Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Wolfang Krull

Sur quelques extensions algébriques infinies

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 16, n° 2 (1962-1963), exp. n° 26, p. 1-21
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1962-1963__16_2_A12_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
16e année, 1962/63, n° 26

27 et 28 mai 1963

SUR QUELQUES EXTENSIONS ALGÉBRIQUES INFINIES

par Wolfang KRULL

I. Résumé, en français.

Pour expliquer nos idées fondamentales sur un exemple aussi simple que possible, nous prendrons le corps K_0 (resp. N) de tous les nombres rationnels (resp. algébriques). K désignera un corps quelconque compris entre K_0 et N. Si l'on veut étudier systématiquement les sur-corps infinis K de K_0, on doit d'une part étudier la structure du plus grand corps M résoluble sur K_0. D'autre part, on doit se demander comment obtenir des énoncés concernant la structure de N sur M. Dans le deuxième problème, il est naturel, en suivant F. K. SCHMIDT [3], de procéder en descendant plutôt qu'en montant et de s'intéresser aux corps sur lesquels N lui-même est résoluble. Dans ce qui suit, nous appellerons ces corps des R-corps. Abstraction faite du cas trivial du corps de tous les nombres algébriques réels et de ses conjugués sur K_0, une première classe de R-corps est fournie par la théorie de la valuation. En effet, pour chaque valuation v de N, le corps de décomposition ou le corps de Hensel Z correspondant (sur un corps de base K quelconque) est toujours un R-corps. Si l'on veut sortir des classes de corps de Hensel, l'observation suivante indique une voie possible. On connaît, pour un corps de Hensel Z, la propriété suivante : soit v_Z la restriction à Z de la valuation v de N ; chaque valuation v'_Z de Z, différente de v_Z, est "saturée", c'est-à-dire que l'extension v' de la valuation v'_Z à N n'augmente ni le corps des restes, ni le groupe des valeurs. Or on constate que cette remarque se laisse étendre à l'intersection $Z_1 \cap \dots \cap Z_n$ d'un nombre fini de corps de Hensel, à condition de supposer que les restrictions $v_{K,i}$, au corps de base K, des valuations v_i des Z_i, sont toutes discrètes, ce qui est toujours le cas pour $K = K_0$. On est alors conduit à étudier de plus près les corps sur lesquels presque toutes les valuations sont saturées. A vrai dire, cette recherche ne conduit guère, quant au problème des R-corps, qu'à des résultats négatifs : il est facile de construire des corps K qui ne sont pas des R-corps, bien que toutes leurs valuations, à l'exception de n d'entre elles, soient saturées (n pouvant même être égal à 0). Cependant la généralisation d'une méthode connue pour la construction de polynômes à coefficients entiers et à groupe symétrique ou alterné, fournit, au moins, des conditions nécessaires auxquelles doit satisfaire le corps des restes de la valuation d'un R-corps. Mais avant tout, on peut opposer au théorème que, sur un corps de Hensel Z et sur tous les surcorps de Z, toutes les valuations, sauf une au plus, sont saturées, le théorème suivant : si K n'est pas un corps de Hensel et s'il existe au moins une valuation de K non saturée, alors il existe toujours des suites

$$K = L_0 \subset L_1 \subset L_2 \subset L_3 \subset \dots ,$$

telles que chaque corps L_{2i+1} $(i = 0 , 1 , \dots)$ possède une infinité de valuations non saturées, tandis que sur chaque corps L_{2i} $(i = 1 , 2 , \dots)$ presque toutes les valuations sont saturées. On constate ici, sur un exemple, à quelles intéressantes surprises on doit s'attendre dans une étude systématique des extensions algébriques infinies. Le moyen décisif, dans toutes les démonstrations, est un lemme connu d'après lequel, étant donné un corps K, il existe toujours des sur-corps algébriques finis L sur lesquels n valuations $v_{K,1} , \dots , v_{K,n}$ de K se décomposent d'une manière donnée d'avance, dès qu'il existe seulement une valuation non saturée v_K de K différente des $v_{K,i}$.

Dans l'étude du problème des R-corps, c'est la théorie de Galois et non la théorie des valuations qui fait faire un pas essentiel. On peut définir, dans le groupe de Galois G de N sur K, des p-groupes de Sylow, et étendre à G les théorèmes de Sylow de la théorie des groupes finis. Du point de vue de la théorie des corps, il en résulte : pour chaque nombre premier p, il existe toujours entre K et N un p-corps de Sylow P. Ces corps sont tous conjugués les uns des autres sur K. P est un p-corps de Sylow sur K si et seulement si les deux conditions suivantes sont réalisées :

(a) Tout sous-corps de P, fini sur K, a un degré sur K non divisible par p ;
(b) Chaque sous-corps de N, fini sur P, admet pour degré sur P une puissance de p.

Tout corps Q, compris entre K et N, qui vérifie la propriété (b) est surcorps d'un p-corps de Sylow P. Enfin, il résulte du fait que tous les p-groupes finis sont résolubles, que tous les p-corps de Sylow sont des R-corps.

Naturellement, on étudie ensuite de plus près les relations entre les p-corps de Sylow et les corps de Hensel et ceci, d'abord pour K_0 et M. Dans le cas du corps K_0, on constate qu'aucun p-corps de Sylow n'est corps de Hensel, mais aussi, inversement, qu'aucun corps de Hensel ne peut contenir un p-corps de Sylow. Ici, ce sont des considérations sur les groupes des valeurs et le corps des restes des valuations qui jouent un rôle essentiel. On obtient un résultat tout à fait simple en prenant comme corps de base le plus grand corps M résoluble sur K_0. Du fait que toutes les valuations de M sont saturées et que chaque nombre premier p a, dans une infinité de valuations de M, une valeur positive, résulte facilement : sur M aucun p-corps de Sylow n'est un corps de Hensel ; chaque p-corps de Sylow est sous-corps d'un corps de Hensel, et chaque corps de Hensel est, pour un nombre premier p déterminé, un sur-corps d'un p-corps de Sylow.

Le résultat le plus important est peut-être la remarque suivante : dans l'étude des R-corps, il vaut mieux prendre, a priori, M comme corps de base. On a alors seulement à faire avec des valuations saturées, et on ne risque pas d'attendre trop de la théorie des valuations. Par contre, on voit que l'importance de la théorie des valuations ne doit pas non plus être sous-estimée car elle pose un problème important pour les travaux ultérieurs, celui de la recherche précise des rapports entre les corps de Hensel et les p-corps de Sylow sur M. Remarquons du reste que nos considérations conduisent aussi à des questions concernant la structure de M sur K_0. Il ne serait sans doute pas sans intérêt de chercher s'il existe déjà entre K_0 et M des "suites remarquables de corps"

$$L_0 \subset L_1 \subset L_2 \subset \dots$$

du type précédemment décrit.

II. Texte intégral, en allemand

Um unsere Grundgedanken am einfachsten Beispiel zu erläutern, wählen wir für $\mathcal{K}_0$ bzw. $\mathcal{N}$ den Körper aller rationalen bzw. aller algebraischen Zahlen. $\mathcal{K}$ sei irgendein Körper zwischen $\mathcal{K}_0$ und $\mathcal{N}$. Will man unendliche Oberkörper $\mathcal{K}$ von $\mathcal{K}_0$ systematisch untersuchen, so wird man einerseits den Aufbau des größten über $\mathcal{K}_0$ auflösbaren Körpers $\mathcal{M}$ studieren müssen. Andererseits wird man sich fragen, wie man zu Aussagen über den Aufbau von $\mathcal{N}$ über $\mathcal{M}$ kommen kann. Bei dem zweiten Problem liegt der Gedanke nahe, nach dem Vorbild von F.K. Schmidt (Sitz.Ber. Heidelberger Akad.Wiss. 1938) gewissermaßen von oben statt von unten aus anzufangen und sich für solche Körper zu interessieren, über denen $\mathcal{N}$ selbst auflösbar ist, d.h. über denen jeder endliche Normaloberkörper eine auflösbare Galoisgruppe besitzt. Wir wollen derartige Körper im Folgenden kurz als R-Körper bezeichnen. Abgesehen von dem Trivialfall des Körpers aller reellen algebraischen Zahlen und der zu ihm über konjugierten Körper wird eine erste Klasse von R-Körpern durch die Bewertungstheorie geliefert. Denn für jede Bewertung v von $\mathcal{N}$ ist der (über einem beliebigen Grundkörper $\mathcal{K}$ gebildete) Zerlegungs- oder Henselkörper $\mathcal{Z}$ stets ein R-Körper. Will man über die Klasse der Henselkörper hinauskommen, so scheint zunächst die folgende Beobachtung einen Weiterweg zu weisen: Bei einem Henselkörper $\mathcal{Z}$ weiß man: Ist v_z die Restriktion der definierenden Bewertung v von $\mathcal{N}$, so ist jede von v_z verschiedene Bewertung v'_z von $\mathcal{Z}$ abgesättigt, d.h. es wird beim Übergang zu einer Fortsetzung v' von v'_z auf $\mathcal{N}$ weder die Wertgruppe noch der Restklassenkörper vergrößert. Es zeigt sich nun, daß diese Bemerkung sinnvoll auf den Durchschnitt $\mathcal{Z}_1 \cap \dots \cap \mathcal{Z}_n$ von endlich vielen Henselkörpern $\mathcal{Z}_i$ übertragen werden kann, vorausgesetzt, daß die Restriktion $v_{k,i}$ der definierenden Bewertungen v_i der $\mathcal{Z}_i$ hinsichtlich des Grundkörpers $\mathcal{K}$ alle diskret sind, was z.B. für $\mathcal{K} = \mathcal{K}_0$ immer der Fall ist. Es liegt unter diesen Umständen nahe, sich näher mit solchen Körpern zu beschäftigen, bei denen fast alle Bewertungen abgesättigt sind. Für das R-Körperproblem liefert diese Untersuchung allerdings im wesentlichen nur negative Resultate: Es ist leicht, Körper $\mathcal{K}$ zu konstruieren, die nicht zu den R-Körpern gehören, obwohl alle ihre Bewertungen mit genau n Ausnahmen abgesättigt sind (auch n = 0 zugelassen). Indessen liefert wenigstens die

Verallgemeinerung einer bekannten Methode zur Konstruktion ganzzahliger Polynome mit symmetrischer oder alternierender Gruppe notwendige Bedingungen, denen die Restklassenkörper der Bewertungen eines R-Körpers genügen müssen. Vor allem aber kann man dem Satz, daß bei einem Henselkörper $\mathcal{Z}$ und damit auch bei allen Oberkörpern von $\mathcal{Z}$ alle Bewertungen mit höchstens einer Ausnahme abgesättigt sein müssen, das folgende Theorem gegenüberstellen: Es sei $\mathcal{K}$ kein Henselkörper, und es sei mindestens eine Bewertung von $\mathcal{K}$ nicht abgesättigt. Dann existieren stets Folgen $\mathcal{K} = \mathcal{L}_0 \subseteq \mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}_2 \subseteq \mathcal{L}_3 \subseteq \ldots$ derart, daß jeder Körper $\mathcal{L}_{2i+1}$ $(i=1,2,\ldots)$ unendlich viele nicht abgesättigte Bewertungen besitzt, während bei jedem Körper $\mathcal{L}_{2i}$ $(i=1,2,\ldots)$ fast alle Bewertungen abgesättigt sind. - Es zeigt sich hier an einem Beispiel, mit was für merkwürdigen Überraschungen man beim systematischen Studium unendlicher algebraischer Körpererweiterungen rechnen muß. Das entscheidende Hilfsmittel bei allen Beweisen ist ein bekanntes Lemma, nach dem zu einem gegebenen Grundkörper $\mathcal{K}$ stets endliche algebraische Oberkörper $\mathcal{L}$ existieren, in denen n Bewertungen $v_{k,1},\ldots,v_{k,n}$ von $\mathcal{K}$ in vorgegebener Weise zerfallen, falls es nur eine von den $v_{k,i}$ verschiedene, nicht abgesättigte Bewertung v_k von $\mathcal{K}$ gibt.

Bei dem Problem der R-Körper führt nicht die Bewertungstheorie sondern die Galoistheorie einen wesentlichen Schritt weiter. Man kann in der Galoisgruppe G von $\mathcal{N}$ über $\mathcal{K}$ p-Sylowgruppen definieren und die Sylowsätze aus der Theorie der endlichen Gruppen auf G übertragen. Körpertheoretisch folgt daraus dann: Es gibt zwischen $\mathcal{K}$ und $\mathcal{N}$ für jede Primzahl p stets p-Sylowkörper $\mathcal{P}$. Diese sind alle untereinander über $\mathcal{K}$ konjugiert. $\mathcal{P}$ ist über $\mathcal{K}$ genau dann p-Sylowkörper, wenn für ihn zweierlei gilt: a) Jeder über $\mathcal{K}$ endliche Unterkörper von $\mathcal{P}$ hat über $\mathcal{K}$ einen durch p unteilbaren Grad. b) Jeder über $\mathcal{P}$ endliche Unterkörper von $\mathcal{N}$ hat über $\mathcal{P}$ eine p-Potenz zum Grad. Jeder Körper $\mathcal{Q}$ zwischen $\mathcal{K}$ und $\mathcal{N}$ mit der Eigenschaft b) ist Oberkörper eines p-Sylowkörpers $\mathcal{P}$. - Schließlich ergibt sich aus der Auflösbarkeit der endlichen p-Gruppen: Alle p-Sylowkörper sind R-Körper.

Man wird nun natürlich die Beziehungen zwischen p-Sylowkörpern und Henselkörpern näher untersuchen, und zwar vor allem für die Grundkörper $\mathcal{K}_0$ und $\mathcal{M}$. Im Falle $\mathcal{K}_0$ ergibt sich, daß kein p-Sylowkörper ein Henselkörper ist, daß aber auch umgekehrt kein Henselkörper einen p-Sylowkörper enthalten kann. Hier spielen Betrachtungen über Wertgruppen und Restklassenkörper von Bewertungen eine wesentliche Rolle. Im Falle $\mathcal{M}$ erhält man, wie J. Neukirch gezeigt hat, ein ganz einfaches Resultat: Hier ist jeder Henselkörper gleich $\mathcal{N}$. Die Bewertungstheorie versagt also gewissermaßen, und es bleiben an nichttrivialen R-Körpern allein die von der Galoistheorie gelieferten p-Sylowkörper übrig.

1. Vorbemerkungen

Für Körper verwenden wir die Buchstaben $\mathcal{K}, \mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{H}, \mathcal{Z}$. Mit $\mathcal{K}$ bezeichnen wir stets den "Grundkörper", mit $\mathcal{N}$ die algebraisch-separable Hülle von $\mathcal{K}$, also den Körper aller über $\mathcal{K}$ algebraisch-separablen Elemente. Sehr oft wählen wir für $\mathcal{N}$ den Körper aller algebraischen Zahlen, für $\mathcal{K}$ einen beliebigen Unterkörper; $\mathcal{K}_0$ bezeichnet in diesem Fall immer den Körper der rationalen Zahlen. G ist stets die Galoisgruppe von $\mathcal{N}$ über $\mathcal{K}$. Wir versehen G mit der natürlichen Topologie, bei der die Umgebungen des Einselements diejenigen invarianten Untergruppen U von G sind, die zu den über $\mathcal{K}$ endlichen, separablen Normaloberkörpern von $\mathcal{K}$ gehören. Es werden nur topologisch abgeschlossene Untergruppen von G betrachtet (bezeichnet mit Buchstaben wie F,H,J,...), so daß die Beziehung zwischen den zugelassenen Untergruppen H von G und den Körpern $\mathcal{L}$ zwischen $\mathcal{K}$ und $\mathcal{N}$ umkehrbar eindeutig ist. G heißt p-Gruppe bzw. auflösbar, wenn für jede Umgebungsgruppe U die Quotientengruppe G/U im üblichen Sinne p-Gruppe bzw. auflösbar ist. Man beachte, daß auf Grund dieser Definitionen alle p-Gruppen auflösbar sind, und daß der für unsere Betrachtungen grundlegende Satz gilt:

Der Grundkörper $\mathcal{K}$ ist genau dann ein R-Körper im Sinne der Einleitung, wenn G auflösbar ist (1).

Mit v (v_1,...) bezeichnen wir die (einrangigen, also bei passender Normierung reellzahligen) Bewertungen von $\mathcal{N}$, mit N (N_1,...) bzw. Δ (Δ_1,...) den Restkörper (Restklassenkörper) bzw. die Wertgruppe von v (v_1,...). "Verschiedene" Bewertungen sind für uns immer "wesentlich verschieden", sie gehören also zu verschiedenen Bewertungsringen. Für die Bewertungen eines Körpers $\mathcal{L} \subset \mathcal{N}$ schreiben wir v_l ($v_{l,1}$,...). Gehen wir von einer Bewertung v (v_1,...) von $\mathcal{N}$ aus, so bedeutet v_l ($v_{l,1}$,...) stets die Einschränkung von v (v_1,...) auf $\mathcal{L}$. Den Restkörper bzw. die Wertgruppe von v_l ($v_{l,1}$,...) bezeichnen wir mit K_l ($K_{l,1}$,...) bzw. Γ_l ($\Gamma_{l,1}$,...).

---

(1) Vgl. [2].

Ist $\mathcal{N} \supseteq \mathcal{M} \supseteq \mathcal{L}$, so ist N die algebraisch abgeschlossene Hülle, K_m ein algebraischer Oberkörper von K_1 , während Δ die zu Γ_1 gehörige Divisionsgruppe (also die Gruppe aller Quotienten $n^{-1}\gamma$ mit $\gamma \in \Gamma_1$; n natürliche Zahl) und Γ_m/Γ_1 eine Abelsche Torsionsgruppe darstellt. Ist speziell K_m endlich algebraisch über K_1 bzw. Γ_m/Γ_1 endlich, so soll $[K_m:K_1]$ bzw. $[\Gamma_m:\Gamma_1]$ den Grad von K_m über K_1 bzw. die Ordnung von Γ_m/Γ_1 bedeuten, und es soll, wie üblich, $[K_m:K_1]$ bzw. $[\Gamma_m:\Gamma_1]$ der Trägheits- bzw. Verzweigungsexponent von v_m über v_1 genannt werden. Ist $\mathcal{N} \supset \mathcal{M} \supseteq \mathcal{L}$ und $\mathcal{M}$ von endlichem Grade $n = [\mathcal{M} : \mathcal{L}]$ über $\mathcal{L}$, so besitzt jede Bewertung v_1 nur endlich viele Fortsetzungen $v_{m,1},\dots,v_{m,f}$ auf $\mathcal{M}$, und es gilt:

$$(1) \qquad [\mathcal{M} : \mathcal{L}] \geqq [K_{m,1}:K_1] \cdot [\Gamma_{m,1}:\Gamma_1] + \dots + [K_{m,f}:K_1] \cdot [\Gamma_{m,f}:\Gamma_1]$$

(Gradungleichung der Bewertungstheorie) .

Bei einer diskreten Bewertung v_1 von $\mathcal{L}$ gilt in (1) immer das Gleichheitszeichen, die Gradungleichung läßt sich also hier stets zur Gradgleichung verschärfen (2).

Wir setzen schließlich fest: p sei stets eine Primzahl. Ein Körper K bzw. eine Wertgruppe Γ soll p-abgesättigt heißen, wenn kein endlicher Oberkörper K' bzw. keine endliche Obergruppe Γ' existiert, derart daß der Grad $[K':K]$ bzw. die Ordnung $[\Gamma':\Gamma]$ durch p teilbar ist. Ist Γ eine Wertgruppe mit der zugehörigen Divisionsgruppe Δ , so gibt es zwischen Γ und Δ stets eine kleinste Zwischengruppe, die hinsichtlich jeder von p verschiedenen Primzahl q q-abgesättigt ist. Wir wollen diese Zwischengruppe mit $\Delta^{(p)}$ bezeichnen. - Die Bewertung v_1 von $\mathcal{L}$ soll abgesättigt heißen, wenn gleichzeitig $K_1 = N$ algebraisch abgeschlossen und $\Gamma_1 = \Delta$ Divisionsgruppe ist, so daß bei jeder Fortsetzung v_m von v_1 auf einen Oberkörper $\mathcal{M}$ von $\mathcal{L}$ immer $K_m = K_1$, $\Gamma_m = \Gamma_1$ gilt. Der Körper $\mathcal{L}$ selbst wird abgesättigt bzw. fast abgesättigt genannt, wenn alle Bewertungen von $\mathcal{L}$ bzw. alle Bewertungen von $\mathcal{L}$ mit höchstens endlich vielen Ausnahmen abgesättigt sind.

Bei dem Körper $\mathcal{N}$ aller algebraischen Zahlen, der im Vordergrund des Interesses steht, sind folgende Bemerkungen wichtig:

Bemerkung 1. Es gibt nur einrangige Bewertungen von $\mathcal{N}$, so daß die ausschließliche Betrachtung solcher Bewertungen keinerlei Einschränkung bedeutet.

---

(2) [1], Bd. 1, (10 a), S. 136 und Bd. 2, (21.10), S. 76

Bemerkung 2. Der Grundkörper $\mathcal{K}_0$ der rationalen Zahlen sowie jeder endliche algebraische Zahlkörper besitzt nur abzählbar viele Bewertungen.

Bemerkung 3. Alle Bewertungen v_{k_0} von $\mathcal{K}_0$ sind diskret; bei jeder Bewertung v_{k_0} ist der Restkörper ein Primkörper von Primzahlcharakteristik, und zwar gibt es zu jedem p genau eine Bewertung v_{k_0} mit einem Restkörper der Charakteristik p. - Entsprechend ist bei jedem Körper $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{N}$ für jede Bewertung v_l stets K_l absolut algebraisch von Primzahlcharakteristik und Γ_l (bei passender Normierung) eine Additionsgruppe von rationalen Zahlen.

Bemerkung 4. Ist K_l bzw. Γ_l nicht abgesättigt hinsichtlich p, so existiert stets eine unendliche Folge $K_l = K^{(0)} \subset K^{(1)} \subset K^{(2)} \subset \ldots$ bzw. $\Gamma_l = \Gamma^{(0)} \subset \Gamma^{(1)} \subset \Gamma^{(2)} \subset \ldots$, bei der stets $[K^{(n)} : K^{(n-1)}] = p$ bzw. $[\Gamma^{(n)} : \Gamma^{(n-1)}] = p$ $(n=1,2,\ldots)$.

Bemerkung 5. Bei jedem Restkörper K_l ist die algebraisch abgeschlossene Hülle N über K_l separabel und auflösbar.

2. Henselkörper und Zerlegungskörper

Der Körper $\mathcal{L}$ soll Henselkörper hinsichtlich der Bewertung v_l heißen, wenn v_l nur eine einzige Fortsetzung v auf $\mathcal{N}$ besitzt.

Lemma 1. $\mathcal{L} \subset \mathcal{N}$ ist, wenn überhaupt, nur hinsichtlich einer einzigen Bewertung v_l Henselkörper.

Falls $\mathcal{L}$ nicht abgesättigt ist, folgt die Behauptung unmittelbar aus dem späteren Lemma 7, auf dessen (sehr einfachen) Beweis wir näher eingehen werden. Schwieriger ist der Beweis bei abgesättigtem $\mathcal{L}$ (vgl. [1], Bd. 2, S. 146). - Lemma 1 ist für uns vor allem deswegen nützlich, weil wir seinetwegen unbedenklich von der ausgezeichneten Bewertung v_l eines Henselkörpers $\mathcal{L} \neq \mathcal{N}$ bzw. von der zu $\mathcal{L}$ in $\mathcal{N}$ gehörigen Bewertung v (nämlich der einzigen Fortsetzung von v_l auf $\mathcal{N}$) reden dürfen. Der Körper $\mathcal{N}$ ist definitionsgemäß auch zu den Henselkörpern zu rechnen ("uneigentlicher" Henselkörper); er ist Henselkörper hinsichtlich jeder seiner Bewertungen. - Die folgenden Lemmata formulieren bekannte Sätze aus der Galoistheorie der algebraischen Erweiterungen bewerteter Körper in der für unsere Zwecke bequemen Form (vgl. dazu [1], Bd. 2, Kap. III).

<u>Lemma 2.</u> Zwischen $\mathcal{N}$ und dem Grundkörper $\mathcal{K}$ gibt es zu jeder Bewertung v einen eindeutig bestimmten kleinsten Körper $\mathcal{Z}$, der hinsichtlich der Einschränkung v_z von v Henselkörper ist. $\mathcal{Z}$ ist der "Zerlegungskörper von v über $\mathcal{K}$ " im üblichen Sinn, d.h. der Invariantenkörper der Gruppe aller der Automorphismen von $\mathcal{N}$ über $\mathcal{K}$, die v auf sich selbst abbilden.
Für Restkörper und Wertgruppe der Einschränkungen v_z und v_k gilt $K_z = K_k$, $\Gamma_z = \Gamma_k$.

<u>Lemma 3.</u> Zwischen den Henselkörper $\mathcal{Z}$ mit der ausgezeichneten Bewertung v_z und $\mathcal{N}$ läßt sich der über $\mathcal{Z}$ normale "Trägheitskörper $\mathcal{T}$ von v_z" einschalten. Die Gruppe von $\mathcal{T}$ über $\mathcal{Z}$ ist isomorph zur Gruppe des Restkörpers N von v über K_z. Der Restkörper K_t der Erweiterung v_t von v_z auf $\mathcal{T}$ ist gleich dem Körper N_s aller über K_z separablen Elemente von N. Für die Wertgruppen gilt $\Gamma_t = \Gamma_z$.

<u>Lemma 4.</u> Ist der Restkörper K_z der ausgezeichneten Bewertung v_z von $\mathcal{Z}$ von Charakteristik 0, so ist $\mathcal{N}$ über $\mathcal{T}$ Abelsch, und zwar ist die Gruppe von $\mathcal{N}$ über $\mathcal{T}$ isomorph zur Charaktergruppe von Δ / Γ_z .

<u>Lemma 5.</u> Ist K_z von Primzahlcharakteristik p, so läßt sich zwischen $\mathcal{T}$ und $\mathcal{N}$ der über $\mathcal{T}$ normale "Verzweigungskörper $\mathcal{V}$ von v_z" einschalten. Die Gruppe von $\mathcal{V}$ über $\mathcal{T}$ ist isomorph zur Charaktergruppe der Abelschen Gruppe $\Delta^{(p)}/\Gamma_z$ (Definition von $\Delta^{(p)}$ siehe § 1). Die Gruppe von $\mathcal{N}$ über $\mathcal{V}$ ist eine p-Gruppe, also stets auflösbar.

<u>1. Korollar zu Lemma 3 - 5.</u> Bei jedem Henselkörper $\mathcal{Z} \subset \mathcal{N}$ mit der ausgezeichneten Bewertung v_z ist der Trägheitskörper $\mathcal{T}$ von v_z ein R-Körper. $\mathcal{Z}$ selbst ist genau dann ein R-Körper, wenn der Restkörper K_z von v_z ein R-Körper ist.

Man beachte: Die Gruppe von N über K_z ist gleich der von N_s über K_z, falls N über K_z inseparable Elemente enthalten sollte. Zieht man Bemerkung 5. von § 1 heran, so erhält man:

<u>Spezialfall des 1. Korollars.</u> Ist $\mathcal{N}$ der Körper aller algebraischen Zahlen, so sind alle Henselkörper $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{N}$ R-Körper.

<u>2. Korollar.zu Lemma 3 - 5.</u> Ist $\mathcal{Z} \subset \mathcal{N}$ Henselkörper hinsichtlich der abgesättigten Bewertung v_z, so besitzt der Restkörper K_z von v_z eine Primzahlcharakteristik p und es ist die Galoisgruppe G von $\mathcal{N}$ über $\mathcal{Z}$ eine p-Gruppe.

Man beachte: Ist die Einschränkung v_k der Bewertung v von $\mathcal{N}$ auf den Grundkörper $\mathcal{K}$ abgesättigt, so ist bei dem Zerlegungskörper $\mathcal{Z}$ von v hinsichtlich $\mathcal{K}$ auch dann mit der Möglichkeit $\mathcal{Z} = \mathcal{N}$ zu rechnen, wenn K_k Primzahlcharakteristik p besitzt; es kann nur in diesem Fall nicht (wie bei Charakteristik 0 von K_k) die Möglichkeit $\mathcal{Z} \subset \mathcal{N}$ von vornherein ausgeschlossen werden. - Die Wichtigkeit abgesättigter Bewertungen ergibt sich aus folgender Überlegung: Bei dem Problem der R-Körper spielt angesichts des Spezialfalles von Korollar 1. der Körper $\mathcal{N}$ aller algebraischen Zahlen eine ausgezeichnete Rolle. Hier aber liegt es nahe, zwischen den Körper $\mathcal{K}_0$ der rationalen Zahlen und $\mathcal{N}$ den größten über $\mathcal{K}_0$ auflösbaren Körper $\mathcal{M}$ einzuschalten und vorzugsweise nach R-Körpern über $\mathcal{M}$ zu fragen. Für $\mathcal{M}$ aber gilt:

Lemma 6. Der größte über $\mathcal{K}_0$ auflösbare Körper $\mathcal{M}$ ist abgesättigt.

Beweisskizze: Man betrachte zunächst den größten über $\mathcal{K}_0$ Abelschen Körper $\mathcal{A}$, also den Körper aller Einheitswurzeln. Aus der Theorie der endlichen Einheitswurzelkörper folgt mühelos, daß bei jeder Bewertung v_a von $\mathcal{A}$ der Restkörper algebraisch abgeschlossen ist. Das gleiche muß also auch für den Restkörper jeder Bewertung v_m von $\mathcal{M}$ gelten. Ist ferner n eine beliebige natürliche Zahl und $v_m a = 1$ $(a \in \mathcal{M})$, so gehört mit a auch $a^{\frac{1}{n}}$ zu $\mathcal{M}$, und es muß $v_m(a^{\frac{1}{n}}) = \frac{1}{n}$ sein. Die Wertgruppe von v_m besteht also sicher aus allen rationalen Zahlen.

Aus Lemma 6. folgt zunächst: Ist v eine Bewertung von $\mathcal{N}$ und p die Charakteristik ihres Restkörpers, also $vp > 0$, so ist der Zerlegungskörper $\mathcal{Z}$ über $\mathcal{M}$ entweder gleich $\mathcal{N}$ oder die Gruppe von $\mathcal{N}$ über $\mathcal{Z}$ ist eine p-Gruppe. Tatsächlich gilt, wie Herr J. Neukirch kürzlich bewiesen hat: Über $\mathcal{M}$ sind alle Zerlegungskörper gleich $\mathcal{N}$ (3). Man kann also mit einem gewissen Recht feststellen, daß die Bewertungstheorie über $\mathcal{M}$ versagt.

3. Merkwürdige Körperfolgen

In § 2 hatten wir uns vor allem für Henselkörper $\mathcal{L}$ interessiert, deren ausgezeichnete Bewertung v_l abgesättigt ist. Im allgemeinen Fall haben wir

(3) Noch unpubliziert.

das folgende Lemma, dessen Beweis erst später gegeben werden soll:

Lemma 7. Ist $\mathcal{L}$ Henselkörper hinsichtlich v_1, so ist jede von v_1 verschiedene Bewertung v_1' von $\mathcal{L}$ abgesättigt.

Im Anschluß an Lemma 7. wurden gelegentlich die Fragen aufgeworfen:

a) Ist etwa jeder von $\mathcal{N}$ verschiedene Körper $\mathcal{L}$, bei dem alle Bewertungen abgesättigt sind, ein Henselkörper?

b) Ist $\mathcal{L}$ Henselkörper hinsichtlich v_1, wenn v_1 diskret ist, während alle von v_1 verschiedenen Bewertungen von $\mathcal{L}$ abgesättigt sind?

Beide Fragen sind leicht zu verneinen. Bei den nötigen Beispielen beschränken wir uns auf den Körper $\mathcal{N}$ aller algebraischen Zahlen.

a) Der größte über $\mathcal{K}_0$ auflösbare Körper $\mathcal{M}$ ist kein R-Körper und damit auch kein Henselkörper. (Vgl. Spezialfall des 1. Korollars zu Lemma 3 - 5 in § 2). Aber $\mathcal{M}$ ist abgesättigt (Lemma 6. von § 2).

b) Man kann auf Grund eines allgemeinen Existenzsatzes unter Ausnützung der Bemerkung 2. von § 1 zu $\mathcal{K}_0$ eine Folge $\mathcal{K}_0 \subset \mathcal{K}_1 \subset \mathcal{K}_2 \subset \ldots$ von endlichen algebraischen Zahlkörpern $\mathcal{K}_i$ so konstruieren, daß der Vereinigungskörper $\mathcal{L} = \bigcup_i \mathcal{K}_i$ aller $\mathcal{K}_i$ den folgenden Bedingungen genügt: α) Eine (beliebig vorgeschriebene) Bewertung v_{k_0} von $\mathcal{K}_0$ besitzt nur eine einzige Fortsetzung v_1 auf $\mathcal{L}$. β) v_1 ist diskret, während alle von v_1 verschiedenen Bewertungen von $\mathcal{L}$ abgesättigt sind. - Dann genügt $\mathcal{L}$ den in Frage b) angegebenen Bedingungen. Es ist aber $\mathcal{L}$ kein Henselkörper. Denn andernfalls besäße v_1 und damit auch v_k nur eine einzige Fortsetzung v auf $\mathcal{N}$, was sicher nicht zutrifft.

Auf die Einzelheiten der Konstruktion der Körperkette $\langle \mathcal{K}_i \rangle$ gehen wir nicht ein. Auch hinsichtlich des allgemeinen Existenzsatzes, der die Grundlage bildet, sei auf die Literatur verwiesen (4); nur ein Spezialfall dieses Satzes sei angegeben, da an ihn unsere weiteren Überlegungen anknüpfen.

Existenzlemma. Es sei v_1 eine nichtabgesättigte Bewertung von $\mathcal{L}$, und zwar gebe es entweder zu K_1 einen Oberkörper K_m oder zu Γ_1 eine Obergruppe Γ_m, derart daß $[K_m : K_1] = n > 1$ bzw. $[\Gamma_m : \Gamma_1] = n > 1$ wird. Sind dann $v_{1,1}, \ldots, v_{1,N}$ irgendwelche von v_1 verschiedene Bewertungen von $\mathcal{L}$, so existiert stets ein Oberkörper $\mathcal{M}$ von $\mathcal{L}$ vom Relativgrade n mit der Eigenschaft, daß jede der Bewertungen $v_{1,i}$ genau n verschiedene Fortsetzungen auf $\mathcal{M}$ besitzt.

---

(4) [1], Bd. 2, Kap. IV.

Man sieht sofort, daß das Lemma 7. eine unmittelbare Folge des Existenzlemmas ist. Wendet man die Gradungleichung von § 1 an, so erhält man zu dem Existenzlemma das folgende Korollar:

Für jede Fortsetzung $v_{m,i}$ einer der Bewertungen $v_{1,i}$ auf $\mathcal{M}$ $(i=1,\ldots,N)$ gilt $K_{m,i} = K_{1,i}$; $\Gamma_{m,i} = \Gamma_{1,i}$.

Bei der Beantwortung der Frage b) zeigte sich oben, daß der allgemeine Existenzsatz mit Nutzen auch da angewandt werden kann, wo es sich um die Konstruktion von unendlichen algebraischen Körpererweiterungen handelt. Verfolgt man diesen Gedanken weiter, so zeigt es sich, daß schon das spezielle Existenzlemma ausreicht, um die Existenz gewisser Körperfolgen zu sichern, die vor allem deswegen merkwürdig sind, weil man hier an einem Beispiel sieht, mit was für überraschenden Erscheinungen man rechnen muß, wenn man den Rahmen der endlichen algebraischen Erweiterungen überschreitet. Um gewisse praktisch unwichtige Ausnahmefälle zu vermeiden, beschränken wir uns im Folgenden wieder auf den Körper $\mathcal{N}$ aller algebraischen Zahlen.

Satz 1. Ist $\mathcal{L}$ weder abgesättigt noch Henselkörper, so gibt es stets eine Körperfolge $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}_0 \subseteq \mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_2 \subset \ldots$, die folgenden Bedingungen genügt:
1. $\mathcal{L}_0$ ist endlich algebraisch über $\mathcal{L}$ mit mindestens zwei nicht abgesättigten Bewertungen $v_{1_0,0}$, $v_{1_0,1}$.
2. $\mathcal{L}_{2i+1}$ $(i=1,2,\ldots)$ ist fast abgesättigt, besitzt aber zwei Fortsetzungen $v_{1_{2i+1},0}$, $v_{1_{2i+1},1}$ von $v_{1_0,1}$ mit $K_{1_{2i+1},r} = K_{1_0,1}$; $\Gamma_{1_{2i+1},r} = \Gamma_{1_0,1}$ $(r=0,1)$; dabei ist $v_{1_{2i+1},1}$ die Einschränkung einer festen Bewertung v_1 von $\mathcal{N}$ auf $\mathcal{L}_{2i+1}$.
3. $\mathcal{L}_{2i}$ $(i=1,2,\ldots)$ besitzt überabzählbar viele Fortsetzungen $v_{1_{2i},\sigma}$ von $v_{1_0,1}$, für die durchweg $K_{1_{2i},\sigma} = K_{1_0,1}$; $\Gamma_{1_{2i},\sigma} = \Gamma_{1_0,1}$ gilt. Unter den $v_{1_{2i},\sigma}$ befindet sich auch die Einschränkung von v_1 auf $\mathcal{L}_{2i}$.

Beweis: 1. Sei v_1 eine nicht abgesättigte Bewertung von $\mathcal{L}$. Da $\mathcal{L}$ kein Henselkörper ist, gibt es zwei verschiedene Fortsetzungen v_0, v_1 von $\mathcal{L}$ auf $\mathcal{N}$. Sei $a \in \mathcal{N}$ mit $v_0(a) \neq v_1(a)$ und $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}(a)$. Dann sind die Einschränkungen $v_{1_0,0}$, $v_{1_0,1}$ von v_0, v_1 auf $\mathcal{L}_0$ verschieden, und es können weder $v_{1_0,0}$ noch $v_{1_0,1}$ abgesättigt sein. (Beachte Bemerkung 4 von § 1.)
2. Es sei $\mathcal{L}_{2i}$ für $i \geq 0$ bereits im Sinn von Satz 1 bestimmt. Für $i = 0$ seien $v_{1_0,0}$, $v_{1_0,1}$ die Bewertung von 1. Für $i > 0$ sei $v_{1_{2i},1}$ die Einschränkung von v_1 auf $\mathcal{L}_{2i}$ und $v_{1_{2i},0}$ irgend eine andere Bewertung aus der Reihe der $v_{1_{2i},\sigma}$.

Schließlich sei $v_0^{(i)}$ irgendeine Fortsetzung von $v_{1_{2i},0}$ auf $\mathcal{N}$. Aus dem Zornschen Lemma folgt die Existenz mindestens eines maximalen Oberkörpers $\mathcal{L}^*$ von $\mathcal{L}_{2i}$ mit der Eigenschaft, daß die Einschränkung $v_{1^*,0}^{(i)}$ bzw. $v_{1^*,1}$ von $v_0^{(i)}$ bzw. v_1 auf $\mathcal{L}^*$ die gleiche Wertgruppe und den gleichen Restkörper besitzt wie $v_{1_{2i},0}$ bzw. $v_{1_{2i},1}$. Aus dem Existenzlemma und der Maximalität von $\mathcal{L}^*$ ergibt sich weiter sofort, daß alle von $v_{1^*,0}^{(i)}$ und $v_{1^*,1}$ verschiedenen Bewertungen von $\mathcal{L}^*$ abgesättigt sind. Wir können also $\mathcal{L}^* = \mathcal{L}_{2i+1}$, $v_{1^*,0}^{(i)} = v_{1_{2i+1},0}$, $v_{1^*,1} = v_{1_{2i+1},1}$ setzen.

3. Es sei $\mathcal{L}_{2i+1}$ für ein festes $i \geq 0$ bereits bestimmt. Dann kann man unter Berücksichtigung der Bemerkung 4 von § 1 auf Grund des Existenzlemmas und seines Korollars eine Körperfolge $\mathcal{L}_{2i+1} = \mathcal{L}^{(0)} \subset \mathcal{L}^{(1)} \subset \mathcal{L}^{(2)} \subset \ldots$ bilden, bei der jeder Körper $\mathcal{L}^{(k)}$ über $\mathcal{L}^{(k-1)}$ jeweils einen festen Primzahlgrad p hat, und bei der außerdem $v_{1_{2i+1},1}$ immer genau p^k verschiedene Fortsetzungen auf $\mathcal{L}^{(k)}$ besitzt, die notwendig alle denselben Restkörper und dieselbe Wertgruppe haben wie $v_{1_{2i+1},1}$. Man überzeugt sich nun mühelos, daß der Vereinigungskörper $\mathcal{L}'$ aller $\mathcal{L}^{(k)}$ einen Körper $\mathcal{L}_{2i+2}$ im Sinne von Satz 1. darstellt.

<u>Korollar zu Satz 1.</u> Ist die Bewertung v_1 von $\mathcal{L}$ diskret, so ist der Vereinigungskörper $\mathcal{L}^{(1)}$ einer im Sinne von Satz 1. gebildeten Körperfolge $\langle \mathcal{L}_k \rangle$ Unterkörper des über $\mathcal{L}_0$ gebildeten Zerlegungskörpers $\mathcal{Z}_1$ der Bewertung v_1 (vgl. Satz 2., S. 12), und es ist daher die Einschränkung von v_1 auf $\mathcal{L}^{(1)}$ sicher nicht abgesättigt. Können wir also die Konstruktion so einrichten, daß $\mathcal{L}^{(1)} \neq \mathcal{Z}_1$ ausfällt, so ist $\mathcal{L}^{(1)}$ kein Henselkörper, und wir können eine neue merkwürdige Körperfolge $\mathcal{L}^{(1)} \subset \mathcal{L}_0^{(1)} \subseteq \mathcal{L}_1^{(1)} \subset \mathcal{L}_2^{(1)} \subset \ldots$ im Sinne von Satz 1. bilden. Hier erhebt sich demgemäß die Frage nach der Existenz von <u>wohlgeordneten</u> merkwürdigen Körperfolgen, wobei es von Interesse wäre, zu möglichst großen Ordnungszahlen zu kommen, natürlich innerhalb der 2. Zahlklasse, die man wegen der Abzählbarkeit von $\mathcal{N}$ nicht überschreiten kann. Da in dieser Richtung noch keine Untersuchungen vorliegen, müssen wir uns mit dem Hinweis auf die Existenz des Problems begnügen.

Dagegen sei noch kurz auf die Frage eingegangen, welche Komplikationen eintreten, wenn wir die Beschränkung auf den Körper $\mathcal{N}$ aller algebraischen Zahlen fallen lassen. Wir haben im wesentlichen eine ungünstige Möglichkeit zu berücksichtigen, nämlich die, daß in $\mathcal{L}$ nur solche nicht abgesättigte Bewertungen auftreten, bei denen die Wertgruppe die Gruppe der rationalen Zahlen, der Restkörper aber von Charakteristik 0 und zwar reell, aber nicht algebraisch abgeschlossen ist. Hier muß die Möglichkeit berücksichtigt werden, daß schon ein endlicher algebraischer Oberkörper von $\mathcal{L}$ abgesättigt sein kann. Im übrigen sind die zum Beweis von Satz 1. benutzten Schlüsse nur unwesentlich zu modifizieren.

Bei der Konstruktion der Körper $\mathcal{L}_{2i+1}$ wurde vom Zornschen Lemma Gebrauch gemacht. Es ist bemerkenswert, daß im Falle diskreter Bewertungen (v_l, $v_{l,o}$, $v_{l,1}$) eine passende Verallgemeinerung des Begriffes des Zerlegungskörpers anstelle des Zornschen Lemmas benutzt werden kann. Da diese Verallgemeinerung selbständiges Interesse besitzen dürfte, soll sie kurz diskutiert werden. Dabei kann $\mathcal{N}$ ein beliebiger, separabel-algebraisch abgeschlossener Körper sein.

<u>Satz 2.</u> Ist die Einschränkung v_k der Bewertung v von $\mathcal{N}$ auf $\mathcal{K}$ diskret, so ist der Zerlegungskörper $\mathcal{Z}$ von v über $\mathcal{K}$ der Vereinigungskörper aller der $\mathcal{H} \supset \mathcal{K}$, bei denen v_h die gleiche Wertgruppe und den gleichen Restkörper besitzt wie v_k.

Beweisskizze: Ist $\mathcal{E}$ ein endlicher Normaloberkörper von $\mathcal{K}$, so ist der wie üblich definierte Zerlegungskörper $\mathcal{Z}_e$ von v_e über $\mathcal{K}$ gleich $\mathcal{E} \cap \mathcal{Z}$. Daraus schließt man leicht: Es genügt zu zeigen, daß jeder Unterkörper $\mathcal{H}_e$ von $\mathcal{E}$ mit der in Satz 2. angegebenen Eigenschaft in $\mathcal{Z}_e$ enthalten ist. Sei nun $\mathcal{Z}'_e \supseteq \mathcal{H}_e$ der Zerlegungskörper von v_e über $\mathcal{H}_e$, dann ist wegen $\mathcal{H}_e \supseteq \mathcal{K}$ jedenfalls $\mathcal{Z}'_e \supseteq \mathcal{Z}_e$. Aus der Galoistheorie bewerteter Körper ergibt sich wegen der angesichts der Diskretheit von v_k sicher anwendbaren <u>Gradgleichung</u> weiter: Der Grad von $\mathcal{E}$ ist sowohl über $\mathcal{Z}_e$ als auch über $\mathcal{Z}'_e$ gleich $[K_e : K_k] \cdot [\Gamma_e : \Gamma_k]$, d.h. es ist $\mathcal{Z}_e = \mathcal{Z}'_e \supseteq \mathcal{H}_e$.

Aus Satz 2. folgt sofort:

<u>Satz 3.</u> Es sei $\mathcal{M} = \{ v_\varrho \mid \varrho \in I \}$ eine beliebige, irgendwie indizierte Menge von Bewertungen von $\mathcal{N}$, und es seien die Einschränkungen $v_{k,\varrho}$ der v_ϱ auf $\mathcal{K}$ alle diskret; $\mathcal{Z}_\varrho$ sei der Zerlegungskörper von v_ϱ über $\mathcal{K}$. Dann ist $\mathcal{Z}_{\mathcal{M}} = \bigcap_{\varrho \in I} \mathcal{Z}_\varrho$ der größte Unterkörper $\mathcal{H}$ von $\mathcal{N}$ mit der Eigenschaft, daß bei jedem v_ϱ die Einschränkung $v_{h,\varrho}$ die gleiche (diskrete) Wertgruppe und den gleichen Restkörper besitzt wie die Einschränkung $v_{k,\varrho}$.

Angesichts von Satz 3. liegt es nahe, $\mathcal{Z}_{\mathcal{M}}$ als den <u>Zerlegungskörper der Bewertungsmenge $\mathcal{M}$ über $\mathcal{K}$</u> zu bezeichnen. Auf Grund des Existenzlemmas erhält man dann sofort als Verallgemeinerung von Lemma 7:

Satz 4. Ist $\mathcal{M} = \{ v_1,\ldots,v_N \}$ eine endliche Menge von Bewertungen von und sind die Einschränkungen $v_{k,i}$ $(i=1,\ldots,N)$ alle diskret, so sind bei dem Zerlegungskörper $\mathcal{Z}_{\mathcal{M}}$ von $\mathcal{M}$ über $\mathcal{K}$ abgesehen von den Einschränkungen $v_{z_{\mathcal{M}},i}$ $(i=1,\ldots,N)$ alle Bewertungen $v_{z_{\mathcal{M}}}$ abgesättigt.

Satz 4. zeigt insbesondere: Bei der zum Beweis von Satz 1. unter 2. benutzten Konstruktion wird $\mathcal{L}_{2i+1}$ gleich dem eindeutig bestimmten Zerlegungskörper der Menge $\mathcal{M} = \{ v_o^{(i)}, v_1 \}$ über $\mathcal{L}_{2i}$, falls $v^{(i)}_{l_{2i},o}$ und $v_{l_{2i},1}$ beide diskret sind, (was mit der Diskretheit von v_l gleichwertig ist). Wir haben hier also ein Beispiel für die praktische Brauchbarkeit unserer Verallgemeinerung des Begriffes "Zerlegungskörper". Andererseits muß man aber beachten: Besteht $\mathcal{M}$ aus mehr als einem Element, so ist $\mathcal{Z}_{\mathcal{M}}$ kein Henselkörper (vgl. Lemma 1.). Es gibt also stets mit $\mathcal{Z}_{\mathcal{M}} = \mathcal{L}_o$ beginnende "merkwürdige Körperfolgen" im Sinne von Satz 1.

4. Bewertungstheoretische Kriterien für Nicht-R-Körper

Angesichts von Satz 1. liegt die Frage nahe, ob ein Körper $\mathcal{L}$, der weder abgesättigt noch Henselkörper ist, ein R-Körper sein kann. Daß diese Möglichkeit durchaus besteht, wird sich in § 4 zeigen. Zunächst untersuchen wir, welche Kriterien uns überhaupt die Bewertungstheorie liefern kann, daß ein gegebener Körper $\mathcal{K}$ kein R-Körper ist. Unsern Ausgangspunkt bildet ein allgemeines Lemma aus der Spezialisierungstheorie.

Homomorphiesatz. Es sei $\mathfrak{R}$ ein ganz abgeschlossener Integritätsbereich (z.B. ein Bewertungsring) mit dem Quotientenkörper $\mathcal{K}$, und es sei H ein Homomorphismus von $\mathfrak{R}$ auf den Körper $K^{\sim}$, der ein separables Polynom $p(x)$ aus $\mathfrak{R}[x]$ auf das gleichfalls separable Polynom $\bar{p}(x)$ aus $K[x]$ abbildet; schließlich sei G bzw. $\bar{G}$ die Galoisgruppe des Zerfällungskörpers von $p(x)$ bzw. $\bar{p}(x)$ über $\mathcal{K}$ bzw. K. Dann ist stets $\bar{G}$ zu einer Untergruppe von G isomorph.

Korollar: Es sei $p(x)$ irreduzibel über $\mathcal{K}$ von Primzahlgrad p und K absolut algebraisch von Primzahlcharakteristik. Dann ist G sicher nicht auflösbar, wenn $\bar{p}(x)$ einen über K irreduziblen Faktor $\bar{q}(x)$ besitzt, dessen Grad q weder gleich p noch ein Teiler von $p-1$ ist.

Denn unter den Bedingungen des Korollars besitzt G sicher eine zyklische Untergruppe von der Ordnung q und man weiß, daß bei einer auflösbaren Gruppe, die sich als transitive Permutationsgruppe von p Elementen darstellen läßt, die Ordnung q stets gleich p oder ein Teiler von p-1 ist. Daß das Korollar für $\mathcal{K} = \mathcal{K}_0$ eine bequeme Möglichkeit liefert, um ganzzahlige Polynome mit nicht-auflösbarer Gruppe zu konstruieren, ist altbekannt. Untersuchen wir unter Beschränkung auf den Körper $\mathcal{N}$ aller algebraischen Zahlen, wo die Restkörper aller Bewertungen absolut algebraisch von Primzahlcharakteristik sind, die Tragweite des Korollars genauer, so kommen wir zu folgendem Theorem:

<u>Satz 5.</u> Es sei der algebraische Zahlkörper $\mathcal{K}$ ein R-Körper, aber kein Henselkörper. $\{p_1, p_2, \dots\} = \mathcal{M}$ sei die Folge der nach wachsender Größe geordneten Primzahlen p_i, zu denen sich jeweils mindestens eine Bewertung $v_{k,i}$ finden läßt, deren Restkörper $K_{k,i}$ <u>nicht</u> p_i-abgeschlossen ist. Ist dann $\mathcal{M}$ weder leer noch einelementig, so müssen für jedes $p_n \in \mathcal{M}$ mit $n > 1$ die Primzahlen $p_1, \dots, p_{n-1}$ alle Teiler von $p_n - 1$ sein.

Beweis: Es sei etwa p_m kein Teiler von p_n-1 $(m < n)$. Aus der Voraussetzung, daß $\mathcal{K}$ kein Henselkörper ist, sowie aus Bemerkung 4. von § 1 schließt man leicht: Es gibt sicher einen endlichen algebraischen Oberkörper $\mathcal{L}$ von $\mathcal{K}$ und zwei verschiedene Bewertungen $v_{1,m}$, $v_{1,n}$, derart daß $K_{1,m}$ nicht p_m- und $K_{1,n}$ nicht p_n-abgeschlossen ist (vgl. eine analoge Überlegung beim Beweise von Satz 1. unter 1.). Unter den angegebenen Bedingungen folgt aber aus dem allgemeinen Existenzsatz, dessen grundlegende Bedeutung in § 2 hervorgehoben wurde (wenn auch nicht aus dem speziellen Existenzlemma): Es gibt sicher im Durchschnitt S der Bewertungsringe von $v_{1,m}$ und $v_{1,n}$ ein über $\mathcal{L}$ irreduzibles Polynom $p(x)$ von Primzahlgrad p_n, das beim Homomorphismus von S auf $K_{1,m}$ auf ein Polynom $\overline{p}(x)$ abgebildet wird, das seinerseits über $K_{1,m}$ in einen irreduziblen Faktor p_m-ten Grades und im übrigen in paarweise verschiedene Linearfaktoren zerfällt. Es könnte daher nach dem Korollar zum Homomorphiesatz $\mathcal{L}$ und damit auch $\mathcal{K}$ kein R-Körper sein.

Aus Satz 5. folgt insbesondere die wohlbekannte Tatsache:

Kein endlicher algebraischer Zahlkörper $\mathcal{K}$ ist ein R-Körper. Denn es ist hier jeder Restkörper endlich und $\mathcal{M}$ gleich der Menge aller Primzahlen.

Natürlich wird man fragen: Gibt es überhaupt unendliche Primzahlfolgen, die der Bedingung von Satz 5. genügen? Die Antwort lautet: Ja! Ist nämlich

$\mathcal{M}_n = \{p_1, \dots, p_n\}$ eine der Bedingung von Satz 5. genügende Primzahlfolge, so braucht man nur für p_{n+1} eine Primzahl aus der arithmetischen Progression $k\,(p_1 \cdot \ldots \cdot p_n) + 1$ $(k=1,2,\ldots)$ zu wählen, und man hat die Folge um ein Glied verlängert, ohne die Bedingung von Satz 5. zu verletzen.

Satz 5. kann noch etwas verschärft werden, wenn man nicht nur auf die Restkörper sondern auch auf die Wertgruppen achtet. Der allgemeine Existenzsatz zeigt, daß an der entscheidenden Stelle von Satz 5. die Konstruktion des Polynoms $p(x)$ auch dann noch möglich ist, wenn zwar der Restkörper, aber nicht die Wertgruppe von $v_{1,n}$ p_n-abgesättigt ist. Daraus folgt sofort:

Satz 6. Es sei $\mathcal{K}$ ein R-Körper aber kein Henselkörper; p sei eine Primzahl, zu der eine Bewertung $v_{k,o}$ mit nicht p-abgeschlossenem Restkörper existiert. Dann müssen für jede Primzahl q mit $q > p$, $q-1 \not\equiv 0(p)$ bei jeder Bewertung v_k der Restkörper und die Wertgruppe q-abgeschlossen sein.

Um einzusehen, daß die Bedeutung der Sätze 5. und 6. nicht überschätzt werden darf, beachte man: 1. Sind bei dem Körper $\mathcal{K}$ die Restkörper aller Bewertungen algebraisch abgeschlossen, so können wir aus dem Homomorphiesatz keinerlei Bedingung für die Wertgruppen ableiten. Es ist durchaus denkbar, daß $\mathcal{K}$ ein R-Körper ist, obwohl alle Bewertungen diskret sind. 2. Es wurde schon in der Einleitung betont, daß es beim Problem der R-Unterkörper des Körpers $\mathcal{N}$ aller algebraischen Zahlen zweckmäßig sein dürfte, nicht $\mathcal{K}_0$, sondern den größten über $\mathcal{K}_0$ auflösbaren Körper $\mathcal{M}$ als kleinsten Grundkörper zu wählen. Bei $\mathcal{M}$ und allen Oberkörpern von $\mathcal{M}$ sind aber, wie schon früher hervorgehoben, alle Bewertungen abgesättigt. Mit Kriterien, die sich auf die spezielle Natur gewisser Restkörper oder Wertgruppen stützen, ist also überhaupt nichts mehr anzufangen.

5. p-Sylowkörper

Wir wenden uns zu rein gruppentheoretischen Betrachtungen, wobei wir die in den Vorbemerkungen bereits eingeführten Definitionen und Bezeichnungen benützen. Darüber hinaus definieren wir neu: Die (abgeschlossene!) Untergruppe H_p der Galoisgruppe G soll p-Sylowgruppe von G heißen, wenn $H_p \cdot U/U$ für jede Umgebungsuntergruppe U von G eine p-Sylowgruppe der endlichen Gruppe G/U im üblichen Sinne des Wortes darstellt. Genau wie bei den endlichen Gruppen gelten dann die folgenden Sylowsätze:

G besitzt stets p-Sylowgruppen. Alle p-Sylowgruppen von G sind in G konjugiert. Jede p-Untergruppe von G ist in einer p-Sylowgruppe enthalten, es sind also die p-Sylowgruppen die einzigen maximalen p-Untergruppen von G [5].

Als p-Sylowkörper von $\mathcal{N}$ über $\mathcal{K}$ bezeichnen wir natürlich die Invariantenkörper der p-Sylowgruppen von G. Entsprechend wollen wir den Invariantenkörper einer beliebigen p-Untergruppe von G einen p-Körper von $\mathcal{N}$ über $\mathcal{K}$ nennen. Es gilt dann:

Satz 7. a) Alle p-Sylowkörper von $\mathcal{N}$ über $\mathcal{K}$ sind über $\mathcal{K}$ konjugiert.
b) Die Sylowkörper von $\mathcal{N}$ über $\mathcal{K}$ können auch charakterisiert werden als die kleinsten p-Unterkörper von $\mathcal{N}$ über $\mathcal{K}$.
c) Ein Körper $\mathcal{P}$ zwischen $\mathcal{N}$ und $\mathcal{K}$ ist genau dann ein p-Unterkörper von $\mathcal{N}$ über $\mathcal{K}$, wenn jeder endliche Oberkörper $\mathcal{L}$ von $\mathcal{P}$ über $\mathcal{P}$ eine p-Potenz als Grad besitzt.
d) Ein p-Unterkörper $\mathcal{P}$ von $\mathcal{N}$ über $\mathcal{K}$ ist genau dann ein p-Sylowkörper, wenn ein in $\mathcal{P}$ enthaltener, über $\mathcal{K}$ endlicher Körper $\mathcal{L}$ stets über $\mathcal{K}$ einen durch p unteilbaren Grad hat.
e) Jeder p-Sylowkörper ist ein R-Körper.

Der Beweis von Satz 7. folgt leicht aus den rein gruppentheoretischen Sylowsätzen und den Hauptsätzen der Galoisschen Theorie. Bei c) und d) beachte man die Definition der p-Untergruppe bzw. der p-Sylowgruppe von G sowie die Tatsache, daß die Behauptung richtig ist, wenn man anstelle von $\mathcal{N}$ einen endlichen separablen Normaloberkörper $\mathcal{E}$ von $\mathcal{K}$ und anstelle von $\mathcal{P}$ den Invariantenkörper einer p-Untergruppe bzw. einer p-Sylowgruppe der (endlichen!) Galoisgruppe von $\mathcal{E}$ über $\mathcal{K}$ setzt. Behauptung d) ist trivial, da jede p-Gruppe auflösbar ist.
Wir beschränken uns von jetzt ab wieder, wie schon früher, auf den Körper $\mathcal{N}$ aller algebraischen Zahlen. Wählen wir $\mathcal{M} = \mathcal{K}$ als Grundkörper, so wissen wir, wie schon in § 2 bemerkt, daß der Henselkörper jeder Bewertung gleich $\mathcal{N}$ wird. Die p-Sylowkörper $\mathcal{P}$ sind also vorläufig die kleinsten bekannten R-Körper, und man ist ohne Einführung einer bisher unbekannten völlig neuen Konzeption ausschließlich auf die Galoissche Theorie angewiesen, wenn man den Aufbau von $\mathcal{N}$ über $\mathcal{K} = \mathcal{M}$ weiter untersuchen will. Man wird etwa daran denken, Aussagen über die Normalisatoren der p-Sylowgruppen der Galoisgruppe G von $\mathcal{N}$ über $\mathcal{M}$ zu gewinnen, doch ist es völlig ungewiß, was für einen

(5) Vgl. hierzu [2].

Erfolg ein Versuch in dieser Richtung haben könnte.
Wählen wir dagegen $\mathcal{K}_o$ als Grundkörper, so ist es eine nichttriviale Aufgabe, die Beziehungen zwischen den Henselkörpern der Bewertungen von $\mathcal{N}$ und den p-Sylowkörpern genauer zu studieren. Dabei ist es zweckmäßig, neben dem Henselkörper $\mathcal{Z}$ einer gegebenen Bewertung auch ihren Verzweigungskörper $\mathcal{V}$ zu betrachten. Man erhält dann:

Satz 8. Es seien p und p' Primzahlen, und es sei v (über $\mathcal{K}_o$) eine Bewertung mit $vp' > 0$. Dann gilt:
a) Für keinen p-Sylowkörper $\mathcal{P}$ kann $\mathcal{Z} \supseteq \mathcal{P}$ oder $\mathcal{P} \supseteq \mathcal{Z}$ gelten.
b) Für $p \neq p'$ ist stets der Vereinigungskörper $\mathcal{V} \cdot \mathcal{P}$ von $\mathcal{V}$ mit dem p-Sylowkörper $\mathcal{P}$ gleich $\mathcal{N}$.
c) Für $p = p'$ gibt es stets einen p-Sylowkörper $\mathcal{P}$ mit $\mathcal{P} \subset \mathcal{V}$.

Beweis: aα) Aus der Tatsache, daß v_{k_o} und damit auch v_z diskret ist, folgt sofort, daß $\mathcal{Z}$ endliche Oberkörper beliebigen Grades besitzt. Es ist also für keine Primzahl p ein p-Körper, d.h. es ist $\mathcal{Z} \supseteq \mathcal{P}$ ausgeschlossen.
aβ) Nach dem Existenzlemma von § 3 gibt es einen Oberkörper p-ten Grades $\mathcal{L}$ von $\mathcal{K}_o$, auf den v_{k_o} genau p verschiedene Fortsetzungen besitzt, unter denen sich auch die Einschränkung v_l von v auf $\mathcal{L}$ befinden muß. Aus dem Korollar zum Existenzlemma und Satz 2. von § 3 folgt weiter, daß $\mathcal{L}$ in $\mathcal{Z}$ enthalten sein muß. Nach Satz 7 d) ist daher $\mathcal{P} \supseteq \mathcal{Z}$ ausgeschlossen.
b) Da $\mathcal{V}$ bekanntlich ein p'-Körper ist, ist die Gruppe H von $\mathcal{N}$ über $\mathcal{V} \cdot \mathcal{P}$ der Durchschnitt einer p'-Gruppe mit einer p-Gruppe. Für $p \neq p'$ besteht also H nur aus dem identischen Automorphismus.
c) Für $p = p'$ ist die Gruppe von $\mathcal{N}$ über $\mathcal{V}$ stets in einer p-Sylowgruppe von G enthalten.

Gehen wir nicht von der Bewertung v sondern von einem gegebenen p-Sylowkörper $\mathcal{P}$ aus, so wissen wir nach Satz 8 c): Es gibt jedenfalls einen p-Sylowkörper $\mathcal{P}'$ und eine Bewertung v' mit $v'p > 0$, derart daß $\mathcal{P}'$ Unterkörper des Verzweigungskörpers $\mathcal{V}'$ von v' ist. Nach Satz 7 a) gibt es ferner einen Automorphismus A von $\mathcal{N}$ der $\mathcal{P}'$ auf $\mathcal{P}$ und selbstverständlich p auf sich selbst abbildet. Durch A wird aber $\mathcal{V}'$ auf den Verzweigungskörper $\mathcal{V}$ einer Bewertung v abgebildet, die der Bedingung $vp > 0$ genügt, und aus $\mathcal{V}' \supset \mathcal{P}'$ folgt $\mathcal{V} \supset \mathcal{P}$. D.h. aber, wir können Satz 8. ergänzen durch:

Satz 8 d). Zu jedem p-Sylowkörper $\mathcal{P}$ gibt es (über $\mathcal{K}_o$) eine Bewertung v mit $vp > 0$, derart daß $\mathcal{P}$ Unterkörper des Verzweigungskörpers $\mathcal{V}$ von v ist.

Der Grundkörper $\mathfrak{K}_0$ wurde bei Satz 8. nur deshalb gewählt, weil wir von vornherein die beiden Möglichkeiten $\mathfrak{K} = \mathfrak{M}$ und $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_0$ in den Vordergrund gestellt hatten. Man sieht sofort, daß Satz 8. uneingeschränkt gilt, wenn wir $\mathfrak{K}_0$ durch irgendeinen Körper $\mathfrak{L}$ ersetzen, bei dem alle Bewertungen v_l diskret sind, also insbesondere, wenn wir für $\mathfrak{K}$ einen beliebigen endlichen algebraischen Zahlkörper wählen. Lassen wir ferner die triviale Möglichkeit $\mathfrak{V} = \mathfrak{N}$ zu, und fordern wir statt $\mathfrak{V} \supset \mathfrak{P}$ nur $\mathfrak{V} \supseteq \mathfrak{P}$, so gelten die Behauptungen b), c), d) von Satz 8. offenbar ganz allgemein. Im übrigen wollen wir darauf verzichten, bei a) bis d) nach notwendigen und hinreichenden Bedingungen zu suchen, da es sich hier um eine verhältnismäßig nebensächliche Frage handelt.

Dagegen sei noch kurz auf gewisse ganz spezielle unendliche algebraische Zahlkörper hingewiesen, deren Wahl als Grundkörper durch Satz 8. nahegelegt wird. Satz 8. zeigt jedenfalls, daß es sich bei den Untersuchungen im Kreis der Sylowsätze empfiehlt, für eine feste Primzahl p einerseits die Menge aller p-Sylowkörper zu betrachten, andererseits die Menge Φ_p aller der Bewertungen v, die der Bedingung $vp > 0$ genügen. Da ferner nach Satz 8. nur die Verzweigungskörper, aber nicht die Henselkörper zu den p-Sylowkörpern engere Beziehungen haben, wird man fragen: Kann man nicht bei fest vorgegebenem p einen einfach gebauten algebraischen Zahlkörper $\mathfrak{M}^p$ angeben, der den folgenden beiden Bedingungen genügt:

1. Bei allen Bewertungen $v \in \Phi_p$ fällt über $\mathfrak{M}^p$ der Henselkörper $\mathfrak{Z}$ mit dem Verzweigungskörper $\mathfrak{V}$ zusammen.
2. Der Verzweigungskörper $\mathfrak{V}$ von $v \in \Phi_p$ ist mit Sicherheit stets von $\mathfrak{N}$ verschieden.

Wir behaupten nun:

Es sei $\mathbb{N}^p$ die Menge aller durch p unteilbaren natürlichen Zahlen, $\mathfrak{L}_{n,p}$ der über $\mathfrak{K}_0$ gebildete Zerfällungskörper des Polynoms $x^n - p$ und $\mathfrak{M}^p$ der Vereinigungskörper aller der $\mathfrak{L}_{n,p}$, bei denen $n \in \mathbb{N}^p$. Dann ist $\mathfrak{M}^p$ gerade ein Körper der gewünschten Art.

Der Beweis möge nur angedeutet werden: $\mathfrak{M}^p$ enthält jedenfalls den Körper $\mathfrak{E}^p$ der durch die Menge aller n-ten Einheitswurzeln mit $n \in \mathbb{N}^p$ erzeugt wird. Von $\mathfrak{E}^p$ aber weiß man: Bei jeder Bewertung $v \in \Phi_p$ hat die Verengung $v_{\mathfrak{e}p}$ auf $\mathfrak{E}^p$ einen algebraisch abgeschlossenen Restkörper und die Wertgruppe $\mathbb{Z}$, falls man so normiert, daß $vp = 1$ wird. Weiter ergibt sich ohne Schwierigkeit: Bei jeder Bewertung $v \in \Phi_p$ hat die Verengung $v_{\mathfrak{m}p}$ auf $\mathfrak{M}^p$ einen algebraisch abgeschlossenen Restkörper und (unter der Normierungsbedingung $vp = 1$) die Wertgruppe $\Delta^{(p)}$.

Aus diesen beiden Eigenschaften folgt aber nach den Hauptsätzen der Verzweigungstheorie für $v \in \Phi_p$ sofort: $\mathcal{Z} = \mathcal{V} \neq \mathcal{N}$. - Man kann im übrigen die Aussage $\mathcal{V} \neq \mathcal{N}$ noch wesentlich verschärfen: Es ist sogar $\mathcal{V}$ gleich dem Verzweigungskörper von v über $\mathcal{K}_0$, die Grundkörpererweiterung hat also hier nichts geändert. Doch soll auf den Beweis dieser Ergänzungsbemerkung hier verzichtet werden. Als Endergebnis unserer mit Satz 8. beginnenden Überlegungen können wir ein Programm für die Weiterentwicklung der R-Körpertheorie aufstellen: Es sind für jede Primzahl p sowohl über $\mathcal{K} = \mathcal{K}_0$ als auch über $\mathcal{K} = \mathcal{M}^p$ mit Hilfe der Galoisschen Theorie die Lagebeziehungen genauer zu untersuchen, die zwischen den p-Sylowkörpern und den Verzweigungskörpern der Bewertung $v \in \Phi_p$ bestehen. (Bei den Lagerbeziehungen ist z.B. an Aussagen gedacht über die Menge aller der p-Sylowkörper, die in einem bestimmten Verzweigungskörper enthalten sind, bzw. über die Menge aller der Verzweigungskörper, die einen bestimmten p-Sylowkörper enthalten.)

BIBLIOGRAPHIE

[1] ENDLER (O.). - Bewertungstheorie unter Benutzung einer Vorlesung von W. Krull, Bonner mathematische Schriften, t. 15, 1963, n° 1 et 2.

[2] KRULL (W.). - Zur Theorie der Gruppen mit Untergruppentopologie, Abhandl. math. Sem. Univ. Hamburg (à paraître).

[3] SCHMIDT (F. K.). - Körper, über denen jede Gleichung durch Radikale auflösbar ist, Sitz. Ber. Heidelberg., Akad. der Wiss., Math.-nat. Kl., 1933, n° 2, p. 37-47.