montrer que tout nombre premier q , différent de p , divise M . Soit $x \in M$. Il existe un élément y de G pour lequel $x = qy$.

Si y n'appartenait pas à M, G coïnciderait avec le sous-groupe engendré par M et par y. D'autre part, il existe $z \in G$ pour lequel $y = qz$. Mais $z = a + ny$ avec $a \in M$ et $n \in \underset{\sim}{Z}$. Donc $qz = qa + nqy \in M$. D'où $y \in M$ ce qui est impossible. Par suite q divise M.

LEMME 10. - <u>Soit</u> M <u>un sous-groupe maximal d'un groupe</u> p-<u>réduit</u> G. <u>Alors pour tout sous-groupe de base</u> B <u>de</u> G <u>il existe une décomposition en somme directe</u>

$$B = B_1 \oplus B_2$$

<u>telle que le rang de</u> B_2 <u>est égal à</u> 1 <u>et que</u>

$$M = G \cap (\hat{B}_1 \oplus p\hat{B}_2)$$

<u>où</u> $\hat{B}_i$ <u>est le complété, dans</u> $\hat{G}$, <u>de</u> B_i <u>pour</u> $i = 1, 2$.

<u>Démonstration</u>. - On a $pG \subset M$; en effet, soit g un élément du groupe G. Si pg n'appartenait pas à M, alors G serait engendré par M et par (pg). Donc on aurait

$$g = x + npg \quad \text{où} \quad x \in M \text{ et } n \in \underset{\sim}{Z} .$$

Puisque M est un groupe p-réduit et que $1 - np$ est premier à p, la relation $(1 - np)\, g = x \in M$ entraîne $g \in M$, ce qui est impossible. Donc $pG \subset M$.

D'après le théorème 4, il suffit, pour démontrer le lemme, de démontrer que, dans toute base $(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de G, un système indépendant modulo M, ne possède qu'un élément. En effet si $\{a_\lambda, a_\mu\}$ était indépendant modulo M on aurait $a_\lambda = x + na_\mu$ où $x \in M$ et $n \in \underset{\sim}{Z}$. Donc $a_\lambda - na_\mu \in M$.

Le centre de l'anneau des endomorphismes d'un groupe $\mathfrak{P}$-réduit est $\mathfrak{P}$ [4]. Soit G un groupe p-réduit et soit $\hat{G}$ son complété. Si π est un élément de $\mathfrak{P}$, alors π est limite d'une suite (r_n) d'éléments de P. Si x est un élément de G, alors $(r_n x)$ est une suite fondamentale de G, dont la limite, dans $\hat{G}$ est πx. On notera $G\{\pi\}$ l'ensemble des éléments x de G pour lesquels πx appartient à G, c'est-à-dire, l'ensemble des éléments x de G pour lesquels la suite $(r_n x)$ converge dans G.

On a alors le lemme suivant :

LEMME 11. - <u>L'ensemble</u> $G\{\pi\}$ <u>est un sous-groupe pur et complètement invariant de</u> G.

Soient x et y deux éléments de G.

Démonstration. - Si les suites $(r_n x)$ et $(r_n y)$ convergent dans G alors la suite $(r_n(x - y))$ converge aussi dans G. Si la suite $(r_n px)$ converge dans G, alors la suite $(r_n x)$ converge dans G puisque G est un sous-groupe pur de $\hat{G}$.

Donc $G\{\pi\}$ est un sous-groupe pur de $\hat{G}$. D'autre part, il résulte du lemme 8, que $G\{\pi\}$ est un sous-groupe complètement invariant de G.

DÉFINITION 7. - Un élément $\pi \in \mathfrak{P}$ sera admis par G si $G\{\pi\} = G$.

Il est évident que l'ensemble $\mathfrak{L}$ des éléments de $\mathfrak{P}$ admis par G est un sous-anneau de $\mathfrak{P}$ dont le groupe additif est pur dans $\mathfrak{P}$.

DÉFINITION 8. - Un groupe p-réduit G sera dit homogène si, pour tout élément $\pi \in \mathfrak{P}$ on a : soit $G\{\pi\} = G$, soit $G\{\pi\} = 0$.

Tout groupe p-réduit complet est homogène ainsi que tout groupe p-réduit complètement décomposable sur $\underset{\sim}{R}_p$.

2. Sommes directes et sous-groupes complètement invariants.

THÉORÈME 1. - *Soit G un groupe abélien de la forme*

$$G = T \oplus D \oplus H$$

où T est un q-groupe divisible, D un groupe divisible sans torsion et H un groupe réduit sans torsion. Si K est un sous-groupe complètement invariant de G, on a soit $K = T \oplus D \oplus L$ où L est un sous-groupe complètement invariant de H, soit $K = T$, soit $K = T[q^r]$, où r est un entier ≥ 0.

Le théorème 1 résulte des lemmes 1-8 suivants.

LEMME 1. - *Soit G un groupe abélien ; soit H un sous-groupe complètement invariant de G. Si G admet la décomposition en somme directe $G = G_1 \oplus G_2$, alors H admet la décomposition en somme directe $H = H_1 \oplus H_2$, où $H_i = H \cap G_i$, pour $i = 1, 2$, est un sous-groupe complètement invariant de G_i.*

LEMME 2. - *Si G est un groupe divisible sans torsion, les seuls sous-groupes complètement invariants de G sont 0 et G* [4].

LEMME 3. - *Si G est un p-groupe divisible, les seuls sous-groupes complètement invariants de G sont G et les $G[p^r]$ où r est un entier ≥ 0* [4].

LEMME 4. - Soit G un groupe divisible de la forme $G = T \oplus D$, où T est un p-groupe et où D est un groupe sans torsion. Alors, tout sous-groupe complètement invariant H de G, distinct de G et de T, est égal à $T[p^r]$ où r est un entier $\geqslant 0$ (cf. [4], page 64, exercice 69).

LEMME 5. - Soit G un groupe de la forme

$$G = T \oplus H$$

où T est un p-groupe divisible et où H est un groupe sans torsion. Si K est un sous-groupe complètement invariant de G, on a soit $K = T \oplus L$, où L est un sous-groupe complètement invariant de H, soit $K = T[p^r]$, où r est un entier $\geqslant 0$.

Démonstration. - D'après le lemme 1, K admet la décomposition en somme directe

$$K = K \cap T \oplus K \cap H .$$

$K \cap T$ et $K \cap H$ sont des sous-groupes complètement invariants de T et H respectivement.

S'il est différent de T, $K \cap T$ est, d'après le lemme 3, égal à $T[p^r]$ où r est un entier $\geqslant 0$.

Par suite, $p^r K = p^r(K \cap H)$ est un sous-groupe complètement invariant de G contenu dans H et il n'est nul que si $K \cap H = 0$.

Pour démontrer le lemme il suffit de démontrer qu'il n'existe pas de sous-groupe complètement invariant de G contenu dans H. Supposons au contraire qu'il en existe un, soit L.

Il existe donc un élément x, non nul, dans L. Soit (x) le groupe cyclique engendré par x. Il existe un isomorphisme de $(x)/px$ dans T. Par suite, il existe un homomorphisme φ de (x) dans T, $\varphi \neq 0$. Puisque T est divisible φ se prolonge en un homomorphisme ψ de H dans T. Soit θ l'endomorphisme de G défini de la manière suivante :

$$\theta(y) = \psi(y) \quad \text{si} \quad y \in H$$
$$\theta(y) = 0 \quad \text{si} \quad y \in T .$$

On a $\theta(L) \subseteq L \cap T = 0$. Donc $\varphi((x)) = 0$, ce qui est impossible. Par conséquent $L = (0)$.

LEMME 8. - Soit G un groupe de la forme :

$$G = B \oplus H$$

où H est un groupe réduit sans torsion et où $B = T \oplus D$ est un groupe divisible, T étant un q-groupe et D un groupe sans torsion. Si K est un sous-groupe complètement invariant de G, on a soit $K = B \oplus L$ où L est un sous-groupe complètement invariant de H, soit $K = T$ soit $K = T[p^r]$ où r est un entier $\geqslant 0$.

Démonstration. - D'après le lemme 1, K admet la décomposition en somme directe $K = K \cap B \oplus K \cap H$, $K \cap B$ et $K \cap H$ sont des sous-groupes complètement invariants de B et de H respectivement.

D'après le lemme 4, ou bien $K \cap B = B$ d'où $K = B \oplus K \cap H$, ou bien $K \cap B = T[q^r]$, r étant un entier $\geqslant 0$, alors K est un sous-groupe complètement invariant de $T \oplus H$; donc, d'après le lemme 5, si $p = q$, et d'après le lemme 7, si $p \neq q$, on a $K \cap H = 0$ et $K = T[q^r]$ où r est un entier $\geqslant 0$. Enfin, si $K \cap B = T$, on peut écrire

$$K = T \oplus K \cap H .$$

S'il existe un élément $x \in K \cap H$, $x \neq 0$, x peut être plongé dans un sous-groupe pur et de rang 1 de H. soit N.

S'il existe un élément $x \in H \cap K$, $x \neq 0$, il existe un isomorphisme i de (x) dans D.

Puisque le groupe D est divisible, il existe un prolongement φ, de i, à H.

Soit ψ l'homomorphisme de G défini par

$$\psi(z) = \varphi(z) \quad \text{si } z \in H$$
$$\psi(z) = 0 \quad \text{si } z \in B .$$

On a $\psi(x) \in H \cap D = 0$. Donc $\varphi(x) = 0$ et, par conséquent, on a $d(x) = 0$ ce qui est impossible, puisque i est un isomorphisme.

Par suite, $K \cap H = 0$ et donc $K = T$, ce qui démontre le lemme.

Le théorème 1 résulte alors des lemmes 2 à 8 où sont examinés les différents cas qui peuvent se produire.

D'autre part, on a le lemme suivant :

LEMME 9. - Si un groupe G admet la décomposition en somme directe $G = H \oplus K$ et si le sous-groupe H est complètement invariant, alors tout sous-groupe complètement invariant L du groupe H est complètement invariant dans G ; si M est un sous-groupe complètement invariant du groupe K, $H \oplus M$ est un sous-groupe complètement invariant de G.

On appelle C-groupe, tout groupe dont le treillis des sous-groupes complètement invariants, est totalement ordonné [2].

On dira qu'un groupe G n'est pas borné, s'il n'existe pas d'entier $n \neq 0$, pour lequel $nG = 0$.

Il résulte du théorème 1 et du lemme 9, le théorème ci-dessous :

THÉORÈME 2. - Soit G un groupe non borné, alors G est un C-groupe, si et seulement si $G = T \oplus D \oplus H$, où T est un q-groupe divisible, où D est un groupe divisible sans torsion et où H est un C-groupe p-réduit.

Démonstration. - Si G a la forme décrite dans l'énoncé, il résulte immédiatement du théorème 1, que G est un C-groupe.

Si G est un C-groupe, soit B le sous-groupe divisible maximal de G. Puisque B est un sous-groupe complètement invariant de G, alors B est un C-groupe. B contient, s'il n'est pas nul, le sous-groupe de torsion maximal T de G qui est un q-groupe [2]. T est, par suite, le sous-groupe de torsion maximal de B ; T est donc un q-groupe divisible et l'on a

$$B = T \oplus D$$

où D est un groupe divisible sans torsion. Donc, si B n'est pas nul, il existe un sous-groupe H de G tel que $G = B \oplus H$. Si H n'est pas nul, alors H est réduit, sans torsion, et d'après [2] il est divisible par tout nombre premier q, autre que le nombre premier p qui ne divise pas G. Par suite, H est un groupe p-réduit. D'après le lemme 9, H est un C-groupe.

Si G est un groupe réduit, il est sans torsion, sinon le théorème 2 de [2], entraînerait que G est borné. Par suite G est un C-groupe p-réduit.

3. C-groupes p-réduits.

Il résulte du lemme 15 (§ 1), que tout C-groupe p-réduit est un groupe p-réduit homogène. Il résulte du théorème 4 (§ 1) que, pour tout sous-groupe complètement invariant H d'un C-groupe p-réduit G et pour tout sous-groupe de base B de G, il existe une décomposition en somme directe de B :

$$B = B_1 \oplus B_2$$

et un entier positif k pour lesquels on a :

$$H = G \cap (p^k \hat{B}_1 \oplus p^{k+1} \hat{B}_2)$$

où $\hat{B}_i$ est, pour $i = 1, 2$, le complété dans $\hat{G}$ de B_i.

Soit G un C-groupe p-réduit, et soit $\overline{G}$ un groupe divisible minimal contenant G. Alors, pour tout $x \in \overline{G}$, il existe un entier positif k pour lequel $p^k x \in G$.

Nous désignerons par A et B les anneaux d'endomorphismes de G et $\overline{G}$ respectivement. L'anneau A est un sous-anneau de B (cf. [3]) et chaque élément φ de A peut être considéré comme la restriction à G de l'élément $\overline{\varphi}$ de B défini par :

$$\overline{\varphi}(x) = p^{-k} \varphi(p^k x) ,$$

si $x \in \overline{G}$ et si $p^k x \in G$.

Il est évident que si G est un C-groupe p-réduit, le treillis des sous-A-modules de $\overline{G}$ est totalement ordonné et que l'ensemble ordonné des sous-A-modules cycliques non nuls de M ne possède ni plus petit ni plus grand grand élément.

Soit V le centre de l'anneau A.

LEMME 1. - Le groupe G est un V-module sans torsion.

Démonstration. - Si φ est un élément de V, $\operatorname{Ker} \varphi$ est un sous-groupe pur complètement invariant de G. Donc si φ n'est pas nul, $\operatorname{Ker} \varphi = 0$.

LEMME 2. - L'anneau V ne possède pas de diviseur de zéro dans A.

Démonstration. - Soient $\varphi \in V$ et $\psi \in A$. Si l'on avait $\varphi = 0$ et si $\varphi \neq 0$, alors $\varphi\psi G = 0$. D'après le lemme 1, $\psi G = 0$. D'où $\psi = 0$.

LEMME 3. - L'anneau V est un anneau de valuation d'un corps K.

Démonstration. - Soient φ et ψ deux éléments non nuls de V ; les sous-groupes φG et ψG sont complètement invariants. Supposons que $\varphi G \subseteq \psi G$; alors, pour tout élément x de G il existe un élément y de G pour lequel $\varphi(x) = \psi(y)$; l'élément y ainsi défini, est unique, d'après le lemme 1. Soit θ l'application qui à l'élément x fait correspondre l'élément y ; θ est évidemment un endomorphisme du groupe G. Comme on a : $\varphi = \varphi\theta$ et que φ et ψ sont des éléments non nuls du centre V de l'anneau A, il suit, du lemme 2, que $\theta \in V$.

DÉFINITION 1. - Si G est un groupe sans torsion et si M est un groupe divisible minimal contenant G, on appelle quasi-endomorphisme de G, tout endomorphisme de M pour lequel il existe un entier n, non nul, tel que : $n\varphi\, G \subseteq G$; c'est-à-dire tel que $n\varphi$ soit un endomorphisme de G (cf. [1]).

L'ensemble des quasi-endomorphismes d'un groupe sans torsion G est un sous-anneau de l'anneau des endomorphismes du groupe M et il contient l'anneau des endomorphismes de G.

LEMME 4. - Si G est un C-groupe p-réduits, et si B_1 est l'anneau des quasi-endomorphismes de G, alors $\overline{G}$ est un B_1-module simple (fidèle).

Démonstration. - Si x et y sont deux éléments non nuls de G, il existe $\varphi \in A$ tel que $x = \varphi(y)$, si, par exemple, $Ax \subseteq Ay$. D'autre part, il existe un entier $k \geq 0$ et un élément ψ de A pour lesquels on a : $p^k y = \psi(x)$. Donc $y = \theta(x)$ où $\theta = p^{-k} \psi$ est un quasi-endomorphisme de G.

LEMME 5. - Si G est un C-groupe p-réduit, $\overline{G}$ est l'enveloppe injective du A-module G, lorsque l'anneau B_1 est artinien (à gauche).

Démonstration. - Il suffit de démontrer que $\overline{G}$ est un A-module injectif. D'après le lemme 4, $\overline{G}$ est un module injectif sur l'anneau B_1 des quasi-endomorphismes de G. La démonstration est alors la même que celle du théorème 12 de [5].

LEMME 6. - Soit G un C-groupe p-réduit. Soit B_1 l'anneau des quasi-endomorphismes de G. Alors le corps commutant K de B_1 sur $\overline{G}$ est le corps des fractions de l'anneau V, centre de l'anneau des endomorphismes A de G. De plus, K est le commutant de A sur $\overline{G}$.

Démonstration. - Il est évident qu'un élément α de l'anneau B des endomorphismes de $\overline{G}$ commute avec tout élément de A si et seulement s'il commute avec tout élément de B_1. D'autre part, si α est un élément de K, αG est un sous-A-module de $\overline{G}$. Si $\alpha G \subseteq G$, on a $\alpha \in V$. Sinon, il existe un entier $k \geqslant 0$ pour lequel $p^k(\alpha G) \subseteq G$. Donc $p^k \alpha \in V$ et, par suite, K est le corps des fractions de V.

LEMME 7. - *Soient* G *un* C-*groupe* p-*réduit,* A *l'anneau des endomorphismes de* G, V *le centre de* A *et* K *le corps des fractions de* V. *S'il existe un élément* α *de* K *et un élément* x *de* $\overline{G}$ *pour lesquels on a* $A\alpha x \supsetneq Ax$, *alors* $\alpha \in V$.

Démonstration. - En effet, si pour $\alpha \in K$ et $x \in \overline{G}$, on a : $A\alpha x \supsetneq Ax$ et si α n'appartient pas à V, alors $\alpha^{-1} \in V$. On a donc $A\alpha^{-1} x \subseteq Ax$, d'où $Ax \subseteq A\alpha x$, ce qui est impossible. Donc $\alpha \in V$.

On désignera par B_2 l'anneau des endomorphismes du K-espace vectoriel $\overline{G}$. On a évidemment $B_1 \subseteq B_2 \subseteq B$ et K est le centre de l'anneau B_2.

Soit H un sous-A-module de $\overline{G}$. Alors H est en particulier un V-module, et on a le lemme suivant.

LEMME 8. - *L'anneau des endomorphismes du groupe* H *coïncide avec l'anneau des* V-*endomorphismes du* V-*module* H.

Démonstration. - Tout V-endomorphisme du V-module H est un endomorphisme du groupe H. D'autre part, si $H \subseteq G$, alors il existe un entier $k \geqslant 0$, pour lequel on a :

$$p^{k+1} G \subseteq H \subseteq p^k G .$$

Soit φ un endomorphisme de H, alors on a :

$$p^{k+1} \varphi G \subseteq \varphi H \subseteq H \subseteq G .$$

Donc $p^{k+1} \varphi$ est un endomorphisme du groupe G et, par suite, φ appartient à l'anneau B_1 des quasi-endomorphismes de G. Donc φ commute avec tous les éléments de V et est un V-endomorphisme de H. Si $G \subset H$, il existe un entier $k > 0$, pour lequel $p^k H \subseteq G$ et si φ est un endomorphisme du groupe H, on a :

$$p^k \varphi G \subseteq \varphi(p^k H) \subseteq p^k H \subseteq G .$$

Par suite φ appartient à B_1 et est un V-endomorphisme de H.

Soit Γ un ensemble totalement ordonné par une relation d'ordre notée $\leqslant$ et qui, s'il n'est pas réduit à un seul élément, ne possède ni plus grand ni plus petit élément.

Soit M un module simple unitaire fidèle sur un anneau B. Soit F le corps commutant de B sur M.

On adjoint à l'ensemble Γ un élément noté 0, assujetti à la condition :

$$0 < \alpha \quad \text{quel que soit} \quad \alpha \in \Gamma .$$

DÉFINITION 2. - Appelons quasi-valuation du système constitué par M, F et B, une application v de M sur $\Gamma \cup \{0\}$ vérifiant les axiomes :

(I_1) $v(x + y) \leqslant \operatorname{Max.}(v(x), v(y))$ quels que soient x et $y \in M$.

(I_2) $v(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$.

(II_1) Si $0 \neq v(x) \leqslant v(y)$, où x et $y \in M$, il existe $\alpha \in F^*$, pour lequel $v(\alpha y) \leqslant v(x)$.

(II_2) Si pour un élément $x \in M$ et un élément $\alpha \in F$, on a : $v(\alpha x) < v(x)$, alors, quel que soit $y \in M$, on a : $v(\alpha y) \leqslant v(y)$.

(III) Si $v(x) \leqslant v(y)$ où x et $y \in M$, il existe φ dans B tel que $x = \varphi y$ et que : $v(\varphi z) \leqslant v(z)$ quel que soit $z \in M$.

Soit G un C-groupe p-réduit et soit Λ l'anneau des endomorphismes de G. Les axiomes (I), (II) et (III), sont vérifiés si l'on prend soit le système constitué par $\overline{G}$, le corps $\underset{\sim}{R}$ des nombres rationnels, l'anneau B des endomorphismes de $\overline{G}$; soit le système constitué par $\overline{G}$, le corps K des fractions de l'anneau V, centre de l'anneau Λ et par l'anneau B_2 des endomorphismes du K-espace vectoriel $\overline{G}$. Dans les deux cas, on prendra pour ensemble Γ, l'ensemble des sous-Λ-modules cycliques non nuls de $\overline{G}$ et pour application v l'application qui à un élément x de $\overline{G}$ fait correspondre Λx.

Des axiomes (I), (II) et (III) résultent immédiatement les propriétés :

(A) Si $\alpha \in F^*$ et si $x \in M$, on a $v(\alpha x) < v(x)$ (resp. $v(\alpha x) = v(x)$) si et seulement si l'on a $v(x) < v(\alpha^{-1} x)$ (resp. $v(x) = v(\alpha^{-1} x)$).

(B) Si pour un élément x de M et pour un élément α de F^*, on a $v(x) < v(\alpha x)$, alors, pour tout élément y de M, on a $v(y) \leqslant v(\alpha y)$.

(C) Quel que soit $x \in M$, on a : $v(- x) = v(x)$.

(D) L'ensemble Λ des éléments φ de B pour lesquels on a :

$$v(\varphi x) \leqslant v(x) \quad \textit{quel que soit} \quad x \in M \quad ,$$

est un sous-anneau unitaire de B .

(E) *Le treillis des sous-*Λ*-modules de* M *est totalement ordonné et est isomorphe à l'ensemble totalement ordonné des sections commençantes généralisées de* $\Gamma \cup 0$. *Pour tout* $x \in M$, *le sous-module cyclique* Λx *est l'ensemble des éléments* y *de* M *pour lesquels* $v(y) \leqslant v(x)$.

(F) *Si* $\varphi \in \Lambda$ *et si* N *est un sous-*Λ*-module non nul de* M , *alors* $\varphi N = 0$ *entraîne* $\varphi = 0$. *En particulier l'anneau* Λ *est premier.*

LEMME 9. - *L'ensemble* $V = \{\alpha \; ; \; \alpha \in F \; ; \; v(\alpha x) \leqslant v(x)$, *quel que soit* $x \in M\}$ *est un sous-anneau de valuation du corps* F (cf. [6]).

Démonstration. - Il est évident que V est un sous-anneau unitaire de F . Soit $\alpha \in F$, $\alpha \notin V$. Alors, il existe un élément x de M pour lequel on a : $v(x) < v(\alpha x)$. Donc, d'après la propriété (A), on a $v(\alpha^{-1} x) < v(x)$; et d'après l'axiome (II_2), on a $v(\alpha^{-1} y) \leqslant v(y)$ pour tout $y \in M$. Donc $\alpha^{-1} \in V$. Soient α et $\beta \in V$, où $\alpha \neq 0$. Si $\alpha^{-1} \in V$, alors $\alpha^{-1} \beta\alpha$ appartient à V . Sinon, soit x un élément de M . On a, puisque $\beta \in V$, l'inégalité :

$$v(\beta\alpha x) \leqslant v(\alpha x) \, .$$

D'où, d'après la propriété (Λ), $v(\alpha^{-1} \beta\alpha x) \leqslant v(x)$; par suite $\alpha^{-1} \beta\alpha \in V$.

Nous désignerons par $\mathfrak{G}$ le groupe de la valuation du corps F , correspondant à l'anneau Λ ; et nous noterons $\mathcal{V}$ cette valuation.

LEMME 10. - *Soient* α *et* β *deux éléments de* F . *On a* $v(\alpha x) = v(\beta x)$ *quel que soit* $x \in M$ *si et seulement si* $\mathcal{V}(\alpha) = \mathcal{V}(\beta)$.

Démonstration. - Si $v(\alpha x) = v(\beta x)$ quel que soit $x \in M$, alors, d'après la propriété (Λ) et d'après le lemme 9, $\beta^{-1} \alpha$ et $\alpha^{-1} \beta$ appartiennent à l'anneau V ; par suite, on a : $\mathcal{V}(\alpha) = \mathcal{V}(\beta)$. Inversement, si $\mathcal{V}(\alpha) = \mathcal{V}(\beta)$; les éléments $\beta^{-1} \alpha$ et $\alpha^{-1} \beta$ appartiennent à V . Donc, quel que soit $x \in M$, on a $v(\beta^{-1} \alpha x) \leqslant v(x)$ et $v(\alpha^{-1} \beta x) \leqslant v(x)$. Il résulte alors, de la propriété (A), que $v(\alpha x) < v(\beta x)$ et $v(\beta x) \leqslant v(\alpha x)$. D'où $v(\alpha x) = v(\beta x)$.

Soit ρ un élément du groupe $\mathfrak{G}$. Il existe un élément $\alpha \in F$ tel que $\rho = \mathcal{V}(\alpha)$. D'après le lemme 10, l'application de l'ensemble Γ , qui à $v(x)$ fait correspondre $v(\alpha x)$, ne dépend que de ρ . Soit Θ_ρ cette application.

LEMME 11. — Θ_ρ <u>est un automorphisme de l'ensemble ordonné</u> Γ .

<u>Démonstration</u>. — L'application Θ_ρ est surjective, car si $v(y) \in \Gamma$, on a $y = \alpha(\alpha^{-1} y)$. D'où $v(y) = \Theta_\rho v(\alpha^{-1} y)$. L'inégalité $v(x) \leqslant v(y)$ a lieu si, et seulement si, il existe un élément φ de l'anneau Λ pour lequel $x = \varphi y$; c'est-à-dire si, et seulement si, $\alpha x = \varphi(\alpha y)$; par suite, l'inégalité $v(x) \leqslant v(y)$ n'a lieu que si $\Theta_\rho v(x) \leqslant \Theta_\rho v(y)$. Il est immédiat que l'égalité $\Theta_\rho v(x) = \Theta_\rho v(y)$ entraîne $v(x) = v(y)$.

On démontre facilement le lemme :

LEMME 12. — <u>L'application qui à l'élément</u> ρ <u>du groupe</u> $\mathfrak{F}$, <u>fait correspondre l'automorphisme</u> Θ_ρ <u>de l'ensemble</u> Γ <u>est un isomorphisme du groupe</u> $\mathfrak{F}$ <u>dans le groupe</u> $\mathfrak{S}$ <u>des automorphismes de</u> Γ , <u>ordonné par la relation</u> $\precsim$ <u>définie de la manière suivante</u> :

Ψ , $\Theta \in \mathfrak{S}$ <u>et</u> $\Psi \precsim \Theta$ <u>si et seulement si</u> $\Psi(\lambda) \precsim \Theta(\lambda)$ <u>pour tout</u> $\lambda \in \Gamma$.

D'autre part, les axiomes (II_1) et (II_2) entraînent, respectivement les propriétés (II_1') et (II_2') :

(II_1') Si $\lambda \leqslant \mu$ où λ et $\mu \in \Gamma$, il existe $\rho \in \mathfrak{F}$ tel que $\Theta_\rho \mu \leqslant \lambda$.

(II_2') Si $\Theta_\rho \lambda < \lambda$ où $\lambda \in \Gamma$ et $\rho \in \mathfrak{F}$, alors on a $\Theta_\rho \mu \leqslant \mu$ quel que soit $\mu \in \Gamma$.

La propriété (II_1') entraîne le résultat :

LEMME 13. — <u>La valuation du corps</u> F <u>est triviale si et seulement si</u> Γ <u>ne possède qu'un élément</u>.

LEMME 14. — <u>Si</u> B <u>est l'anneau des endomorphismes du</u> F-<u>espace vectoriel</u> M , <u>alors</u> B <u>est l'anneau des endomorphismes du</u> V-<u>module</u> M .

<u>Démonstration</u>. — On a évidemment l'inclusion : $B \subseteq L_V(M)$. Si $f \in F$ et si $f \notin V$, $\varphi(fx) = f\varphi(x)$ où $\varphi \in B$ et $x \in M$ résulte du fait que $f^{-1} \in V$ et que tout élément de M peut se mettre sous la forme fy où $y \in M$.

Il résulte de l'axiome (II_1), le lemme :

LEMME 15. — <u>Si</u> G <u>est un sous-</u>Λ<u>-module non nul de</u> M , <u>alors quel que soit</u> $x \in M$, <u>il existe</u> $\alpha \in F^*$ <u>pour lequel</u> $\alpha x \in G$.

Il résulte de la propriété (E) et du lemme 9 :

LEMME 16. - <u>Tout sous-Λ-module</u> G <u>de</u> M <u>est un</u> V-<u>module ; si</u> G <u>n'est pas nul, le rang du</u> V-<u>module</u> G <u>est égal à la dimension du</u> F-<u>espace vectoriel</u> M.

Il résulte du lemme 15 :

LEMME 17. - <u>Si un sous-Λ-module non nul</u> G <u>de</u> M <u>est un</u> F-<u>espace vectoriel,</u> G <u>coïncide avec</u> M.

Nous supposerons, dans la suite, que B est l'anneau des endomorphismes du F-espace vectoriel M, et que Γ n'est pas réduit à un seul élément.

Soit G un sous-Λ-module non nul de M et distinct de M. Soit Λ_1 l'anneau des V-endomorphismes de G.

LEMME 18. - <u>L'anneau</u> Λ_1 <u>est un sous-anneau de</u> B.

<u>Démonstration</u>. - Soit $\varphi \in \Lambda_1$ et soit $x \in M$. D'après le lemme 15, il existe un élément α de F^* pour lequel, on a $\alpha x \in G$. Posons $\overline{\varphi}(x) = \alpha^{-1}\varphi(\alpha x)$. Si pour un autre élément β de F^* on a $\beta x \in G$, alors $\alpha^{-1}\varphi(\alpha x) = \beta^{-1}\varphi(\beta x)$; en effet, si $x \in G$ et si α et β appartiennent à V, alors

$$\alpha^{-1}\varphi(\alpha x) = \alpha^{-1}\alpha\varphi(x) = \varphi(x) , \qquad \text{et} \quad \beta^{-1}\varphi(\beta x) = \varphi(x) .$$

Si $x \in G$ et si $\beta \notin V$, alors, d'après le lemme 9, $\beta^{-1} \in V$. Donc $\varphi(x) = \varphi(\beta^{-1}\beta x) = \beta^{-1}\varphi(\beta x)$. Enfin si $x \notin G$, α et β appartiennent nécessairement à V. Puisque V est un anneau de valuation, il existe un élément δ de V pour lequel : $\alpha = \delta\beta$. D'où

$$\alpha^{-1}\varphi(\alpha x) = \beta^{-1}\delta^{-1}\varphi(\delta\beta x) = \beta^{-1}\varphi(\beta x) .$$

Montrons que $\overline{\varphi}$ est un endomorphisme du groupe M. Soient x et $y \in M$. Alors, pour deux éléments α et β de F^*, on a αx et $\beta y \in G$. Soient $\overline{\varphi}(x) = \alpha^{-1}\varphi(\alpha x)$ et $\overline{\varphi}(y) = \beta^{-1}\varphi(\beta y)$. Si, par exemple $\beta = \gamma\alpha$ où $\gamma \in V$, alors $\gamma\alpha y$ et $\gamma\alpha x \in G$. Il en résulte que $\beta(x + y) \in G$. Donc

$$\overline{\varphi}(x + y) = \beta^{-1}\varphi(\beta(x + y)) = \beta^{-1}\varphi(\beta x) + \beta^{-1}\varphi(\beta y) = \overline{\varphi}(x) + \overline{\varphi}(y) .$$

Montrons que $\overline{\varphi}$ est un F-endomorphisme de M. Il suffit, d'après le lemme 14, de montrer que $\overline{\varphi}$ est un V-endomorphisme de M. Soit $\alpha \in V$ et soit $x \in M$. Si $x \in G$, on a

$$\overline{\varphi}(\alpha x) = \varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x) = \alpha\overline{\varphi}(x) .$$

Sinon, il existe $\beta \in V^*$ tel que $\beta x \in G$. Alors

$$\overline{\varphi}(x) = \beta^{-1}\varphi(\beta x) ; \qquad \text{donc} \quad \alpha\overline{\varphi}(x) = \alpha\beta^{-1}\varphi(\beta x) .$$

si $\alpha\beta^{-1} \in V$, on a

$$\alpha\beta^{-1}\ \varphi(\beta x) = \varphi(\alpha\beta^{-1}\ \beta x) = \overline{\varphi}(\alpha x) .$$

Sinon $\beta^{-1}\ \alpha \in V$ et

$$\alpha\beta^{-1}\ \varphi(\beta x) = \alpha\beta^{-1}\ \varphi(\beta\alpha^{-1}.\alpha x) = \overline{\varphi}(\alpha x) .$$

Le prolongement $\overline{\varphi}$ de φ à M ainsi défini est unique et l'application $\varphi \to \overline{\varphi}$ est un isomorphisme de Λ_1 dans B . On peut donc considérer Λ_1 comme un sous-anneau de B .

L'ensemble Γ_1 des sous-Λ_1-modules cycliques non nuls de M est totalement ordonné puisque $\Lambda \subseteq \Lambda_1$.

LEMME 19. - L'ensemble Γ_1 ne possède ni plus petit ni plus grand élément.

Démonstration. - En effet, si Γ_1 possédait un plus grand élément, M serait un Λ_1-module cyclique, c'est-à-dire : $M = \Lambda_1\ x$ où $x \in M$. Puisqu'il existe $\alpha \in F^*$ tel que $\alpha x \in G$, on aurait $M = G$, ce qui contredit l'hypothèse faite sur G .

Si Γ_1 possédait un plus petit élément, il existerait un sous-Λ_1-module minimal dans M , soit $\Lambda_1\ x$ où $x \in M$; $\Lambda_1\ x$ serait un F-espace-vectoriel. D'après le lemme 17, on aurait $M = \Lambda_1\ x$, d'où $M = G$; ce qui est impossible.

LEMME 20. - L'application v_1 de M sur $\Gamma_1 \cup \{0\}$ définie par $v_1(x) = \Lambda_1\ x$ où x est un élément non nul de M et par $v_1(0) = 0$, est une quasi-valuation du système constitué par M , F , B .

Démonstration. - Les axiomes (I) et (III) sont visiblement vérifiés. Soient x et $y \in M$, $x \neq 0$. Si l'on a $v_1(x) < v_1(y)$, alors nécessairement $v(x) < v(y)$. Donc il existe $\alpha \in F^*$ tel que $v(\alpha y) \leq v(x)$. D'où $v_1(\alpha y) \leq v(x)$. Et l'axiome (II_2) est vérifié. Si, pour un élément α de F et un élément x de M , on a $v_1(\alpha x) < v_1(x)$, alors ou bien $\alpha \in V$ et, $v(\alpha y) \leq v(y)$ quel que soit $y \in M$; par suite, $v_1(\alpha y) \leq v_1(y)$ quel que soit $y \in M$; ou bien $\alpha \notin V$, donc $\alpha^{-1} \in V$; par conséquent, on a $\alpha^{-1}\ x \in \Lambda x \subseteq \Lambda_1\ x$, donc $\Lambda_1\ \alpha^{-1}\ x \subseteq \Lambda_1\ x$, c'est-à-dire $v_1(x) \leq v_1(\alpha x)$, ce qui est impossible.

THÉORÈME 1. - Soit M un groupe divisible sans torsion. S'il existe une quasi-valuation non triviale v du système $(M , B , \underset{\sim}{R})$ où B est l'anneau des endomorphismes de M et où $\underset{\sim}{R}$ est le corps des nombres rationnels, et si Λ est l'anneau de cette quasi-valuation, tout sous-Λ-module G de M , différent de M et du module (0) est un C-groupe p-réduit.

Démonstration. - Si la quasi-valuation v n'est pas triviale, elle induit, d'après le lemme 13, une valuation non triviale du corps $\underset{\sim}{R}$. A cette valuation, correspond l'anneau P des nombres rationnels dont le dénominateur est premier à un nombre premier p. D'après le lemme 20, G est un C-groupe. D'après le lemme 17, G est réduit. Par suite, G est un C-groupe p-réduit.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BEAUMONT (R. A.) and PIERCE (R. S.). - Torsion free groups of rank two. - Providence, American mathematical Society, 1961 (Memoirs of the American mathematical Society, 38).

[2] BRAMERET (Marie-Paule). - Treillis d'idéaux et structure d'anneaux, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et Théorie des nombres, t. 16, 1962/63, n° 1, 11 p.

[3] FUCHS (Lászlό). - Abelian groups. - Budapest, Publishing House of the Hungarian Academy of Sciences, 1958.

[4] KAPLANSKY (Irving). - Infinite abelian groups. - Ann Arbor, University of Michigan Press, 1954 (University of Michigan Publications in Mathematics, 2).

[5] LESIEUR (L.) et CROISOT (R.). - Sur les anneaux premiers noethériens à gauche, Ann. scient. Ec. Norm. Sup. Paris, 3e série, t. 76, 1956, p. 161-183.

[6] SCHILLING (O. F. G.). - The theory of valuations. - New York, American mathematical Society, 1950 (Mathematical Surveys, 4).