Josette Calais

Équivalences principales généralisées dans les demi-groupes

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 16, n° 2 (1962-1963), exp. n° 12, p. 1-25
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1962-1963__16_2_A1_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
16e année, 1962/63, n° 12

11 février 1963

ÉQUIVALENCES PRINCIPALES GÉNÉRALISÉES DANS LES DEMI-GROUPES

par Mlle Josette CALAIS

Introduction. - Cet exposé fait suite, en quelque sorte, à celui de R. DESQ, du 12 février 1962. J'ai généralisé la méthode utilisée par R. DESQ, et j'ai été ainsi conduite aux définitions et à l'étude qui vont suivre.

1. Généralités.

DÉFINITION 1.1. - Etant donnés un demi-groupe D et un complexe H de D, on désigne par $\rho_H^{\alpha,\beta}$ (α , β entiers positifs ou nuls) la relation d'équivalence définie dans D par

$$x \equiv x' \quad (\rho_H^{\alpha,\beta})$$

si et seulement si

$$y_1\, y_2 \cdots y_\alpha\, x y_{\alpha+1} \cdots y_{\alpha+\beta} \in H \iff y_1\, y_2 \cdots y_\alpha\, x'\, y_{\alpha+1} \cdots y_{\alpha+\beta} \in H \ .$$

On vérifie en effet facilement qu'une telle relation est une relation d'équivalence. Dans toute cette étude on suppose α et β non simultanément nuls. On distingue alors les cas suivants :

1° $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$ $\quad x = x' \quad (\rho_H^{\alpha,0})$ $\qquad (H \,{}^{\bullet}\!.\, x) \cap D^\alpha = (H \,{}^{\bullet}\!.\, x') \cap D^\alpha$

2° $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$ $\quad x = x' \quad (\rho_H^{0,\beta})$ $\qquad (H \,.^{\bullet}\, x) \cap D^\beta = (H \,.^{\bullet}\, x') \cap D^\beta$

3° $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ $\quad x = x' \quad (\rho_H^{\alpha,\beta})$ $\qquad (H \,..\, x) \cap (D^\alpha \times D^\beta) = (H \,..\, x') \cap (D^\alpha \times D^\beta)$

Les équivalences $\rho_H^{1,0}$, $\rho_H^{0,1}$ et $\rho_H^{1,1}$ ne sont autres que les équivalences principales ${}_H R$, R_H [1] et R'_H [2].

Dans la suite on utilisera aussi les notations définies par :

$$Q_x^{\alpha,0} = (H \,{}^{\bullet}\!.\, x) \cap D^\alpha \ ; \quad Q_x^{0,\beta} = (H \,.^{\bullet}\, x) \cap D^\beta \ ; \quad Q_x^{\alpha,\beta} = (H \,..\, x) \cap (D^\alpha \times D^\beta) \ ,$$

THÉORÈME 1.1. - Les relations d'équivalence $\rho_H^{\alpha,0}$ (resp. $\rho_H^{0,\beta}$, $\rho_H^{\alpha,\beta}$) sont régulières à gauche (resp. à droite, à droite et à gauche).

Montrons que $x \equiv x'$ $(\rho_H^{\alpha,0})$ entraîne $ax \equiv ax'$ $(\rho_H^{\alpha,0})$ pour tout $a \in D$. En effet $x \equiv x'$ $(\rho_H^{\alpha,0})$ implique $yx \in H \iff yx' \in H$ si y appartient à D^α. Par suite, quel que soit $a \in D$, on a $yax \in H \iff yax' \in H$, si y appartient à D^α, donc $ax \equiv ax'$ $(\rho_H^{\alpha,0})$, $\rho_H^{\alpha,0}$ est régulière à gauche.

(Démonstrations analogues pour les autres cas.)

DÉFINITION 2.1. - On appelle résidu de H par rapport à l'équivalence $\rho_H^{\alpha,0}$ (resp. $\rho_H^{0,\beta}$, $\rho_H^{\alpha,\beta}$) l'ensemble $W_H^{\alpha,0}$ (resp. $W_H^{0,\beta}$, $W_H^{\alpha,\beta}$) des éléments $x \in D$ pour lesquels $Q_x^{\alpha,0} = \emptyset$ (resp. $Q_x^{0,\beta} = \emptyset$, $Q_x^{\alpha,\beta} = \emptyset$).

<u>Remarque</u>. - On a $W_H^{1,0} = {}_H W$, $W_H^{0,1} = W_H$ et $W_H^{1,1} = W_H'$, avec les notations utilisées dans [1] et [2].

PROPRIÉTÉ 1.1. - Si $W_H^{\alpha,0}$ (resp. $W_H^{0,\beta}$, $W_H^{\alpha,\beta}$) n'est pas vide, c'est une classe modulo $\rho_H^{\alpha,0}$ (resp. $\rho_H^{0,\beta}$, $\rho_H^{\alpha,\beta}$) et un idéal à gauche (resp. à droite, bilatère) de D.

1° Pour tout $x \in W_H^{\alpha,0}$, on a $Q_x^{\alpha,0} = \emptyset$, donc $W_H^{\alpha,0}$ est une classe modulo $\rho_H^{\alpha,0}$.

2° Soient $x \in W_H^{\alpha,0}$ et $a \in D$. Si $ax \notin W_H^{\alpha,0}$, il reste $y \in D^\alpha$ tel que $yax \in H$, ce qui entraîne $Q_x^{\alpha,0} \neq \emptyset$. Ceci est contraire à l'hypothèse, donc $ax \in W_H^{\alpha,0}$.

(Démonstrations analogues pour les autres cas.)

PROPRIÉTÉ 2.1. - On a les relations :

$$W_H^{\alpha,0} = W_H^{1,0} \mathbin{.\!\cdot} D^{\alpha-1} \; ; \qquad W_H^{0,\beta} = W_H^{0,1} \mathbin{\cdot\!.} D^{\beta-1}$$

$$W_H^{\alpha,\beta} = W_H^{\alpha,0} \mathbin{\cdot\!.} D^\beta = W_H^{0,\beta} \mathbin{.\!\cdot} D^\alpha = (W_H^{1,1} \mathbin{.\!\cdot} D^{\alpha-1}) \mathbin{\cdot\!.} D^{\beta-1}$$

avec la convention suivante : K étant un complexe de D, on pose

$$K \mathbin{.\!\cdot} D^0 = K \mathbin{\cdot\!.} D^0 = K .$$

Soit $x \in W_H^{\alpha,0}$. On a $D^\alpha x \cap H = \emptyset$, donc $D^{\alpha-1} x \subseteq W_H^{1,0}$ et par suite $x \in W_H^{1,0} \mathbin{.\!\cdot} D^{\alpha-1}$.

Soit $x \in W_H^{1,0} \mathbin{.\!\cdot} D^{\alpha-1}$. On a $D^{\alpha-1} x \subseteq W_H^{1,0}$ par suite

$$D^\alpha x \cap H = \emptyset , \qquad \text{donc } x \in W_H^{\alpha,0} .$$

(Démonstrations analogues pour les autres formules.)

<u>Remarque</u>. – Avec la convention faite plus haut, on peut écrire la formule générale suivante :

$$W_H^{\alpha,\beta} = (W_H^{1,0} \mathbin{.\!^{\bullet}} D^{\alpha-1}) \mathbin{^{\bullet}\!.} D^{\beta} = (W_H^{0,1} \mathbin{^{\bullet}\!.} D^{\beta-1}) \mathbin{.\!^{\bullet}} D^{\alpha}$$

valable pour $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$.

THÉORÈME 2.1.

1° $x \equiv x' \quad (\rho_H^{\alpha,0})$ entraîne $x \equiv x' \quad (\rho_H^{\alpha+1,0})$;

2° $x \equiv x' \quad (\rho_H^{0,\beta})$ entraîne $x \equiv x' \quad (\rho_H^{0,\beta+1})$;

3° $x \equiv x' \quad (\rho_H^{\alpha,\beta})$ entraîne $x \equiv x' \quad (\rho_H^{\alpha+1,\beta})$ et $x \equiv x' \quad (\rho_H^{\alpha,\beta+1})$.

Soit $x \equiv x' \quad (\rho_H^{\alpha,0})$, on a

$$(H \mathbin{^{\bullet}\!.} x) \cap D^{\alpha} = (H \mathbin{^{\bullet}\!.} x') \cap D^{\alpha}$$

et par conséquent

$$(H \mathbin{^{\bullet}\!.} x) \cap D^{\alpha+1} = (H \mathbin{^{\bullet}\!.} x') \cap D^{\alpha+1}$$

c'est-à-dire $x \equiv x' \quad (\rho_H^{\alpha+1,0})$.

(Démonstrations analogues pour les autres cas.)

<u>Conséquences</u>.

1° L'ensemble des relations $\rho_H^{\alpha,0}$ (resp. $\rho_H^{0,\beta}$) ordonné par l'inclusion forme une chaîne C_H (resp. C'_H) pour laquelle $\rho_H^{1,0}$ (resp. $\rho_H^{0,1}$) est élément minimum :

$$C_H : \quad ({}_H R =)\ \rho_H^{1,0} \subseteq \rho_H^{2,0} \subseteq \dots \subseteq \rho_H^{\alpha,0} \subseteq \rho_H^{\alpha+1,0} \subseteq \dots$$

$$C'_H : \quad (R_H =)\ \rho_H^{0,1} \subseteq \rho_H^{0,2} \subseteq \dots \subseteq \rho_H^{0,\beta} \subseteq \rho_H^{0,\beta+1} \subseteq \dots$$

2° Pour les relations $\rho_H^{\alpha,\beta}$ on peut écrire le tableau suivant T_H :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\cdots & \rho_H^{1,p} & & \rho_H^{2,p-1} & \cdots & \rho_H^{p-1,2} & & \rho_H^{p,1} & \cdots \\
& & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \\
& & \rho_H^{1,3} & & \rho_H^{2,2} & & \rho_H^{3,1} & & \\
& & & \rho_H^{1,2} \arrow[ul] \arrow[ur] & & \rho_H^{2,1} \arrow[ul] \arrow[ur] & & & \\
& & & & \rho_H^{1,1} \arrow[ul] \arrow[ur] & & & & \\
& & & & (= R'_H) & & & &
\end{tikzcd}$$

Dans ce tableau, les flèches sont mises à la place du signe d'inclusion $\subseteq$.

THÉORÈME 3.1. - S'il existe un entier $n > 0$ tel que $D^n = D^{n+1}$, les chaînes C_H et C'_H sont finies, leur élément maximum étant $\rho_H^{n,0}$ pour l'une, $\rho_H^{0,n}$ pour l'autre ; le tableau T_H est fini, l'ensemble des équivalences $\rho_H^{\alpha,\beta}$ admettant pour élément maximum $\rho_N^{n,n}$. En particulier si $D = D^2$, on a $\rho_H^{\alpha,0} = \rho_H^{1,0}$ quel que soit $\alpha \geqslant 1$, $\rho_H^{0,\beta} = \rho_H^{0,1}$ quel que soit $\beta \geqslant 1$ et $\rho_H^{\alpha,\beta} = \rho_H^{1,1}$ quels que soient $\alpha \geqslant 1$ et $\beta \geqslant 1$.

1° Si $D^n = D^{n+1}$, on a $(H \,^{\bullet}\!\!\centerdot\, x) \cap D^n = (H \,^{\bullet}\!\!\centerdot\, x) \cap D^{n+\lambda}$ pour tout $\lambda > 0$, donc $\rho_H^{n+\lambda,0} = \rho_H^{n,0}$ pour tout $\lambda \geqslant 0$, de même $\rho_H^{0,n+\mu} = \rho_H^{0,n}$ pour tout $\mu \geqslant 0$.

2° Si $D^n = D^{n+1}$, dans le tableau T_H, on a :

- pour la ligne $\alpha + \beta = n + 2$, $\rho_H^{1,n+1} = \rho_H^{1,n}$ et $\rho_H^{n+1,1} = \rho_H^{n,1}$. En effet l'hypothèse entraîne $(H \,..\, x) \cap (D \times D^n) = (H \,..\, x) \cap (D \times D^{n+1})$ et $(H \,..\, x) \cap (D^n \times D) = (H \,..\, x) \cap (D^{n+1} \times D)$.

La ligne $\alpha + \beta = n + 2$ se réduit donc à

$$\rho_H^{2,n}\ ,\ \rho_H^{3,n-1}\ ,\ \ldots\ ,\ \rho_H^{n-1,3}\ ,\ \rho_H^{n,2}$$

- la ligne suivante de rang $\alpha + \beta = n + 3$ se réduit de la même façon à

$$\rho_H^{3,n}\ ,\ \rho_H^{4,n-1}\ ,\ \ldots\ ,\ \rho_H^{n-1,4}\ ,\ \rho_H^{n,3}$$

et ainsi de suite, la ligne de rang $\alpha + \beta = 2n$ se réduit à $\rho_H^{n,n}$, et $\rho_H^{n+\lambda,n+\mu} = \rho_H^{n,n}$ quels que soient $\lambda \geqslant 0$, $\mu \geqslant 0$.

D'où le théorème énoncé.

2. Etude des résidus.

PROPRIÉTÉ 1.2. - On a :

1° $W_H^{\alpha,0} \subseteq W_H^{\alpha+1,0}$ pour tout $\alpha \geqslant 1$.

2° $W_H^{0,\beta} \subseteq W_H^{0,\beta+1}$ pour tout $\beta \geqslant 1$.

3° $W_H^{\alpha,\beta} \subseteq W_H^{\alpha+1,\beta} \cap W_H^{\alpha,\beta+1}$ pour tout $\alpha \geqslant 1$ et tout $\beta \geqslant 1$.

Soit $x \in W_H^{\alpha,0}$; on a $Q_x^{\alpha,0} = \emptyset$ et par suite $Q_x^{\alpha+1,0} = \emptyset$ et $x \in W_H^{\alpha+1,0}$.

(Démonstrations analogues pour les autres cas.)

Conséquences.

1° L'ensemble des résidus $W_H^{\alpha,0}$ (resp. $W_H^{0,\beta}$) ordonné par l'inclusion forme une chaîne Γ_H (resp. Γ'_H) pour laquelle $W_H^{1,0}$ (resp. $W_H^{0,1}$) est élément minimum :

$$\Gamma_H : \quad ({}_H W =)\ W_H^{1,0} \subseteq W_H^{2,0} \subseteq \ldots \subseteq W_H^{\alpha,0} \subseteq W_H^{\alpha+1,0} \subseteq \ldots$$

$$\Gamma'_H : \quad (W_H =)\ W_H^{0,1} \subseteq W_H^{0,2} \subseteq \ldots \subseteq W_H^{0,\beta} \subseteq W_H^{0,\beta+1} \subseteq \ldots$$

2° Pour les résidus $W_H^{\alpha,\beta}$ $(\alpha\ ,\ \beta \neq 0)$ on peut écrire le tableau suivant τ_H :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\cdots & & & \cdots & & & \cdots \\
W_H^{1,p} & & W_H^{2,p-1} & \cdots & W_H^{p-1,2} & & W_H^{p,1} \\
\cdots & W_H^{1,3} & & W_H^{2,2} & & W_H^{3,1} & \cdots \\
& & W_H^{1,2} \arrow[ul] \arrow[ur] & & W_H^{2,1} \arrow[ul] \arrow[ur] & & \\
& & & W_H^{1,1} \arrow[ul] \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

$$(= W'_H)$$

Dans ce tableau τ_H , les flèches sont mises à la place du signe d'inclusion $\subseteq$.

PROPRIÉTÉ 2.2. - On a $W_H^{\alpha,0} = \emptyset$ (resp. $W_H^{0,\beta} = \emptyset$, $W_H^{\alpha,\beta} = \emptyset$) si et seulement si $W_H^{1,0} = \emptyset$ (resp. $W_H^{0,1} = \emptyset$, $W_H^{1,1} = \emptyset$) c'est-à-dire si H est net à gauche (resp. à droite, bilatèrement net).

1° Supposons $W_H^{\alpha,0} = \emptyset$ pour $\alpha > 1$. D'après la propriété précédente on a $W_H^{1,0} \subseteq W_H^{\alpha,0}$, donc $W_H^{1,0} = \emptyset$.

2° Supposons $W_H^{1,0} = \emptyset$, et supposons que l'on ait $W_H^{\alpha,0} \neq \emptyset$ pour un $\alpha > 1$. Soit $x \in W_H^{\alpha,0}$, quel que soit $a \in D^{\alpha}$, $ax \notin H$.

Mais on a $H \,^{\bullet}.\, ax \neq \emptyset$ puisque $W_H^{1,0} = \emptyset$. Il existe $b \in D$ tel que $bax \in H$ $ba \in D^{\alpha+1}$, par suite $Q_x^{\alpha+1,0} \neq \emptyset$, ce qui entraîne $Q_x^{\alpha,0} \neq \emptyset$, contraire à l'hypothèse, donc $W_H^{\alpha,0} = \emptyset$.

(Démonstrations analogues pour les autres cas.)

PROPRIÉTÉ 3.2. - Si H satisfait à la condition $W_H^{1,0} \subseteq W_H^{0,1}$, $W_H^{1,0}$ est un idéal bilatère et l'on a :

(1) $$W_H^{1,0} \subseteq W_H^{1,1}$$

et

(2) $$W_H^{\alpha,\beta} \subseteq W_H^{\alpha-1,\beta+1} , \qquad \alpha \geqslant 1 .$$

La relation (1) a déjà été démontrée dans [1]. Nous en redonnons cependant ici une démonstration.

$W_H^{1,0}$ étant un idéal à gauche, on a :

$$W_H^{1,0} \subseteq W_H^{1,0} \,.^{\bullet}\, D \,.$$

D'autre part $W_H^{1,0} \subseteq W_H^{0,1} \implies W_H^{1,0} \,.^{\bullet}\, D \subseteq W_H^{0,1} \,.^{\bullet}\, D = W_H^{1,1}$ (proposition 2.1).

$$\text{D'où : (1)} \quad W_H^{1,0} \subseteq W_H^{1,1} \,.$$

La propriété 2.1 permet aussi d'écrire

$$W_H^{1,1} = W_H^{1,0} \,^{\bullet}.\, D$$

et en tenant compte de la relation (1) on a :

$$W_H^{1,0} \subseteq W_H^{1,0} \,^{\bullet}.\, D \,.$$

$W_H^{1,0}$ est donc un idéal bilatère.

$$W_H^{1,0} \subseteq W_H^{0,1} \implies (W_H^{1,0} \,.^{\bullet}\, D^{\alpha-1}) \,^{\bullet}.\, D^{\beta} \subseteq (W_H^{0,1} \,.^{\bullet}\, D^{\alpha-1}) \,^{\bullet}.\, D^{\beta} = (W_H^{0,1} \,^{\bullet}.\, D^{\beta}) \,.^{\bullet} D^{\alpha-1} ,$$

$$\text{d'où : (2)} \quad W_H^{\alpha,\beta} \subseteq W_H^{\alpha-1,\beta+1} , \qquad \alpha \geqslant 1 \,.$$

<u>Conséquence</u>. - Les relations (1) et (2) permettent d'écrire :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & W_H^{1,0} & \subseteq & W_H^{0,1} & & & \\
 & & W_H^{2,0} & \subseteq & W_H^{1,1} & \subseteq & W_H^{0,2} & & \\
 & W_H^{3,0} & \subseteq & W_H^{2,1} & \subseteq & W_H^{1,2} & \subseteq & W_H^{0,3} & \\
 \cdots & & & & \cdots & & & & \cdots \\
W_H^{n,0} & \subseteq & W_H^{n-1,1} & \subseteq & \cdots & \subseteq & W_H^{1,n-1} & \subseteq & W_H^{0,n} \\
\cdots & & & & \cdots & & & & \cdots
\end{array}$$

Contre-exemple montrant que l'hypothèse $W_H^{1,0} \subset W_H^{0,1}$ n'entraîne pas nécessairement $W_H^{0,1} \subseteq W_H^{1,1}$. Soit D le demi-groupe défini par la table suivante :

	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	a	b	a
c	a	a	c	a
d	a	b	a	d

Posons $H = \{b , d\}$. On a :
$W_H^{1,0} = \{a\}$, $W_H^{0,1} = \{a , c\}$, $W_H^{1,1} = \{a\}$.

Contre-exemple montrant que l'hypothèse $W_H^{1,0} \subset W_H^{0,1}$ n'entraîne pas l'égalité entre tous les $W_H^{\alpha,\beta}$ pour lesquels $\alpha + \beta = n$. Soit D, le demi-groupe défini par la table suivante :

	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	b	b	b	b
c	c	c	c	c
d	a	a	b	a

Posons $H = \{b\}$

$W_H^{1,0} = \emptyset \qquad W_H^{0,1} = \{a , c\}$

$W_H^{1,1} = \emptyset \qquad W_H^{2,0} = \emptyset , \quad W_H^{0,2} = \{a , c\}$.

On démontrerait de la même façon que si H vérifie

$$W_H^{0,1} \subseteq W_H^{1,0}$$

on a

(1') $$W_H^{0,1} \subseteq W_H^{1,1}$$

(2') $$W_H^{\alpha,\beta} \subseteq W_H^{\alpha+1,\beta-1} , \qquad \beta \geqslant 1 .$$

On en déduit le théorème suivant :

THÉORÈME 1.2. - Si H est équirésiduel $(W_H^{1,0} = W_H^{0,1})$ on a

$$W_H^{\alpha,\beta} = W_H^{\alpha',\beta'} \quad \text{si} \quad \alpha + \beta = \alpha' + \beta' , \qquad (\alpha , \beta , \alpha' , \beta' \geqslant 0) .$$

En posant $W_H^{\alpha,\beta} = W_H^n$ si $\alpha + \beta = n$, on peut écrire la chaîne suivante :

(3) $$W_H^1 \subseteq W_H^2 \subseteq \cdots \subseteq W_H^n \subseteq \cdots$$

En effet si H est équirésiduel, les relations (2) et (2') sont vérifiées et elles entraînent respectivement :

$$W_H^{n,0} \subseteq W_H^{n-1,1} \subseteq \cdots \subseteq W_H^{1,n-1} \subseteq W_H^{0,n}$$

et

$$W_H^{0,n} \subseteq W_H^{1,n-1} \subseteq \cdots \subseteq W_H^{n-1,1} \subseteq W_H^{n,0} .$$

PROPRIÉTÉ 4.2. - Si l'on a $\lambda \geqslant 1$,

1. quel que soit $\alpha \geqslant 1$, on a

$$W_H^{\alpha,0} \cap H \cap D^\lambda = \emptyset \iff W_H^{1,0} \cap H \cap D^\lambda = \emptyset .$$

2. quel que soit $\beta \geqslant 1$, on a

$$W_H^{0,\beta} \cap H \cap D^\lambda = \emptyset \iff W_H^{0,1} \cap H \cap D^\lambda = 0 .$$

3. quels que soient $\alpha \geqslant 1$ et $\beta \geqslant 1$, on a

$$W_H^{\alpha,\beta} \cap H \cap D^{\lambda} = \emptyset \iff W_H^{1,1} \cap H \cap D^{\lambda} = \emptyset .$$

1° Remarquons que $W_H^{\alpha,0} \cap H \cap D^{\lambda} = \emptyset$, pour $\alpha > 1$, entraîne
$W_H^{1,0} \cap H \cap D^{\lambda} = \emptyset$ puisque $W_H^{1,0} \subseteq W_H^{\alpha,0}$.

D'autre part montrons que

$$W_H^{\alpha,0} \cap H \cap D^{\lambda} = \emptyset \text{ entraîne } W_H^{\alpha+1,0} \cap H \cap D^{\lambda} = \emptyset .$$

Soit $x \in H \cap D^{\lambda}$, l'hypothèse entraîne $x \notin W_H^{1,0}$. Donc il existe $a \in D$ tel que $ax \in H$, mais $ax \in H \cap D^{\lambda+1} \subseteq H \cap D^{\lambda}$, par suite $ax \notin W_H^{\alpha,0}$ et il existe $b \in D^{\alpha}$ tel que $bax \in H$; $ba \in D^{\alpha+1}$, donc $x \notin W_H^{\alpha+1,0}$.

Par suite si $\alpha = 1$, on en déduit que :

$$W_H^{1,0} \cap H \cap D^{\lambda} = \emptyset \implies W_H^{2,0} \cap H \cap D^{\lambda} = \emptyset \implies W_H^{3,0} \cap H \cap D^{\lambda} = \emptyset \implies \cdots$$

Donc

$$W_H^{1,0} \cap H \cap D^{\lambda} = \emptyset \implies W_H^{\alpha,0} \cap H \cap D^{\lambda} = \emptyset$$

quel que soit $\alpha \geqslant 1$.

2° On remarque comme précédemment que

$$W_H^{\alpha,\beta} \cap H \cap D^{\lambda} = \emptyset \text{ pour } \alpha \geqslant 1 , \beta \geqslant 1 , \text{ entraîne } W_H^{1,1} \cap H \cap D^{\lambda} = \emptyset$$

puisque l'on a $W_H^{1,1} \subseteq W_H^{\alpha,\beta}$. Par un raisonnement analogue à celui qui a été fait précédemment, on montre que

$$W_H^{\alpha,\beta} \cap H \cap D^{\lambda} = \emptyset \text{ entraîne } W_H^{\alpha+1,\beta+1} \cap H \cap D^{\lambda} = \emptyset .$$

Or $W_H^{\alpha+1,\beta}$ et $W_H^{\alpha,\beta+1}$ sont contenus dans $W_H^{\alpha+1,\beta+1}$, par suite :

$$W_H^{\alpha,\beta} \cap H \cap D^{\lambda} = \emptyset \implies \begin{cases} W_H^{\alpha+1,\beta} \cap H \cap D^{\lambda} = \emptyset \\ W_H^{\alpha,\beta+1} \cap H \cap D^{\lambda} = \emptyset \end{cases}$$

On en déduit alors que

$$W_H^{1,1} \cap H \cap D^{\lambda} = \emptyset \text{ entraîne } W_H^{\alpha,\beta} \cap H \cap D^{\lambda} = \emptyset$$

quels que soient $\alpha \geqslant 1$, $\beta \geqslant 1$.

THÉORÈME 2.2.

1° Si $W_H^{1,0} \cap H = \emptyset$ (resp. $W_H^{0,1} \cap H = \emptyset$, $W_H^{1,1} \cap H = \emptyset$) on a $W_H^{\alpha,0} = W_H^{1,0}$

pour tout $\alpha \geqslant 1$ (resp. $W_H^{0,\beta} = W_H^{0,1}$ pour tout $\beta \geqslant 1$, $W_H^{\alpha,\beta} = W_H^{1,1}$ pour tout $\alpha \geqslant 1$ et tout $\beta \geqslant 1$).

2° Soit $\lambda \geqslant 2$.

- Si $W_H^{1,0} \cap H \cap D^\lambda = \emptyset$ (resp. $W_H^{0,1} \cap H \cap D^\lambda = \emptyset$) la chaîne Γ_H (resp. Γ'_H) des résidus $W_H^{\alpha,0}$ (resp. $W_H^{0,\beta}$) est finie son élément maximum étant $W_H^{\lambda-1,0}$ (resp. $W_H^{0,\lambda-1}$).

- Si $W_H^{1,1} \cap H \cap D^\lambda = \emptyset$ avec $\lambda > 2$, le tableau τ_H des résidus $W_H^{\alpha,\beta}$ est fini, sa dernière ligne étant celle de rang $\alpha + \beta = \lambda - 1$, tous les éléments de cette ligne étant égaux entre eux.

- Si $W_H^{1,1} \cap H \cap D^2 = \emptyset$ on a $W_H^{\alpha,\beta} = W_H^{1,1}$ pour tout $\alpha \geqslant 1$ et tout $\beta \geqslant 1$.

a. Supposons $W_H^{1,0} \cap H = \emptyset$. Soit $x \notin W_H^{\alpha,0}$ $(\alpha \geqslant 1)$; il existe $a \in D^\alpha$ tel que $ax \in H$, donc $ax \notin W_H^{1,0}$. Par suite, il existe $b \in D$ tel que $bax \in H$, $ba \in D^{\alpha+1}$, donc $x \notin W_H^{\alpha+1,0}$. Or $W_H^{\alpha,0} \subseteq W_H^{\alpha+1,0}$, la démonstration précédente entraîne donc $W_H^{\alpha,0} = W_H^{\alpha+1,0}$ quel que soit $\alpha \geqslant 1$, d'où le théorème.

(Démonstrations analogues pour les autres cas.)

b. Soit $\lambda \geqslant 2$. Supposons $W_H^{1,0} \cap H \cap D^\lambda = \emptyset$. Soit $x \notin W_H^{\alpha,0}$, $\alpha \geqslant \lambda - 1$; il existe $a \in D^\alpha$ tel que $ax \in H$; $ax \in H \cap D^{\alpha+1} \subseteq H \cap D^\lambda$ donc $ax \notin W_H^{1,0}$ et il existe $b \in D$ tel que $bax \in H$, $ba \in D^{\alpha+1}$, donc $x \notin W_H^{\alpha+1,0}$, On en déduit $W_H^{\alpha,0} = W_H^{\alpha+1,0}$ pour tout $\alpha \geqslant \lambda - 1$, et par suite $W_H^{\alpha,0} = W_H^{\lambda-1,0}$ pour tout $\alpha \geqslant \lambda - 1$.

(Démonstration analogue pour le cas où $W_H^{0,1} \cap H \cap D^\lambda = \emptyset$.)

Supposons $W_H^{1,1} \cap H \cap D^\lambda = \emptyset$ $(\lambda > 2)$. Soit $x \in W_H^{\alpha,\beta}$ (α , $\beta > 0$ et $\alpha + \beta \geqslant \lambda - 1$) . Il existe $(a , b) \in D^\alpha \times D^\beta$ tel que $axb \in H$, $axb \in H \cap D^{\alpha+\beta+1} \subseteq H \cap D^\lambda$, donc $axb \notin W_H^{1,1}$ et il existe $(a' , b') \in D \times D$ tel que $a'axbb' \in H$, on en déduit que $x \notin W_H^{\alpha+1,\beta+1}$ et par suite

$$W_H^{\alpha,\beta} = W_H^{\alpha+1,\beta+1} = W_H^{\alpha+1,\beta} = W_H^{\alpha,\beta+1}$$

puisque $W_H^{\alpha+1,\beta}$ et $W_H^{\alpha,\beta+1}$ contiennent $W_H^{\alpha,\beta}$ et sont contenus dans $W_H^{\alpha+1,\beta+1}$. D'autre part, la condition $\alpha + \beta \geqslant \lambda - 1$ avec $\lambda > 2$, entraîne, dans le cas où $\lambda - 1 \neq 2$, que l'un au moins des nombres α , β est supérieur à 1 . Supposons $\beta > 1$ et considérons le résidu $W_H^{\alpha+1,\beta-1}$ placé immédiatement à droite de $W_H^{\alpha,\beta}$ dans la ligne $\alpha + \beta = \lambda - 1$ du tableau τ_H . La démonstration précédente appliquée à $W_H^{\alpha+1,\beta-1}$ permet d'écrire en particulier

$$W_H^{\alpha+1,\beta-1} = W_H^{\alpha+1,\beta} .$$

Donc

$$W_H^{\alpha+1,\beta-1} = W_H^{\alpha,\beta}$$

et ainsi tous les éléments de la ligne $\alpha + \beta = \lambda - 1$ sont égaux entre eux.

Supposons $W_H^{1,1} \cap H \cap D^2 = \emptyset$. Soit $x \notin W_H^{\alpha,\beta}$ $(\alpha \geqslant 1 , \beta \geqslant 1)$, il existe $(a , b) \in D^\alpha \times D^\beta$ tel que $axb \in H$, $axb \in H \cap D^3 \subseteq H \cap D^2$, donc $axb \notin W_H^{1,1}$ et il existe $(a' , b') \in D \times D$ tel que $a'axbb' \in H$, on en déduit que $x \notin W_H^{\alpha+1,\beta+1}$ et par suite

$$W_H^{\alpha+1,\beta+1} = W_H^{\alpha,\beta} = W_H^{\alpha,\beta+1} = W_H^{\alpha+1,\beta} \quad \text{quels que soient } \alpha \geqslant 1 , \beta \geqslant 1 ,$$

$$W_H^{\alpha,\beta} = W_H^{1,1} \quad \text{pour tout } \alpha \geqslant 1 \text{ et tout } \beta \geqslant 1 .$$

<u>Remarque</u>. – Le théorème précédent permet de conclure que

1. Si $0 < \lambda \leqslant 2$, $W_H^{1,0} \cap H \cap D^\lambda = \emptyset$ entraîne $W_H^{\alpha,0} = W_H^{1,0}$ pour tout $\alpha \geqslant 1$, de même $W_H^{0,1} \cap H \cap D^\lambda = \emptyset$ entraîne $W_H^{0,\beta} = W_H^{0,1}$ pour tout $\beta \geqslant 1$

2. Si $0 < \lambda \leqslant 3$, $W_H^{1,1} \cap H \cap D = \emptyset$ entraîne $W_H^{\alpha,\beta} = W_H^{1,1}$ pour tout $\alpha \geqslant 1$ et tout $\beta \geqslant 1$.

<u>Exemple illustrant le théorème 2.2.</u> – Soit D, défini par la table :

	z	a	b	c	d	e	f	g	h
z	z	z	z	z	z	z	z	z	z
a	z	a	b	a	z	z	z	z	z
b	z	a	b	a	z	z	z	z	z
c	z	a	b	a	z	z	z	z	z
d	z	z	z	z	d	e	d	d	d
e	z	z	z	z	d	e	d	d	d
f	z	z	z	z	d	e	d	d	d
g	z	z	z	z	d	e	d	d	f
h	z	z	z	z	d	e	d	f	g

On a

$$D = \{z , a , b , c , d , e , f , g , h\}$$

$$D^2 = \{z , a , b , d , e , f , g\}$$

$$D^3 = \{z , a , b , e , f\}$$

$$D^4 = \{z , a , b , d , e\} = D^n \quad \text{quel que soit } n \geqslant 4 .$$

Posons $H = \{b , f , g\}$

$$W_H^{1,0} = \{z , a , c , d , e , f\} \qquad H \cap W_H^{1,0} \cap D^4 = \emptyset$$

$$W_H^{2,0} = \{z , a , c , d , e , f , g\}$$

$$W_H^{3,0} = \{z , z , c , d , e , f , g\}$$

$$W_H^{0,1} = \{z , d , e , f\} \qquad H \cap W_H^{0,1} \cap D^4 = \emptyset$$

$$W_H^{0,2} = \{z , d , e , f , g\}$$

$$W_H^{0,3} = \{z , d , e , f , g , h\}$$

$$W_H^{1,1} = \{z , d , e , f , g\} \qquad H \cap W_H^{1,1} \cap D^4 = \emptyset$$

$$W_H^{1,2} = \{z , d , e , f , g , h\} = W_H^{2,1}$$

Cherchons à quelle condition un idéal à gauche (resp. à droite, bilatère) W peut être le résidu d'un complexe H par rapport à une équivalence $\rho_H^{\alpha,0}$ (resp. $\rho_H^{0,\beta}$, $\rho_H^{\alpha,\beta}$).

THÉORÈME 3.2. - Pour qu'un idéal à gauche (resp. à droite, bilatère) W soit le résidu d'un complexe H par rapport à l'équivalence $\rho_H^{\alpha,0}$ (resp. $\rho_H^{0,\beta}$, $\rho_H^{\alpha,\beta}$) il faut et il suffit qu'il vérifie la relation $(F_{\alpha,0})$: $W = D^\alpha W \cdot\!\cdot D^\alpha$ (resp. $(F_{0,\beta})$: $W = WD^\beta \cdot\!\cdot D^\beta$, $(F_{\alpha,\beta})$: $(D^\alpha WD^\beta \cdot\!\cdot D^\alpha) \cdot\!\cdot D^\beta = W$).

1° Par hypothèse $W_H^{\alpha,0} = W$.

$$x \in W \implies D^\alpha x \subseteq (D - H) \implies x \in (D - H) \cdot\!\cdot D^\alpha$$

$$x \in (D - H) \cdot\!\cdot D^\alpha \implies D^\alpha x \subseteq (D - H) \implies x \in W_H^{\alpha,0} = W$$

par suite

$$\underline{W = (D - H) \cdot\!\cdot D^\alpha} .$$

W est un idéal à gauche fermé à gauche par rapport à D^α [2] et l'on peut écrire :

$$(F_{\alpha,0}) \qquad \underline{W = D^\alpha W \cdot\!\cdot D^\alpha} .$$

D'autre part, $x \in W \implies D^\alpha x \subseteq D - H$, or $D^\alpha x \subseteq D^{\alpha+1}$ par suite

$$D^\alpha x \subseteq D^{\alpha+1} - (D^{\alpha+1} \cap H)$$

et

$$x \in [D^{\alpha+1} - (D^{\alpha+1} \cap H)] \cdot\!\cdot D^\alpha .$$

Réciproquement, si $x \in [D^{\alpha+1} - (D^{\alpha+1} \cap H)] .^{\cdot} D^{\alpha}$, on a

$$D^{\alpha} x \subseteq D^{\alpha+1} - (D^{\alpha+1} \cap H) .$$

Donc

$$D^{\alpha} x \subseteq D - H \quad \text{et} \quad x \in W_H^{\alpha,0} .$$

On a donc

$$\underline{W = [D^{\alpha+1} - (D^{\alpha+1} - H)] .^{\cdot} D^{\alpha}} .$$

2° Par hypothèse W est un idéal à gauche, fermé à gauche par rapport à D^{α}, c'est-à-dire vérifiant la relation $(F_{\alpha,0})$. Montrons qu'il existe des complexes H admettant W comme résidu par rapport à $\rho_H^{\alpha,0}$.

$(F_{\alpha,0})$ $$W = D^{\alpha} W .^{\cdot} D^{\alpha}$$

Posons $H = D - D^{\alpha} W$ et $K = D^{\alpha+1} - D^{\alpha} W$.

On a $$W_H^{\alpha,0} = (D - H) .^{\cdot} D^{\alpha} = D^{\alpha} W .^{\cdot} D^{\alpha} = W$$

$$W_K^{\alpha,0} = [D^{\alpha+1} - (D^{\alpha+1} \cap K)] .^{\cdot} D^{\alpha} = D^{\alpha} W .^{\cdot} D^{\alpha} = W .$$

(Démonstrations analogues dans les autres cas ; pour le cas $W_H^{\alpha,\beta}$, on utilise les résultats démontrés dans [1] dans le paragraphe "Idéaux bilatères bilatèrement fermés ".)

PROPRIÉTÉ 5.2. - Si W est un idéal à gauche (resp. à droite, bilatère) vérifiant la condition $(F_{\alpha,0})$ (resp. $(F_{0,\beta})$, $(F_{\alpha,\beta})$) il vérifie aussi la condition $F_{\alpha-1,0}$ (resp. $F_{0,\beta-1}$, $F_{\alpha-1,\beta}$ et $F_{\alpha,\beta-1}$).

Soit W un idéal à gauche vérifiant la condition

$(F_{\alpha,0})$ $$W = D^{\alpha} W .^{\cdot} D^{\alpha}$$

c'est-à-dire $D^{\alpha} x \subseteq D^{\alpha} W \implies x \in W$.

Supposons que l'on ait $D^{\alpha-1} x \subseteq D^{\alpha-1} W$, on a alors

$$D^{\alpha} x \subseteq D^{\alpha} W , \text{ d'où } x \in W .$$

Par suite $D^{\alpha-1} x \subseteq D^{\alpha-1} W \implies x \in W$, W vérifie la condition $(F_{\alpha-1,0})$.

(Démonstrations analogues pour les autres cas.)

<u>Conséquences</u>. - On peut écrire les chaînes et le tableau suivants :

$$\cdots \subseteq F_{\alpha,0} \subseteq F_{\alpha-1,0} \subseteq \cdots \subseteq F_{2,0} \subseteq F_{1,0} .$$

$$\cdots \subseteq F_{0\beta} \subseteq F_{0,\beta-1} \subseteq \cdots \subseteq F_{0,2} \subseteq F_{0,1} .$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & & F_{1,1} & & & & \\
 & & & F_{1,2} \arrow[ur] & & F_{2,1} \arrow[ul] & & & \\
 & & & \cdots & \cdots & \cdots & & & \\
 & F_{1,n-1} & & F_{2,n-2} & \cdots & F_{n-2,2} & & F_{n-1,1} & \\
F_{1,n} \arrow[ur] & & F_{2,n-1} \arrow[ul] \arrow[ur] & & & & F_{n-1,2} \arrow[ul] \arrow[ur] & & F_{n,1} \arrow[ul] \\
\cdots & & & & \cdots & & & & \cdots
\end{tikzcd}$$

Contre-exemple montrant que la condition $(F_{\alpha-1,0})$ n'entraîne pas nécessairement la condition $(F_{\alpha,0})$. Soit D le demi-groupe défini par la table :

	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	a	a	c
c	a	a	a	a
d	a	c	a	b

Soit $W = \{a , c\}$.

On vérifie que $Dx \subseteq DW \implies x \in W$, mais que $D^2 x \subseteq D^2 W \not\Longrightarrow x \in W$.

Donc $(F_{1,0}) \not\Longrightarrow (F_{2,0})$.

PROPRIÉTÉ 6.2. - Si W est un idéal à gauche (resp. à droite, bilatère) la condition $W \mathbin{.^{\bullet}} D = W$ (resp. $W \mathbin{^{\bullet}.} D = W$, $(W \mathbin{.^{\bullet}} D) \mathbin{^{\bullet}.} D = W$) est équivalente à la condition $W \mathbin{.^{\bullet}} D^{\alpha} = W$ quel que soit $\alpha \geqslant 1$ (resp. $W \mathbin{^{\bullet}.} D^{\beta} = W$ quel que soit $\beta \geqslant 1$, $(W \mathbin{.^{\bullet}} D^{\alpha}) \mathbin{^{\bullet}.} D^{\beta} = W$ quels que soient $\alpha \geqslant 1$, $\beta \geqslant 1$).

Soit W, un idéal à gauche, vérifiant la condition $(L_{\alpha,0})$: $W \mathbin{.^{\bullet}} D^{\alpha} = W$, c'est-à-dire $D^{\alpha} x \subseteq W \implies x \in W$, ou $D^{\alpha} K \subseteq W \implies K \subseteq W$.

Soit $x \in D$ tel que $Dx \subseteq W$, on en déduit $D^{\alpha} x \subseteq D^{\alpha-1} W \subseteq W$, d'où $x \in W$. Par conséquent W vérifie $(L_{1,0})$: $W \mathbin{.^{\bullet}} D = W$.

Réciproquement, soit W un idéal à gauche vérifiant la condition $(L_{1,0})$: $W \mathbin{.^{\bullet}} D = W$, c'est-à-dire $Dx \subseteq W \implies x \in W$ ou $DK \subseteq W \implies K \subseteq W$. Soit $x \in D$ tel que $D^{\alpha} x \subseteq W$ pour un entier $\alpha > 1$. On peut écrire $D.D^{\alpha-1} x \subseteq W$ d'où $D^{\alpha-1} x \subseteq W$; de la même façon on obtient $D^{\alpha-2} x \subseteq W$ et ainsi de suite jusqu'à $Dx \subseteq W$ qui entraîne $x \in W$. Donc $D^{\alpha} x \subseteq W \implies x \in W$, W vérifie $(L_{\alpha,0})$.

(Démonstration analogue pour les autres cas.)

On désignera par $L_{0,1}$ la condition $W \mathbin{^{\bullet}.} D = W$ pour un idéal à droite et par $L_{1,1}$ la condition $(W \mathbin{.^{\bullet}} D) \mathbin{^{\bullet}.} D$ pour un idéal bilatère [1].

---

(1) Un idéal à gauche vérifiant la condition $L_{1,0}$ est dit : fortement large à gauche [3]. De même un idéal à droite (resp. bilatère) vérifiant $L_{0,1}$ (resp. $L_{1,1}$) est dit fortement large à droite (resp. bilatère).

THÉORÈME 4.2. - Si $W = W_H^{\alpha,0}$ $(W \neq D)$ et si $W \cap H \cap D^{\alpha+1} = \emptyset$, W vérifie la condition $W \,.^{\circ}\, D = W$. Réciproquement, si W vérifie $W \,.^{\circ}\, D = W$, quel que soit $\alpha \geqslant 1$, il existe un complexe H tel que $W_H^{\alpha,0} = W$ et $W \cap H \cap D^{\alpha+1} = \emptyset$.

(On a un énoncé analogue pour $W = W_H^{0,\beta}$ et $W \cap H \cap D^{\beta+1} = \emptyset$ et pour $W = W_H^{\alpha,\beta}$ et $W^{\alpha,\beta} \cap H \cap D^{\alpha+\beta+1} = \emptyset$.)

Soit $W = W_H^{\alpha,0}$ et $W \cap H \cap D^{\alpha+1} = \emptyset$. Montrons que W vérifie la condition $(L_{\alpha,0})$ équivalente d'après la propriété 6.2 à la condition $(L_{1,0})$. Soit $x \in D$ tel que $D^{\alpha} x \subseteq W$. Si $x \notin W$, il existe $a \in D^{\alpha}$ tel que $ax \in H \cap D^{\alpha+1}$, donc $ax \notin W$ ce qui contredit l'hypothèse, par conséquent $x \in W$, et W vérifie la condition $(L_{\alpha,0})$ donc la condition $(L_{1,0})$: $W \,.^{\circ}\, D = W$.

Soit W un idéal à gauche vérifiant la condition $(L_{1,0})$, W vérifie donc n'importe quelle condition $(L_{\alpha,0})$ pour $\alpha > 1$.

$(L_{\alpha,0})$: $W \,.^{\circ}\, D^{\alpha} = W$. Remarquons que la condition $(L_{\alpha,0})$ entraîne la condition $(F_{\alpha,0})$.

D'après le théorème 3.2, il existe donc des complexes H admettant W comme résidu par rapport à l'équivalence $\rho_H^{\alpha,0}$ (par exemple les complexes $D - D^{\alpha} W$ et $D^{\alpha+1} - D^{\alpha} W$). D'autre part, soit $x \in D - W$, il existe $a \in D$ tel que $ax \notin W$.

Posons $H = \{ax\ ,\ a \in D^{\alpha}\ ,\ ax \notin W\}$.

On a $H \cap W = \emptyset$ et $H \subseteq D^{\alpha+1}$, donc $H \cap W \cap D^{\alpha+1} = \emptyset$. Montrons que $W_H^{\alpha,0} = W$.

Soit $x \in D - W$, il existe $a \in D^{\alpha}$ tel que $ax \in H$, par définition de H. Soit $x \in D - W_H^{\alpha,0}$, il existe $a \in D^{\alpha}$ tel que $ax \in H$, alors $ax \notin W$, puisque $H \cap W = \emptyset$, donc $W_H^{\alpha,0} = W$. Remarquons que dans ce cas particulier on a aussi $W_H^{1,0} = W = W_H^{\alpha,0}$ pour tout $\alpha \geqslant 1$, d'après le théorème 2.2.

Désignons par $\mathcal{E}_{\alpha,0}$, l'ensemble des complexes H de D admettant un idéal à gauche W fermé à gauche par rapport à D donné comme résidu par rapport à $\rho_H^{\alpha,0}$ et tels que pour tout $H \in \mathcal{E}_{\alpha,0}$, $H \cap W \cap D^{\alpha+1} = \emptyset$. $\mathcal{E}_{\alpha,0}$ ordonné par l'inclusion est stable pour la réunion. En effet soit $H^* = \bigcup_{i \in I} H_i$, $H_i \in \mathcal{E}_{\alpha,0}$. On sait que $K \subseteq H$ entraîne $W_H^{1,0} \subseteq W_K^{1,0}$ [2], et par suite $W_H^{\alpha,0} \subseteq W_K^{\alpha,0}$, d'après la propriété 2.1.

On a donc $W_{H^*}^{\alpha,0} \subseteq W$. D'autre part soit $x \in D - W_{H^*}^{\alpha,0}$, il existe $a \in D^{\alpha}$ tel que $ax \in H^*$, donc il existe $i \in I$ tel que $ax \in H_i$. Puisque $W_{H_i}^{\alpha,0} = W$ il en résulte que $x \in D - W$.

Par suite on a $W = W_{H^*}^{\alpha,0}$. $\mathcal{E}_{\alpha,0}$ n'est pas en général stable pour l'intersection (voir contre-exemple dans [3]).

On définit et on étudie de façon analogue les ensembles $\mathcal{E}_{0,\beta}$ et $\mathcal{E}_{\alpha,\beta}$.

PROPRIÉTÉ 7.2. - Soit H un complexe tel que son résidu $W_H^{\alpha,0}$ (resp. $W_H^{0,\beta}$, $W_H^{\alpha,\beta}$) soit contenu dans un idéal à gauche (resp. à droite, bilatère) W . Si $W \cap H \cap D^{\alpha+1} = \emptyset$ (resp. $W \cap H \cap D^{\beta+1} = \emptyset$, $W \cap H \cap D^{\alpha+\beta+1} = \emptyset$), on a $W_H^{\alpha,0} = W$ (resp. $W_H^{0,\beta} = W$, $W_H^{\alpha,\beta} = W$).

Soit $W_H^{\alpha,0} \subseteq W$, $W \cap H \cap D^{\alpha+1} = \emptyset$. Montrons que $W \subseteq W_H^{\alpha,0}$; soit $x \notin W_H^{\alpha,0}$, il existe $a \in D^\alpha$ tel que $ax \in H \cap D^{\alpha+1}$, donc $ax \notin W$ et par suite $x \notin W$. On a donc $D - W_H^{\alpha,0} \subseteq D - W$, c'est-à-dire $W \subseteq W_H^{\alpha,0}$.

Puisque $K \subseteq H$ entraîne $W_H^{\alpha,0} \subseteq W_K^{\alpha,0}$ (resp. $W_H^{0,\beta} \subseteq W_K^{0,\beta}$, $W_H^{\alpha,\beta} \subseteq W_K^{\alpha,\beta}$), on déduit de la propriété 7.2, le corollaire suivant :

COROLLAIRE 1.2. - Si l'on a $K \subseteq H$ et si $H \cap W_K^{\alpha,0} \cap D^{\alpha+1} = \emptyset$ (resp. $H \cap W_K^{0,\beta} \cap D^{\beta+1} = \emptyset$, $H \cap W_K^{\alpha,\beta} \cap D^{\alpha+\beta+1} = \emptyset$), on a $W_H^{\alpha,0} = W_K^{\alpha,0}$ (resp. $W_H^{0,\beta} = W_K^{0,\beta}$, $W_H^{\alpha,\beta} = W_K^{\alpha,\beta}$).

<u>Remarque</u>. - Si $H \cap W_H^{\alpha,0} \cap D^{\alpha+1} = \emptyset$ et si $W_H^{\alpha,0} \cap H = H$, on a $W_H^{\alpha,0} = D$. En effet on a $H \cap D^{\alpha+1} = \emptyset$, donc, quel que soit $x \in D$, $D^\alpha x \cap H = \emptyset$, $x \in W_H^{\alpha,0}$.

De même si $H \cap W_H \cap D^{\beta+1} = \emptyset$ (resp. $H \cap W_H \cap D^{\alpha+\beta+1} = \emptyset$) et si $W_H^{0,\beta} \cap H = H$ (resp. $W_H^{\alpha,\beta} \cap H = H$) on a $W_H^{0,\beta} = D$ (resp. $W_H^{\alpha,\beta} = D$).

PROPRIÉTÉ 8.2. - Si $H \cap W_H^{\alpha,0} \cap D^{\alpha+1} = \emptyset$ ($W_H^{\alpha,0} \neq D$) (resp. $H \cap W_H^{0,\beta} \cap D^{\beta+1} = \emptyset$, $H \cap W_H^{\alpha,\beta} \cap D^{\alpha+\beta+1} = \emptyset$) on a

$$W^{\alpha,0}_{H-(H\cap W_H^{\alpha,0})} = W_H^{\alpha,0}$$

(resp. $W^{0,\beta}_{H-(H\cap W_H^{0,\beta})} = W_H^{0,\beta}$, $W^{\alpha,\beta}_{H-(H\cap W_H^{\alpha,\beta})} = W_H^{\alpha,\beta}$).

Il suffit de démontrer l'inclusion $D - W_H^{\alpha,0} \subseteq D - W^{\alpha,0}_{H-(H\cap W_H^{\alpha,0})}$. Soit $x \notin W_H^{\alpha,0}$,

il existe $a \in D^\alpha$ tel que $ax \in H$, $ax \in H \cap D^{\alpha+1}$, donc $ax \notin W_H^{\alpha,0}$, par suite $ax \in H - (H \cap W_H^{\alpha,0})$ et $x \notin W^{\alpha,0}_{H-(H\cap W_H^{\alpha,0})}$.

COROLLAIRE 2.2. - Si W $(W \neq D)$ est un idéal à gauche fermé à gauche par rapport à D^{α}, et si H est un complexe minimal de l'ensemble $\mathcal{E}_{\alpha,0}$, H est disjoint de W.

(On a un énoncé analogue pour les deux cas semblables.)

Conclusion. - Si W $(W \neq D)$ est un idéal fermé à gauche par rapport à D^{α} et si H est un complexe minimal de $\mathcal{E}_{\alpha,0}$, H est un complexe W-minimal à gauche [3]. En effet, d'après le théorème 2.2 si $H \cap W_H^{\alpha,0} = \emptyset$, on a $H \cap W_H^{1,0} = \emptyset$ et $W_H^{1,0} = W_H^{\alpha,0}$ quel que soit $\alpha \geq 1$.

(Conclusion analogue pour les cas semblables.)

Remarque. - Dans le cas particulier où $W = D$, on a $H \cap W = H$ et la propriété 8.2 ainsi que le corollaire 2.2 ne sont plus valables ; un complexe minimal de $\mathcal{E}_{\alpha,0}$ n'est pas nécessairement D-minimal à gauche comme le montre l'exemple suivant :

Soit D le demi-groupe défini par la table :

	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	a	a	a
c	a	a	a	a
d	a	a	b	b

Posons $H = \{b\}$.

On a

$$W_H^{1,0} = \{a , b\}$$

$$W_H^{2,0} = \{a , b , c , d\} = D$$

H est un complexe minimal admettant D comme résidu par rapport à l'équivalence $\rho_H^{2,0}$, mais $W_H^{1,0} \neq D$.

3. Complexes

DÉFINITION 1.3. - Un complexe H d'un demi-groupe D est dit $\rho^{\alpha,0}$-fort si

$$(H \cdot. x) \cap D^{\alpha} \cap (H \cdot. x') \neq \emptyset \implies (H \cdot. x) \cap D^{\alpha} = (H \cdot. x') \cap D^{\alpha} .$$

On définit de façon analogue un complexe $\rho^{0,\beta}$-fort ou un complexe $\rho^{\alpha,\beta}$-fort $(\alpha , \beta \neq 0)$.

Etant donné un demi-groupe D, on désignera par $\mathcal{H}_{\alpha,0}$ (resp. $\mathcal{H}_{0,\beta}$, $\mathcal{H}_{\alpha,\beta}$) l'ensemble des complexes $\rho^{\alpha,0}$-forts (resp. $\rho^{0,\beta}$-forts, $\rho^{\alpha,\beta}$-forts) de D.

PROPRIÉTÉ 1.3. - L'ensemble $\mathcal{H}_{\alpha,0}$ est une famille de Moore. Il en est de même de $\mathcal{H}_{0,\beta}$ et $\mathcal{H}_{\alpha,\beta}$.

a. $D \in \mathcal{H}_{\alpha,0}$.

b. Si H et H' appartiennent à $\mathcal{H}_{\alpha,0}$, il en est de même de $H_1 = H \cap H'$, si $H_1 \neq \emptyset$.

En effet, supposons $(H_1 \cdot\!\!\cdot\, x) \cap D^{\alpha} \cap H_1 \cdot\!\!\cdot\, x' \neq \emptyset$.

Il existe $a \in D^{\alpha}$ tel que

$$ax \in H_1 = H \cap H'$$
$$ax' \in H_1 = H \cap H' .$$

Soit $b \in (H_1 \cdot\!\!\cdot\, x) \cap D^{\alpha}$, on a $bx \in H_1 = H \cap H'$.

Or H étant $\rho^{\alpha,0}$-fort,

$$\left.\begin{array}{ll} ax \in H & \\ ax' \in H & a\,,\ b \in D^{\alpha} \\ ax \in H & \end{array}\right\} \Longrightarrow bx' \in H .$$

H' étant aussi $\rho^{\alpha,0}$-fort, on a de même $bx' \in H'$.

Par suite :

$$\left.\begin{array}{ll} ax \in H_1 & \\ ax' \in H_1 & a\,,\ b \in D^{\alpha} \\ bx' \in H_1 & \end{array}\right\} bx' \in H_1 .$$

H_1 est $\rho^{\alpha,0}$-fort.

PROPRIÉTÉ 2.3. - $H \in \mathcal{H}_{\alpha,0} \Longrightarrow H \in \mathcal{H}_{\alpha+1,0}$. De même

$$H \in \mathcal{H}_{0,\beta} \Longrightarrow H \in \mathcal{H}_{0,\beta+1} \quad \text{et} \quad H \in \mathcal{H}_{\alpha,\beta} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} H \in \mathcal{H}_{\alpha+1,\beta} \\ \\ H \in \mathcal{H}_{\alpha,\beta+1} \end{array}\right.$$

Soit $H \in \mathcal{H}_{\alpha,0}$, et supposons $Q_x^{\alpha+1,0} \cap Q_{x'}^{\alpha+1,0} \neq \emptyset$.

Cette condition entraîne $Q_x^{\alpha,0} \cap Q_{x'}^{\alpha,0} \neq \emptyset$, et par suite $x \equiv x' \quad (\rho_H^{\alpha,0})$ puisque H est $\rho^{\alpha,0}$-fort. D'après le théorème 2.1, on a alors $x \equiv x' \quad (\rho_H^{\alpha+1,0})$. En particulier si H est fort, H est $\rho^{\alpha,0}$-fort et $\rho^{0,\beta}$-fort, quels que soient $\alpha \geqslant 1$ et $\beta \geqslant 1$.

(Démonstrations analogues dans les autres cas.)

THÉORÈME 1.3. - Les deux conditions suivantes,

1. H est $\rho^{\alpha,0}$-fort.

2. Il existe une bijection φ de $(D/\rho_H^{\alpha,0} - W_H^{\alpha,0})$ sur $[D^\alpha/\rho_H^{0,1} - (W_H^{0,1} \cap D^\alpha)]$ telle que

$$\varphi(X) = A = Q_x^{\alpha,0}\ ,\quad x \in X\ ,\qquad \text{et}\quad \varphi^{-1}(A) = X = Q_a^{0,1}\ ,\quad a \in A\ .$$

1° (1) $\Longrightarrow$ (2). Soit X une classe modulo $\rho_H^{\alpha,0}$ différente de $W_H^{\alpha,0}$. $\forall\ x\ ,\ x' \in X$, on a $Q_x^{\alpha,0} = Q_{x'}^{\alpha,0} \neq \emptyset$.

Soit $a \in Q_x^{\alpha,0}$, $ax \in H$ et $a \in D^\alpha$.

D'où $x \in H \mathbin{.\!\cdot} a$ et par suite $X \subseteq H \mathbin{.\!\cdot} a$, $\forall\ a \in Q_x^{\alpha,0}$.

Soit $y \in H \mathbin{.\!\cdot} a$, on a $ay \in H$ avec $a \in Q_x^{\alpha,0} \subseteq D^\alpha$.

Par suite $a \in Q_y^{\alpha,0}$. On a donc $Q_x^{\alpha,0} \cap Q_y^{\alpha,0} \neq \emptyset$; H étant $\rho^{\alpha,0}$-fort, on en déduit $y \equiv x\ (\rho_H^{\alpha,0})$ et $y \in X$.

D'où

$$\underline{X = H \mathbin{.\!\cdot} a}\ ,\quad \forall\ a \in Q_x^{\alpha,0} \subseteq D^\alpha\ .$$

$$\underline{X = Q_a^{0,1}}\ ,\quad a \in D^\alpha\ .$$

D'après ce qui précède $\forall\ a\ ,\ b \in Q_x^{\alpha,0}$, on a

$$H \mathbin{.\!\cdot} a = H \mathbin{.\!\cdot} b$$

c'est-à-dire $a \equiv b\ (\rho_H^{0,1})$. Soit $c \in D^\alpha$ tel que $c \equiv a\ (\rho_H^{0,1})$. $\forall\ x \in Q_c^{0,1} = X$, on a $cx \in H$, $c \in D^\alpha$, donc $c \in Q_x^{\alpha,0}$.

Par suite si A désigne la classe modulo la trace de $\rho_H^{0,1}$ sur D^α et contenant a, on a :

$$\underline{A = Q_x^{\alpha,0}}\qquad \forall\ x \in X\ \text{ et }\ A \not\subseteq (W_H^{0,1} \cap D^\alpha)\ .$$

Donc à toute classe $X \in (D/\rho_H^{\alpha,0} - W_H^{\alpha,0})$ correspond une classe $\varphi(X) = A$ de $[D^\alpha/\rho_H^{0,1} - (W_H^{0,1} \cap D^\alpha)]$ de telle façon que :

$$\varphi(X) = A = Q_x^{\alpha,0}\ ,\quad x \in X\ .$$

Réciproquement, à une classe A correspond une classe X. Soit $A \in D^\alpha/\rho_H^{0,1} - (W_H^{0,1} \cap D^\alpha)$. Soit $x \in Q_a^{0,1}$, $a \in A$. On a

$$ax \in H\ \text{ avec }\ a \in D^\alpha\ .$$

D'où $a \in Q_x^{\alpha,0}$. Et d'après ce qui précède $Q_x^{\alpha,0} = A$ et $X = Q_a^{0,1}$. L'application φ est donc injective et l'application inverse est

$$\varphi^{-1}(A) = X = Q_a^{0,1} , \qquad a \in A .$$

2° (2) $\Longrightarrow$ (1). Par hypothèse $Q_x^{\alpha,0}$ est une classe d'équivalence, donc $Q_x^{\alpha,0} \cap Q_{x'}^{\alpha,0} \neq \emptyset \Longrightarrow Q_x^{\alpha,0} = Q_{x'}^{\alpha,0}$, H est $\rho^{\alpha,0}$-fort.

On démontre de même la propriété symétrique relative aux complexes $\rho^{0,\beta}$-forts.

<u>Remarque</u>. - Les conditions " H est $\rho^{\alpha,0}$-fort" et " H est $\rho^{0,\alpha}$-fort" ne sont pas équivalentes si $\alpha > 1$, comme le montre l'exemple suivant.

	a	b	c	d
a	a	b	c	a
b	a	b	c	a
c	a	b	c	b
d	a	b	c	a

$D = \{a , b , c , d\}$, $D^2 = \{a , b , c\} = D^\alpha$, $\forall \alpha > 1$

Posons $H = \{a\}$.

On vérifie que H n'est ni fort, ni $\rho^{2,0}$-fort, mais H est $\rho^{0,2}$-fort.

THÉORÈME 2.3. - Les deux conditions suivantes sont équivalentes,

1. H est $\rho^{\alpha,\beta}$-fort $(\alpha > 0 , \beta > 0)$.

2. Il existe une bijection φ de

$$(D/\rho_H^{\alpha,\beta} - W_H^{\alpha,\beta}) \quad \text{sur} \quad [(D^\alpha \times D^\beta)/\mathcal{E}_H - (D^\alpha \times D^\beta) \cap W_H]$$

telle que

$$\varphi(X) = A = (H \,..\, x) \cap (D^\alpha \times D^\beta) , \quad x \in X$$

$$\text{et} \quad \varphi^{-1}(A) = X = (H \,.^{\bullet}\, a) \,^{\bullet}.\, b , \quad (a , b) \in A$$

($\mathcal{E}_H$ est l'équivalence définie par R. DESQ dans sa conférence du 12 février 1962.)

1° (1) $\Longrightarrow$ (2). Soit X une classe modulo $\rho_H^{\alpha,\beta}$ différente de $W_H^{\alpha,\beta}$. $\forall$ $x , x' \in X$, on a $Q_x^{\alpha,\beta} = Q_{x'}^{\alpha,\beta} \neq \emptyset$.

Soit $(a , b) \in Q_x^{\alpha,\beta}$; $axb \in H$, $(a , b) \in D^\alpha \times D^\beta$.

Donc $x \in (H \,.^{\bullet}\, a) \,^{\bullet}.\, b$ et $X \subseteq (H \,.^{\bullet}\, a) \,^{\bullet}.\, b$, $\forall$ $(a , b) \in Q_x^{\alpha,\beta}$ $(x \in X)$.

Soit $y \in (H \,.^{\bullet}\, a) \,^{\bullet}.\, b$. On a $ayb \in H$, $(a , b) \in D^\alpha \times D^\beta$.

Donc

$$(a , b) \in Q_y^{\alpha,\beta} \quad \text{et} \quad Q_y^{\alpha,\beta} \cap Q_x^{\alpha,\beta} \neq \emptyset .$$

H étant $\rho^{\alpha,\beta}$-fort, on en déduit $Q_y^{\alpha,\beta} = Q_x^{\alpha,\beta}$, et $y \in X$.

D'où $\underline{X = (H \,.^{\bullet}\, a) \,^{\bullet}.\, b}$, $\forall$ $(a , b) \in Q_x^{\alpha,\beta}$, $x \in X$.

Soit A la classe modulo la trace de $\mathcal{E}_H$ sur $D^\alpha \times D^\beta$ contenant (a , b). D'après ce qui précède on a :

$$Q_x^{\alpha,\beta} \subseteq A .$$

Soit $(c , d) \in A$, $(H \cdot\!\!\cdot c) \cdot\!\!\cdot d = (H \cdot\!\!\cdot a) \cdot\!\!\cdot b = X$.

Soit $x \in X$, $cxd \in H$, $(c , d) \in D^\alpha \times D^\beta$, donc $(c , d) \in Q_x^{\alpha,\beta}$ et

$$\underline{A = Q_x^{\alpha,\beta}} = (H \cdot\cdot x) \cap (D^\alpha \times D^\beta) .$$

On a évidemment $A \neq (D^\alpha \times D^\beta) - W_H$.

Réciproquement, soit A une classe appartenant à $[(D^\alpha \times D^\beta)/\mathcal{E}_H - ((D^\alpha \times D^\beta) - W_H)]$ Soit $(a , b) \in A$ et soit $x \in (H \cdot\!\!\cdot a) \cdot\!\!\cdot b$. On a

$$axb \in H , \qquad (a , b) \in D^\alpha \times D^\beta .$$

Donc $(a , b) \in Q_x^{\alpha,\beta}$ et, d'après l'étude précédente, on a $Q_x^{\alpha,\beta} = A$ et $X = (H \cdot\!\!\cdot a) \cdot\!\!\cdot b$, X désignant la classe modulo $\rho_H^{\alpha,\beta}$ contenant x. Puisque $Q_x^{\alpha,\beta} \neq \emptyset$, on a $X \neq W_H^{\alpha,\beta}$.

Posons

$$\varphi(X) = A = (H \cdot\cdot x) \cap (D^\alpha \times D^\beta) , \qquad x \in X .$$

D'après ce qui précède φ est une bijection et

$$\varphi^{-1}(A) = X = (H \cdot\!\!\cdot a) \cdot\!\!\cdot b , \qquad (a , b) \in A .$$

2° (2) $\Longrightarrow$ (1). Par hypothèse $Q_x^{\alpha,\beta}$ est une classe d'équivalence, par suite

$$Q_x^{\alpha,\beta} \cap Q_{x'}^{\alpha,\beta} \neq \emptyset \implies Q_x^{\alpha,\beta} = Q_{x'}^{\alpha,\beta} ,$$

H est $\rho^{\alpha,\beta}$-fort.

PROPRIÉTÉ 3.3.

- Si H est $\rho^{\alpha,0}$-fort, les équivalences $\rho_H^{\alpha,0}$ et $\rho_H^{\alpha+\lambda,0}$ $(\lambda \geq 0)$ coïncident dans $D - W_H^{\alpha+\lambda,0}$.
- Si H est $\rho^{0,\beta}$-fort, les équivalences $\rho_H^{0,\beta}$ et $\rho_H^{0,\beta+\mu}$ $(\mu \geq 0)$ coïncident dans $D - W_H^{0,\beta+\mu}$.
- Si H est $\rho^{\alpha,\beta}$-fort $(\alpha , \beta > 0)$ les équivalences $\rho_H^{0,\beta}$ et $\rho_H^{0,\beta+\mu}$ $(\lambda , \mu \geq 0)$ coïncident dans $D - W_H^{\alpha+\lambda,\beta+\mu}$.

Supposons que H est $\rho^{\alpha,0}$-fort. D'après le théorème 2.1, on sait que

$$\rho_H^{\alpha,0} \subseteq \rho_H^{\alpha+\lambda,0} \qquad \forall\ \lambda \geq 0 .$$

Montrons que

$$\left.\begin{array}{l}(x \equiv x') \quad (\rho_H^{\alpha+\lambda}) \\ \\ x \notin W_H^{\alpha+\lambda,0}\end{array}\right\} \Longrightarrow x \equiv x' \quad (\rho_H^{\alpha,0}) .$$

Par hypothèse $Q_x^{\alpha+\lambda,0} = Q_{x'}^{\alpha+\lambda,0}$. D'où

$$Q_x^{\alpha,0} \cap Q_{x'}^{\alpha,0} \neq \emptyset .$$

Mais H étant $\rho^{\alpha,0}$-fort, on a $Q_x^{\alpha,0} = Q_{x'}^{\alpha,0}$ et $x \equiv x' \quad (\rho_H^{\alpha,0})$.

(Démonstration analogue pour les autres cas.)

THÉORÈME 3.3.

- Si H est $\rho^{\alpha,0}$-fort et net à gauche, la chaîne C_H est finie, son élément maximum étant $\rho_H^{\alpha,0}$.

- Si H est $\rho^{0,\beta}$-fort et net à droite, la chaîne C'_H est finie, son élément maximum étant $\rho_H^{0,\beta}$.

- Si H est $\rho^{\alpha,\beta}$-fort et bilatèrement net, toute équivalence $\rho_H^{\alpha+\lambda,\beta+\mu}$ $(\lambda , \mu \geqslant 0)$ coïncident avec $\rho_H^{\alpha,\beta}$.

Ce théorème est une conséquence directe de la propriété 3.3.

Cas particuliers :

1. H est fort et net à gauche, on a $\rho_H^{\alpha,0} = {}_HR$, $\forall \; \alpha \geqslant 1$.

2. H est fort et net à droite, on a $\rho_H^{0,\beta} = R_H$, $\forall \; \beta \geqslant 1$.

3. H est bilatèrement fort et bilatèrement net, on a $\rho_H^{\alpha,\beta} = R'_H$ pour tout $\alpha \geqslant 1$ et tout $\beta \geqslant 1$.

PROPRIÉTÉ 4.3.

- Si H est $\rho^{\alpha,0}$-fort, toute équivalence $\rho_H^{\alpha+\lambda,0}$ $(\lambda \geqslant 0)$ est simplifiable à gauche dans $D - W_H^{\alpha+\lambda,0}$.

- Si H est $\rho^{0,\beta}$-fort, toute équivalence $\rho_H^{0,\beta+\mu}$ $(\mu \geqslant 0)$ est simplifiable à droite dans $D - W_H^{0,\beta+\mu}$.

- Si H est $\rho^{\alpha,\beta}$-fort $(\alpha , \beta > 0)$ toute équivalence $\rho_H^{\alpha+\lambda,\beta+\mu}$ $(\lambda , \mu \geqslant 0)$ est simplifiable dans $D - W_H^{\alpha+\lambda,\beta+\mu}$.

Supposons que H est $\rho^{\alpha,0}$-fort et montrons que

$$\left.\begin{array}{l} ax \equiv ax' \quad (\rho_H^{\alpha+\lambda,0}) \\ ax \notin W_H^{\alpha+\lambda,0} \end{array}\right\} \Longrightarrow x \equiv x' \quad (\rho_H^{\alpha+\lambda,0}) .$$

L'hypothèse entraîne qu'il existe $y \in D^{\alpha+\lambda}$ tel que $yax \in H$ et $yax' \in H$, $ya \in D^{\alpha+\lambda+1} \subseteq D^{\alpha}$.

Par suite $Q_x^{\alpha,0} \cap Q_{x'}^{\alpha,0} \neq \emptyset$. H étant $\rho^{\alpha,0}$-fort on a $Q_x^{\alpha,0} = Q_{x'}^{\alpha,0}$ et $x \equiv x' \quad (\rho_H^{\alpha,0})$.

On sait d'après la propriété 3.3 que $\rho_H^{\alpha+\lambda,0} = \rho_H^{\alpha,0}$ dans $D - W_H^{\alpha+\lambda,0}$ $(\lambda \geqslant 0)$.

(Démonstration analogue dans les autres cas.)

THÉORÈME 4.3.

- Si H est $\rho^{\alpha,0}$-fort et net à gauche, l'équivalence $\rho_H^{\alpha,0}$ est simplifiable à gauche dans D.

- Si H est $\rho^{0,\beta}$-fort et net à droite, l'équivalence $\rho_H^{0,\beta}$ est simplifiable à droite dans D.

- Si H est $\rho^{\alpha,\beta}$-fort et bilatèrement net, l'équivalence $\rho_H^{\alpha,\beta}$ est simplifiable dans D.

Ce théorème est une conséquence de la propriété 4.3.

THÉORÈME 5. 3. - Si H est symétrique-fort, les équivalences $\rho_H^{p,n-p}$ (n fixe et $0 \leqslant p \leqslant n$) coïncident. En posant $\rho_H^{p,n-p} = \rho_H^n$ $(0 \leqslant p \leqslant n)$, on a

$$\rho_H^1 \subseteq \rho_H^2 \subseteq \dots \subseteq \rho_H^n \subseteq \dots$$

De plus les équivalences ρ_H^1 et ρ_H^n coïncident dans $D - W_H^n$. H étant symétrique on a

$$W_H^{1,0} = W_H^{0,1} \quad \text{et} \quad \rho_H^{1,0} = \rho_H^{0,1} .$$

1. D'après le théorème 1.2, si H est équirésiduel on a pour n fixe, $W_H^n = W_H^{p,n-p}$, $0 \leqslant p \leqslant n$, d'où la chaîne :

$$W_H^1 \subseteq W_H^2 \subseteq \dots \subseteq W_H^n \subseteq \dots$$

2. Montrons que la condition $\rho_H^{1,0} = \rho_H^{0,1}$ entraîne $\rho_H^{p,n-p} = \rho_H^{q,n-q}$, $\forall$ p et q tels que $0 \leqslant p \leqslant n$, $0 \leqslant q \leqslant n$, n fixe.

a. Montrons que $\rho_H^{n,0} = \rho_H^{0,n}$.

Soit $x \in D - W_H^n$ et supposons $x \equiv x' \ (\rho_H^{n,0})$. On a

$$Q_x^{n,0} = Q_{x'}^{n,0} \neq \emptyset .$$

Par suite

$$Q_x^{1,0} \cap Q_{x'}^{1,0} \neq \emptyset .$$

H étant fort, on a $x \equiv x' \ (\rho_H^{1,0})$.

Or $\rho_H^{1,0} = \rho_H^{0,1}$ d'où $x \equiv x' \ (\rho_H^{0,1})$, et $Q_x^{0,1} = Q_{x'}^{0,1} \neq \emptyset$.

On en déduit $Q_x^{0,n} = Q_{x'}^{0,n} \neq \emptyset$ puisque $x \notin W_H^n$. D'où $\rho_H^{n,0} = \rho_H^{0,n}$; désignons par ρ_H^n cette équivalence.

b. Montrons que $\rho_H^{p,n-p} = \rho_H^n$ pour tout p tel que $1 \leqslant p \leqslant n-1$.

Soit $x \notin W_H^n$ et $x' \equiv x \ (\rho_H^{p,n-p})$.

$\exists \ (a, b) \in (D^p \times D^{n-p})$ tel que $axb \in H$, $ax'b \in H$. D'où

$$Q_{ax}^{0,1} \cap Q_{ax'}^{0,1} \neq \emptyset .$$

H étant fort on a $ax \equiv ax' \ (\rho_H^1)$ en posant $\rho_H^1 = \rho_H^{1,0} = \rho_H^{0,1}$. $x \notin W_H^n \Rightarrow x \notin W_H^1$, et l'équivalence ρ_H^1 étant simplifiable dans $D - W_H^1$, on a

$$x \equiv x' \quad (\rho_H^1)$$

d'où

$$x \equiv x' \quad (\rho_H^n) .$$

Par suite

$$\underline{\rho_H^{p,n-p} = \rho_H^n}$$

pour tout p tel que $0 \leqslant p \leqslant n$ et ρ_H^n coïncide avec ρ_H^1 dans $D - W_H^n$.

THÉORÈME 6.3.

1° Soit X une classe modulo $\rho_H^{\alpha,0}$ différente de $W_H^{\alpha,0}$.

a. On a $\rho_H^{\alpha,0} \subseteq \rho_X^{1,0}$ et $W_H^{\alpha+\alpha',0} \subseteq W_X^{\alpha',0}$ quel que soit $\alpha' \geqslant 1$.

b. Si H est $\rho^{\alpha,0}$-fort, X est fort et dans $D - W_X^{1,0}$ on a $\rho_H^{\alpha,0} = \rho_X^{1,0}$.

c. Si H est $\rho^{\alpha,0}$-fort et si de plus on a $H \subseteq X$, alors

$$W_H^{\alpha',0} = W_X^{\alpha',0} = W_X^{1,0} \quad \text{et} \quad \rho_H^{\alpha,0} = \rho_X^{1,0} = \rho_X^{\alpha',0}$$

quel que soit $\alpha' \geqslant 1$.

2° On a un énoncé analogue en considérant une classe X modulo $\rho_H^{0,\beta}$, distincte de $W_H^{0,\beta}$.

3° Soit X une classe modulo $\rho_H^{\alpha,\beta}$ $(\alpha\ ,\ \beta > 0)$ distincte de $W_H^{\alpha,\beta}$.

a. On a $\rho_H^{\alpha,\beta} \subseteq \rho_X^{1,1}$ et $W_H^{\alpha+\alpha',\beta+\beta'} \subseteq W_X^{\alpha',\beta'}$ quels que soient $\alpha'\ ,\ \beta' \geqslant 0$ (non simultanément nuls).

b. Si H est $\rho^{\alpha,\beta}$-fort, X est bilatèrement fort et dans $D - W_X^{1,1}$ on a $\rho_H^{\alpha,\beta} = \rho_X^{1,1}$.

c. Si H est $\rho^{\alpha,\beta}$-fort et si de plus $H \subseteq X$, alors $W_H^{\alpha',\beta'} = W_X^{\alpha',\beta'} = W_X^{1,1}$ et $\rho_H^{\alpha,\beta} = \rho_X^{1,1} = \rho_X^{\alpha',\beta'}$ quels que soient $\alpha'\ ,\ \beta' \geqslant 1$.

Soit X une classe modulo $\rho_H^{\alpha,0}$, $X \neq W_H^{\alpha,0}$;

a. $\rho_H^{\alpha,0}$ étant une équivalence régulière à gauche et X une classe modulo $\rho_H^{\alpha,0}$, on a $\rho_H^{\alpha,0} \subseteq \rho_X^{1,0}$ ([2], théorème 20).

D'autre part, soit $x \notin W_X^{\alpha',0}$ $(\alpha' \geqslant 1)$, il existe $a \in D^{\alpha'}$ tel que $ax \in X$ et par suite il existe $b \in D^{\alpha}$ tel que $bax \in H$, donc $x \notin W_H^{\alpha+\alpha',0}$ et l'on a

$$W_H^{\alpha+\alpha',0} \subseteq W_X^{\alpha',0}\ , \quad \alpha' \geqslant 1\ .$$

En particulier $W_H^{\alpha+1,0} \subseteq W_X^{1,0}$.

b. H est $\rho^{\alpha,0}$-fort, montrons que X est fort.

Supposons $(X \cdot\!\!. x) \cap (X \cdot\!\!. x') \neq \emptyset$. Il existe $a \in D$ tel que $ax \in X$ et $ax' \in X$, donc $ax \equiv ax'$ $(\rho_H^{\alpha,0})$.

Puisque l'on a $X \neq W_H^{\alpha,0}$ et que $\rho_H^{\alpha,0}$ est simplifiable à gauche dans $D - W_H^{\alpha,0}$ d'après la propriété 4.3, on a $x \equiv x'$ $(\rho_H^{\alpha,0})$.

Soit $b \in X \cdot\!\!. x$, $bx \in X$. L'équivalence $\rho_H^{\alpha,0}$ étant régulière à gauche on a $bx' \equiv bx$ $(\rho_H^{\alpha,0})$ c'est-à-dire $bx' \in X$. Et par suite $X \cdot\!\!. x = X \cdot\!\!. x'$, X est fort.

Montrons que dans $D - W_X^{1,0}$ on a $\rho_H^{\alpha,0} = \rho_X^{1,0}$.

Soit $x \notin W_X^{1,0}$ et soit $x' \equiv x$ $(\rho_X^{1,0})$. On a

$$X \cdot\!\!. x = X \cdot\!\!. x' \neq \emptyset\ .$$

On en déduit comme plus haut que l'on a

$$x \equiv x' \quad (\rho_H^{\alpha,0})\ .$$

D'où $\rho_X^{1,0} \subseteq \rho_H^{\alpha,0}$ et par suite $\rho_X^{1,0} = \rho_H^{\alpha,0}$ puisque d'après (a) on a $\rho_H^{\alpha,0} \subseteq \rho_X^{1,0}$.

c. H est $\rho^{\alpha,0}$-fort et de plus $H \subseteq X$.

$$H \subseteq X \implies W_X^{1,0} \subseteq W_H^{1,0} \implies W_X^{\alpha',0} \subseteq W_H^{\alpha',0} \quad \text{quel que soit} \quad \alpha' \geq 1 .$$

Par suite en tenant compte de (a) on a :

$$W_H^{\alpha',0} = W_X^{\alpha',0} = W_X^{1,0} \quad \text{pour tout} \quad \alpha' \geq 1 ;$$

et en tenant compte de (b),

$$\rho_H^{\alpha,0} = \rho_X^{1,0} = \rho_X^{\alpha',0} \quad \text{pour tout} \quad \alpha' \geq 1 .$$

(La démonstration est analogue pour les cas 2° et 3° du théorème énoncé.)

BIBLIOGRAPHIE

[1] CROISOT (R.). - Demi-groupes inversifs et demi-groupes réunions de demi-groupes simples, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., t. 70, 1953, p. 361-379.

[2] DUBREIL (P.). - Contribution à la théorie des demi-groupes. - Paris, Gauthier-Villars, 1941 (Institut de France, Mémoires, t. 63, 52 p.).

[3] LEFEBVRE (P.). - Sur certaines conditions minimales en théorie des demi-groupes, Annali di Mat. pura ed appl., 4e série, t. 59, 1962, p. 77-163 (Thèse Sc. math. Paris, 1962).