SÉMINAIRE DUBREIL.
ALGÈBRE ET THÉORIE
DES NOMBRES

ARTIBANO MICALI

Sur les algèbres universelles d'un module projectif

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 16, nº 2 (1962-1963), exp. nº 25, p. 1-15

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1962-1963__16_2_A11_0>

SUR LES ALGÈBRES UNIVERSELLES D'UN MODULE PROJECTIF

par Artibano MICALI

Dans cet exposé, un anneau sera toujours commutatif à élément unité, et un module sur un tel anneau sera supposé unitaire. De plus, un homomorphisme d'anneaux envoie l'élément unité sur l'élément unité.

1. Rappels sur les algèbres universelles.

Soient A un anneau et M un A-module. On dira qu'un couple (T, α) composé d'une A-algèbre T et d'une application linéaire α de M dans T est une algèbre tensorielle sur M si, pour toute application linéaire φ de M dans une A-algèbre E, il existe un et un seul homomorphisme d'algèbres $\bar{\varphi}$ de T dans E tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\alpha"'] & E \\ T \arrow[ur, "\bar{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

soit commutatif. Dans ces conditions, $\alpha(M)$ est un système de générateurs de T, et si (T, α) et (T', α') sont deux algèbres tensorielles sur M, alors T et T' sont isomorphes. Plus précisément, il existe un isomorphisme $j : T \to T'$ tel que $j \circ \alpha = \alpha'$.

On dira qu'un couple (S, β) formé d'une A-algèbre S et d'une application linéaire $\beta : M \to S$ est une algèbre symétrique sur M si les éléments de $\beta(M)$ commutent entre eux dans S et pour toute application linéaire φ de M dans une A-algèbre E telle que les éléments de $\varphi(M)$ commutent entre eux dans E, alors il existe un et un seul homomorphisme $\bar{\varphi}$ de S dans E tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\beta"'] & E \\ S \arrow[ur, "\bar{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

soit commutatif. On voit encore ici que $\beta(M)$ est un système de générateurs de S et que, si (S, β) et (S', β') sont deux algèbres symétriques sur M, alors S et S' sont isomorphes.

Un couple (Λ, γ), formé d'une A-algèbre Λ et d'une application linéaire γ de M dans Λ telle que $\gamma(x)^2 = 0$ pour tout $x \in M$, est une <u>algèbre extérieure sur</u> M si, pour toute application linéaire φ de Λ dans une A-algèbre E telle que $\varphi(x)^2 = 0$ pour tout $x \in M$, il existe un homomorphisme $\overline{\varphi}$, et un seul, de Λ dans E tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\gamma"'] & E \\ \Lambda \arrow[ur, "\overline{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

soit commutatif. Ici encore, $\gamma(M)$ est un système de générateurs de l'algèbre Λ, et si (Λ, γ) et (Λ', γ') sont deux algèbres extérieures sur M, alors Λ et Λ' sont isomorphes.

On vérifie aisément que l'algèbre symétrique est commutative, et que l'algèbre extérieure est anti-commutative.

Ce sont ces trois algèbres universelles qui feront l'objet de notre étude.

Etant donné un A-module M, on peut construire effectivement ces trois algèbres universelles. En effet, on désigne par $T_n(M)$ la puissance tensorielle n-ième du A-module M, où l'on suppose que

$$T_0(M) = A \quad \text{et} \quad T_1(M) = M .$$

Soient encore

$$T(M) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(M)$$

(somme directe) et

$$\alpha : M \to T_1(M)$$

l'injection canonique. On voit que le couple $(T(M), \alpha)$ est l'algèbre tensorielle sur le A-module M. En général on dira que $T(M)$ est l'algèbre tensorielle du A-module M, sans mentionner l'injection α. Soit maintenant I l'idéal bilatère de $T(M)$ engendré par les éléments de la forme $x \otimes y - y \otimes x$, x et y parcourant M. Soient

$$S(M) = T(M)/I \quad \text{et} \quad \beta : \ M \to S(M)$$

l'application composée $M \overset{\alpha}{\to} T(M) \to S(M)$. Comme $\alpha(M) \cap I = \{0\}$, alors β est une injection dite canonique, et on vérifie sans peine que $(S(M)\ ,\ \beta)$ est l'algèbre symétrique sur le A-module M. Puisque $T(M)$ est une algèbre graduée et que I est un idéal homogène de $T(M)$, alors le quotient $S(M)$ est encore une algèbre graduée dont le sous-module $S_n(M)$ des éléments homogène de degré n est l'image par l'application canonique $T(M) \to S(M)$ de $T_n(M)$, c'est-à-dire

$$S_n(M) = T_n(M)/(T_n(M) \cap I) \quad \text{pour tout entier} \quad n \geqslant 0 .$$

On remarque que $S_0(M) = A$ et $S_1(M) = M$. Soit maintenant J l'ideal bilatère de $T(M)$ engendré par les éléments de la forme $x \otimes x$, x parcourant M, et soit $\Lambda(M) = T(M)/J$. Si l'on désigne par $\gamma : \ M \to \Lambda(M)$ l'application composée $M \overset{\alpha}{\to} T(M) \to \Lambda(M)$, il est facile de vérifier que $(\Lambda(M)\ ,\ \gamma)$ est l'algèbre extérieure sur le A-module M. Comme $\alpha(M) \cap J = \{0\}$, alors γ est une injection (dite canonique). D'autre part, $\Lambda(M)$ est une algèbre graduée dont le sous-module $\Lambda(M)$ des éléments homogènes de degré n est l'image de $T_n(M)$ par l'application canonique $T(M) \to \Lambda(M)$, c'est-à-dire

$$\Lambda_n(M) = T_n(M)/(T_n(M) \cap J) \quad \text{pour tout entier} \quad n \geqslant 0 .$$

Il est clair qu'on a

$$\Lambda_0(M) = A \quad \text{et} \quad \Lambda_1(M) = M .$$

Etant donné un A-module M, on peut donc faire correspondre les algèbres $T(M)$, $S(M)$ et $\Lambda(M)$, et alors, on a le résultat suivant :

LEMME 1. – Les foncteurs T, S et Λ sont covariants et exacts à droite définis dans la catégorie des A-modules unitaires à valeurs dans les catégories des A-algèbres, A-algèbres commutatives et A-algèbres anti-commutatives respectivement (cf. [1], [4] ou [5]).

A propos de l'algèbre symétrique, on remarque encore que si un module M est somme directe d'une famille quelconque $(M_i)_{i\in N}$ de sous-modules, alors $S(M)$ est isomorphe (canoniquement) au produit tensoriel $\bigotimes_{i\in N} S(M_i)$. De plus, si L est un A-module libre ayant une base quelconque $(e_i)_{i\in N}$, alors $S(L)$ s'identifie à l'anneau de polynômes $A[X_i]_{i\in N}$, où $X_i = \beta(e_i)$ pour tout $i \in N$, $\beta : \ L \to S(L)$ étant l'injection canonique.

2. Les algèbres universelles d'un module projectif.

Le lemme 1 nous permet de donner la proposition suivante :

PROPOSITION 1. - Soient A un anneau et M un A-module. Une condition nécessaire et suffisante pour que M soit un A-module projectif est que son algèbre tensorielle $T(M)$ (resp. symétrique $S(M)$, extérieure $\Lambda(M)$) le soit, en tant que A-module.

En effet, si

$$T(M) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(M)$$

(somme directe) est un A-module projectif, alors $T_n(M)$ est projectif pour tout entier $n \geqslant 0$ et en particulier il en est de même de $M = T_1(M)$. Si M est un A-module projectif, il existe un A-module libre L et deux homomorphismes $M \xrightarrow{\varphi} L \xrightarrow{\psi} M$ tels que $\psi \circ \varphi = 1_M$. D'après le lemme 1, on a

$$T(M) \xrightarrow{T(\varphi)} T(L) \xrightarrow{T(\psi)} T(M)$$

avec $T(\varphi) \circ T(\psi) = 1_{T(M)}$, et ceci nous montre que

$$T(L) = T(M) \oplus \operatorname{Ker}(T(\psi)) .$$

Comme $T(L)$ est un A-module libre (cf. [4], chap. V, § 3, théorème 7), alors $T(M)$ est projectif.

COROLLAIRE. - Soient A un anneau intègre et M un A-module projectif. Alors l'algèbre symétrique $S(M)$ est intègre.

En effet, $S(M)$ se plonge dans un anneau de polynômes à coefficients dans l'anneau intègre A.

On voit que, étant donné un A-module M, si

$$S(M) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n(M)$$

(somme directe) est projectif, alors il en est de même de $S_n(M)$ pour tout $n \geqslant 0$. Supposons que $S_n(M)$ soit projectif pour tout $n \geqslant 2$, ou encore on peut affaiblir ceci en supposant qu'il existe un $q \geqslant 2$ tel que $S_q(M)$ soit projectif. On peut se demander si, dans ces conditions, $S(M)$ est projectif, ou encore compte tenu de la proposition 1, si M est projectif. La même question peut être posée pour les algèbres tensorielle et extérieure. Plus précisément, on va démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 1. - Soient A un anneau et M un A-module de présentation finie.

(i) S'il existe un entier $q \geqslant 2$ tel que $T_q(M)$ (resp. $S_q(M)$) soit un A-module projectif, alors M est aussi un A-module projectif.

(ii) Soit n le plus grand entier tel que $\Lambda_n(M) \neq \{0\}$. S'il existe un entier q, $2 \leqslant q \leqslant n$, tel que $\Lambda_q(M)$ soit projectif, alors il en est de même du A-module M.

On remarque tout d'abord que dans le cas (ii) on peut supposer $n \geqslant 2$, car si $n \leqslant 1$, l'assertion est triviale. On dit qu'un A-module M est de présentation finie s'il existe une suite exacte $L_1 \to L_0 \to M \to 0$ où les L_i sont libres de type fini. D'après la formule de localisation des algèbres universelles et le lemme ci-dessous (lemme 2), on se ramène au cas où l'anneau A est local. En effet, pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de l'anneau A, on a

$$(T_q(M))_{\mathfrak{m}} = T_q(M_{\mathfrak{m}}) .$$

Comme $T_q(M)$ est un A-module projectif de type fini (car M étant de présentation finie, il est de type fini et donc, il en est de même de $T_q(M)$), le lemme 2 nous dit que $T_q(M)$ est un A-module de présentation finie et $T_q(M_{\mathfrak{m}})$ est un $A_{\mathfrak{m}}$-module libre pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A. D'après le cas local, le $A_{\mathfrak{m}}$-module $M_{\mathfrak{m}}$ est libre pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A, et comme M est de présentation finie, alors M est un A-module projectif de type fini. Ces mêmes remarques sont valables pour les algèbres symétrique et extérieure.

Cas local. - Soient A un anneau local d'idéal maximal $\mathfrak{m}$ et de corps des restes $k = A/\mathfrak{m}$, $x_1, \dots, m_m$ un système minimal de générateurs de M sur A et L un A-module libre ayant une base $e_1, \dots, e_m$ à m éléments. Si $\varphi : L \to M$ est l'épimorphisme défini par $\varphi(e_i) = x_i$ $(i = 1, \dots, m)$ et si $R = \mathrm{Ker}(\varphi)$, alors on a la suite exacte

$$0 \to R \to L \to M \to 0 \quad \text{avec} \quad R \subset \mathfrak{m}L .$$

En effet, si

$$x = \sum_{i=1}^{m} a_i e_i \in R , \text{ alors } 0 = \sum_{i=1}^{m} a_i x_i$$

et si l'on suppose que $a_1 \notin \mathfrak{m}$, par exemple, on peut écrire

$$x_1 = \sum_{i=2}^{m} \left(-\frac{a_i}{a_1}\right) x_i \quad \text{avec les } -\frac{a_i}{a_1} \in A .$$

Ceci contredit la minimalité de $x_1, \dots, x_m$. Il en résulte alors que $a_i \in \mathfrak{m}$ pour tout i, et donc $R \subset \mathfrak{m}L$. Ceci nous donne $R \otimes_A k = (0)$, et donc

$$L \otimes_A k = M \otimes_A k .$$

(i) La démonstration est exactement la même dans les deux cas (tensorielle et symétrique), et nous allons la faire pour l'algèbre symétrique. Soit

$S(\varphi) : S(L) \to S(M)$ le prolongement de φ aux algèbres symétriques et pour chaque degré p, soit $S_p(\varphi) : S_p(L) \to S_p(M)$ l'épimorphisme induit. Comme $S_q(M)$ est un A-module projectif, alors

$$\mathrm{Tor}_1^A(S_q(M) , k) = (0)$$

et donc, la suite exacte

$$0 \to \mathrm{Ker}(S_q(\varphi)) \to S_q(L) \to S_q(M) \to 0$$

nous donne la suite exacte

$$0 \to \mathrm{Ker}(S_q(\varphi)) \otimes_A k \to S_q(L) \otimes_A k \to S_q(M) \otimes_A k \to 0 .$$

D'autre part, étant donné que

$$S_q(L) \otimes_A k = S_q(L \otimes_A k)$$

et que

$$S_q(M) \otimes_A k = S_q(M \otimes_A k) ,$$

il en résulte que

$$\mathrm{Ker}(S_q(\varphi)) \otimes_A k = (0) .$$

Comme $\mathrm{Ker}(S_q(\varphi))$ est un A-module projectif de type fini, le lemme de Nakayama nous montre que $\mathrm{Ker}(S_q(\varphi)) = (0)$. Soit

$$x = \sum_{i=1}^{m} a_i e_i \in L$$

tel que $\varphi(x) = 0$ et fixons $q - 1$ éléments $y_1 , \ldots , y_{q-1}$ de L. On voit que

$$S_q(\varphi)(xy_1 \ldots y_{q-1}) = \varphi(x) \varphi(y_1) \ldots \varphi(y_{q-1}) = 0 ,$$

et donc $xy_1 \ldots y_{q-1} = 0$ dans $S_q(L)$. Si l'on prend, par exemple,

$$y_1 = \ldots = y_{q-1} = e_1 ,$$

on a

$$0 = \sum_{i=1}^{m} a_i e_i e_1^{q-1}$$

et ceci nous montre que $a_i = 0$ pour tout i. On a ainsi $R = \mathrm{Ker}(\varphi) = (0)$, et donc $M = L$, c'est-à-dire, M est un A-module libre.

(ii) Les notations étant les mêmes à condition de remplacer le symbole S par Λ, on obtient $\mathrm{Ker}(\Lambda_q(\varphi)) = (0)$, et donc $xy_1 \ldots y_{q-1} = 0$ dans $\Lambda_q(L)$. On prend pour $y_1 , \ldots , y_{q-1}$ des éléments e_j tels que $y_1 \ldots y_{q-1} = e_J$ où J est une partie de $\{1 , \ldots , q\}$ à $q - 1$ éléments. On voit alors que

$$0 = xy_1 \dots y_{q-1} = \sum_{i=1}^{m} a_i(e_i \wedge e_J)$$

où les $e_i \wedge e_J$ sont nuls si $i \in J$ et linéairement indépendants sur A si $i \notin J$. On a ainsi $a_i = 0$, pour tout $i \notin J$, et comme ceci est vrai pour toute partie J de $\{1, \dots, q\}$ à $q-1$ éléments, il en résulte que $a_i = 0$ $(i = 1, \dots, m)$. On a ainsi montré que $R = \mathrm{Ker}(\varphi) = (0)$, et donc $M = L$ est un A-module libre. Le lemme suivant achève la démonstration du théorème :

LEMME 2. – Soient A un anneau et M un A-module. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) M est un A-module projectif de type fini.

(ii) M est un A-module de présentation fini et, pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A, le $A_{\mathfrak{m}}$-module $M_{\mathfrak{m}}$ est libre (cf. [2], chap. 2, § 5, n° 2, théorème 1).

Remarques.

1° Soient A un anneau et M un A-module. Si M a une présentation finie, il en est de même de $S_q(M)$ pour tout $q > 0$. En effet, si

$$A^m \to A^n \to M \to 0$$

est une présentation finie de M,

$$A^{\binom{m+q-1}{q}} \to A^{\binom{n+q-1}{q}} \to S_q(M) \to 0$$

en est une de $S_q(M)$. La même remarque est valable pour les algèbres tensorielle et extérieure.

2° Le théorème 1 est encore vrai pour M de type fini, à condition de supposer que l'anneau A soit intègre. En effet, il suffit de voir que dans ces conditions le lemme 2 est vérifié (cf. [3], lemme 5, page 249).

3° Le théorème 1 est vrai si l'on suppose que A est noethérien (non nécessairement intègre) et M de type fini, car dans ces conditions le module M est de présentation finie. En effet, si M est de type fini, il existe une suite exacte

$$(0) \to R \to A^n \to M \to (0),$$

et comme A est noethérien et A^n de type fini, alors R est aussi de type fini. Il existe alors une suite exacte

$$(0) \to R_0 \to A^m \to R \to (0)$$

et, en composant $A^m \to R$ et $R \to A^n$, on obtient une présentation finie de M, à savoir,

$$A^m \to A^n \to M \to (0) .$$

3. Cas d'un anneau de Dedekind.

Soient A un anneau intègre et K son corps de fractions. On appelle idéal fractionnaire de A tout sous-A-module $\mathfrak{a}$ de K tel qu'il existe un élément $d \in A$, $d \neq 0$ pour lequel $d\mathfrak{a}$ $(\subset A)$ est un idéal de A au sens habituel. Les idéaux de A s'appellent alors idéaux entiers de A. On dira qu'un idéal fractionnaire $\mathfrak{a}$ de A est inversible, s'il existe un idéal fractionnaire $\mathfrak{b}$ de A tel que $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = A$.

LEMME 3. - Soient A un anneau et $M = (x_1, \dots, x_n)A$ un A-module de type fini. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) M est un A-module projectif ;

(ii) Il existe n formes linéaires $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ sur M telles que

$$x = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x)\, x_i \quad \text{pour tout} \quad x \in M .$$

Supposons que (ii) soit vraie, on considère les homomorphismes $M \overset{\varphi}{\to} A^n \overset{\psi}{\to} M$ définis par

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x)\, e_i \quad \text{pour tout} \quad x \in M$$

et

$$\psi(e_i) = x_i \quad \text{pour} \quad i = 1, \dots, n ,$$

où $e_1, \dots, e_n$ est la base canonique du A-module libre A^n. On voit immédiatement que $\psi \circ \varphi = 1_M$ et donc $A^n = M \oplus \mathrm{Ker}(\psi)$. Ceci nous montre que M est projectif. Supposons (i) vérifiée. On considère l'épimorphisme $A^n \overset{\psi}{\to} M$ défini par $\psi(e_i) = x_i$ $(i = 1, \dots, n)$ et comme M est projectif, il existe un homomorphisme $\varphi : M \to A^n$ tel que $\psi \circ \varphi = 1_M$. Pour tout $x \in M$, on peut écrire

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x)\, e_i$$

et pour $x, y \in M$ et $a \in A$, les relations

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y) \quad \text{et} \quad \varphi(ax) = a\varphi(x)$$

nous donnent

$$\varphi_i(x+y) = \varphi_i(x) + \varphi_i(y) \quad \text{et} \quad \varphi_i(ax) = a\varphi_i(x)$$

pour $i = 1, \ldots, n$. Ceci nous montre que les φ_i sont des formes linéaires sur M et

$$x = \psi(\varphi(x)) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x)\, x_i$$

pour tout x dans M.

LEMME 4. - Soient A un anneau intègre et $\mathfrak{a}$ un idéal fractionnaire de A. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathfrak{a}$ est un A-module projectif de type fini ;

(ii) $\mathfrak{a}$ est un idéal inversible.

Si $\mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_n)A$ est un A-module projectif de type fini, il existe des formes linéaires $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ sur $\mathfrak{a}$ telles que

$$a = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(a)\, a_i \quad \text{pour tout } a \in \mathfrak{a} .$$

Si $a \neq 0$ et $b \neq 0$ sont deux éléments quelconques de $\mathfrak{a}$, on a

$$a\varphi_i(b) = \varphi_i(ab) , \qquad b\varphi_i(a) = \varphi_i(ba)$$

et donc

$$a^{-1}\varphi_i(a) = b^{-1}\varphi_i(b) \quad \text{pour tout } i .$$

L'élément $b_i = b^{-1}\varphi_i(b)$ ne dépend donc pas du choix de l'élément $b \in \mathfrak{a}$. Soit $\mathfrak{b} = (b_1, \ldots, b_n)A$ l'idéal fractionnaire engendré par les b_i. Comme

$$bb_i = \varphi_i(b) \in A \quad \text{pour tout } b \in \mathfrak{a} ,$$

alors $\mathfrak{a}b_i \subset A$ pour tout i, et donc $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subset A$. D'autre part

$$a = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(a)\, a_i = \sum_{i=1}^{n} ab_i\, a_i = a \sum_{i=1}^{n} b_i\, a_i$$

donc $\sum_{i=1}^{n} a_i\, b_i = 1$, donc, $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = A$. Ceci nous montre que $\mathfrak{a}$ est inversible. Supposons que $\mathfrak{a}$ soit inversible. Il existe un idéal fractionnaire $\mathfrak{b}$ de A tel que $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = A$, et donc

$$1 = \sum_{i=1}^{n} a_i\, b_i$$

(somme finie) où les $a_i \in \mathfrak{a}$ et les $b_i \in \mathfrak{b}$. Si $\mathfrak{a}' = (a_1, \ldots, a_n)A$ est l'idéal fractionnaire engendré par les a_i, on a

$$\mathfrak{a}' \subset \mathfrak{a} \quad \text{et} \quad \mathfrak{a}'\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}\mathfrak{b} = A \ .$$

La relation

$$1 = \sum_{i=1}^{n} a_i \, b_i$$

nous donne $\mathfrak{a}'\mathfrak{b} = A$, donc

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}(\mathfrak{a}'\mathfrak{b}) = \mathfrak{a}'(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = \mathfrak{a}' \ .$$

De même, on peut montrer que $\mathfrak{b} = (b_1 , \ldots , b_n) A$. Puisque $b_i \, \mathfrak{a} \subset A$ pour $i = 1 , \ldots , n$, on peut définir n formes linéaires φ_i sur $\mathfrak{a}$ en posant $\varphi_i(c) = b_i \, c$ pour tout c dans $\mathfrak{a}$. De plus,

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(c) \, a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i \, c a_i = c \sum_{i=1}^{n} b_i \, a_i = c$$

pour tout c dans $\mathfrak{a}$. Ceci nous montre que $\mathfrak{a}$ est un A-module projectif.

COROLLAIRE. - <u>Soient</u> A <u>un anneau de Dedekind et</u> $\mathfrak{a} \neq (0)$ <u>un idéal fractionnaire de</u> A . <u>Alors</u> $\mathfrak{a}$ <u>est un</u> A-<u>module projectif de type fini</u>.

En effet, dans un anneau de Dedekind, tout idéal fractionnaire non nul est inversible (cf. [10], vol. I, chap. V, § 6, théorème 12).

<u>Remarque</u>. - Dans un anneau de Dedekind, tout idéal entier a une base formée de deux éléments (cf. [10], vol. I, chap. V, § 7, corollaire 2 du théorème 16).

THÉORÈME 2. - <u>Dans un anneau de Dedekind</u> A , <u>pour tout idéal entier</u> $\mathfrak{a}$ <u>de</u> A , <u>l'algèbre symétrique</u> $S(\mathfrak{a})$ <u>est isomorphe à l'anneau de Rees</u> $R(\mathfrak{a})$ <u>de l'idéal</u> $\mathfrak{a}$.

Etant donnés un anneau A et un idéal $\mathfrak{a}$ de A , on appelle <u>anneau de Rees de l'idéal</u> $\mathfrak{a}$ (cf. [8]) le sous-anneau

$$R(\mathfrak{a}) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{a}^n X^n$$

de l'anneau de polynômes $A[X]$ formé des sommes finies $c_0 + c_1 X + \ldots + c_n X^n$ où $c_i \in \mathfrak{a}^i$ pour tout $i \geq 0$. On pose $\mathfrak{a}^0 = A$ et $\mathfrak{a}^1 = \mathfrak{a}$. L'homomorphisme $\varphi : \mathfrak{a} \to R(\mathfrak{a})$ défini par $\varphi(c) = cX$ pour tout $c \in \mathfrak{a}$ se prolonge en un homomorphisme

$$\overline{\varphi} : S(\mathfrak{a}) \to R(\mathfrak{a})$$

tel que si $\alpha : \mathfrak{a} \to S(\mathfrak{a})$ est l'injection canonique, alors

$$\overline{\varphi} \circ \alpha = \varphi \ .$$

On vérifie aisément que $\overline{\varphi}$ est un épimorphisme et si A est intègre, alors $\mathrm{Ker}(\overline{\varphi})$ est le sous-module de torsion de $S(\alpha)$ (cf. [6]). Si l'on suppose que A est de Dedekind et $\alpha \neq (0)$ (si $\alpha = (0)$ il n'y a rien à démontrer), alors α est un A-module projectif, donc $S(\alpha)$ est sans torsion. Il en résulte que $S(\alpha) = R(\alpha)$.

On peut encore démontrer ceci directement. En effet, si $\alpha \neq (0)$ et si A est de Dedekind, alors α est engendré par deux éléments a_1, a_2, et on peut écrire

$$S(\alpha) = A[X_1 , X_2]/q ,$$

où q est l'idéal de $A[X_1 , X_2]$ engendré par les $b_1 X_1 + b_2 X_2$ tels que $b_1 a_1 + b_2 a_2 = 0$. On considère l'épimorphisme

$$\psi : A[X_1 , X_2] \to R(\alpha)$$

défini par $\psi(X_i) = a_i X$ $(i = 1 , 2)$, et on voit que, pour tout polynôme homogène $f \in A[X_1 , X_2]$,

$$f \in \mathrm{Ker}(\psi) \iff f(a_1 , a_2) = 0 .$$

Ceci nous montre que $q \subset \mathrm{Ker}(\psi)$. Si $b_1 X_1 + b_2 X_2 \in \mathrm{Ker}(\psi)$, on a

$$0 = \psi(b_1 X_1 + b_2 X_2) = (b_1 a_1 + b_2 a_2)X ,$$

donc $b_1 a_1 + b_2 a_2 = 0$. Donc, tout polynôme de degré 1 de $\mathrm{Ker}(\psi)$ est dans q. Supposons ceci vrai pour tout polynôme homogène de degré $\leq q - 1$ de $\mathrm{Ker}(\psi)$ et soit $f \in \mathrm{Ker}(\psi)$ un polynôme homogène de degré q. On écrit

$$f = X_1 f_1(X_1 , X_2) + X_2 f_2(X_2)$$

et soit

$$g = X_1 f_1(a_1 , a_2) + X_2 f_2(a_2) .$$

Comme g est homogène de degré 1 et $g \in \mathrm{Ker}(\psi)$, alors $g \in q$. On peut écrire

$$f_2(a_2) f - f_2(X_2) g = (f_2(a_2) f_1(X_1 , X_2) - f_2(X_2) f_1(a_1 , a_2))X_1$$

et comme $f_2(a_2) f_1(X_1 , X_2) - f_2(X_2) f_1(a_1 , a_2)$ est homogène de degré $q - 1$ et est dans $\mathrm{Ker}(\psi)$, alors il est dans q. Il en résulte que $f_2(a_2) f \in q$ et comme q est un idéal premier et $f_2(a_2) \notin q$, alors $f \in q$.

Le théorème 2 peut se généraliser de la manière suivante :

THÉORÈME 2'. - Soient A un anneau intègre et α un idéal entier de A. Si α est un A-module projectif, alors $S(\alpha) = R(\alpha)$.

4. Un exemple.

Soient A un anneau et L un A-module libre. On sait (cf. [1]) que $S(L)$ est une algèbre de polynômes, et donc un A-module libre. On peut se demander, compte tenu de la proposition 1, si la réciproque de ce résultat est vraie. On va montrer qu'il n'en est pas ainsi, c'est-à-dire, on va donner un exemple d'un module projectif pas libre et tel que son algèbre symétrique soit un module libre. On remarque que cet exemple est donné en dehors de la "bonne catégorie", c'est-à-dire, de la catégorie des modules gradués. En effet, si $S(L)$ est un A-module libre en tant que module gradué, alors $S_1(L) = L$ est aussi libre. Tout d'abord on rappelle le lemme suivant :

LEMME 5. - Soient A un anneau de Dedekind et M un A-module projectif.

(i) Si M est de type fini et de rang $n+1$, $n \geqslant 0$, alors il existe un idéal entier α de A tel que $M = A^n \oplus \alpha$.

(ii) Si M n'est pas de type fini, alors M est libre [cf. N. BOURBAKI : Algèbre commutative, chap. VII : Anneaux de Dedekind (à paraître)].

Soient alors A un anneau de Dedekind, M un A-module projectif de type fini et rang $n+1$, $n \geqslant 0$. Il existe un idéal entier α de A tel que $M = A^n \oplus \alpha$. On suppose, de plus, que M n'est pas libre. Comme α est engendré par deux éléments a_1, a_2, alors

$$S(\alpha) = R(\alpha) = A[a_1 X , a_2 X] \quad \text{et} \quad S(A^n) = A[X_1 , \dots , X_n] .$$

Il en résulte que

$$S(M) = S(A^n) \otimes_A S(\alpha) = A[X_1 , \dots , X_n , a_1 X , a_2 X]$$

et comme M est un A-module projectif, il en est de même de $S(M)$. Etant donné que $S(M)$ n'est pas de type fini, alors il est libre.

5. Factorialité de l'algèbre symétrique d'un module projectif.

Soient A un anneau et L un A-module libre ayant une base finie $e_1, \dots, e_n$. Si $\beta : L \to S(L)$ est l'injection canonique et si $X_i = \beta(e_i)$ $(i = 1 , \dots , n)$, alors $S(L) = A[X_1 , \dots , X_n]$, anneau de polynômes dans les indéterminées X_i. D'après le théorème de Gauss, si A est factoriel, alors $S(L)$ est aussi factoriel. On peut se poser cette même question pour un module projectif. Plus précisément, on va démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 3. - Soient A un anneau factoriel et M un A-module projectif de type fini. Alors l'algèbre symétrique $S(M)$ est aussi un anneau factoriel.

Première démonstration. - Soient $M = (x_1, \ldots, x_n)A$, $B = A[X_1, \ldots, X_n]$ l'anneau de polynômes et $R = S(M)$. On sait que $R = B/q$ où q est l'idéal de B engendré par les formes linéaires

$$\sum_{i=1}^{m} b_i X_i \quad \text{telles que} \quad \sum_{i=1}^{n} b_i x_i = 0 .$$

On peut montrer qu'on a $B = R \oplus q$. Soit $\alpha = Rb \cap Rc$ un idéal de R, intersection de deux idéaux principaux. Comme B est un R-module plat, alors

$$\alpha B = Bb \cap Bc = Bd , \qquad \text{où } d = \text{p. p. c. m.}\ (b, c) \text{ dans } B .$$

On considère la décomposition (unique) de d, $d = e + f$, où $e \in R$, $f \in q$. On va montrer que $\alpha = Re$, et donc que R est factoriel. En effet, comme b, c divisent d dans B, alors b, c divisent e dans R, donc $Re \subset \alpha$. Si $u \in Bd \cap R$, on peut écrire $u = (x + g)(e + f)$ avec $u, x \in R$, $g \in q$. Donc, $u = xe$ et $gd + xf = 0$, c'est-à-dire, $u \in Re$. Les inclusions

$$Re \subset \alpha \subset \alpha B \cap R = Bd \cap R \subset Re$$

nous donnent

$$\alpha = Re .$$

Deuxième démonstration (P. SAMUEL). - On démontre tout d'abord le lemme suivant:

LEMME 6. - Soit

$$B = \sum_{n \geq 0} B_n$$

un anneau gradué factoriel. Alors B_0 est factoriel.

En effet, dans un anneau gradué factoriel, tout élément homogène $\neq 0$ est produit d'éléments premiers homogènes. Donc, tout élément $\neq 0$ de B_0 est produit d'éléments de B_0 qui sont premiers dans B, donc aussi dans B_0.

Démonstration du théorème 3. - Comme M est un A-module projectif de type fini, il existe un A-module projectif M' et un A-module libre L, tous les deux de type fini, tels que $M \oplus M' = L$. Donc, $S(L) = S(M) \otimes_A S(M')$. On va munir $S(L)$, qui est factoriel en tant qu'anneau de polynômes sur A, de la graduation venant de $S(M')$, c'est-à-dire

$$S(L)_n = S(M) \otimes_A S_n(M') \quad \text{pour tout } n \geq 0 .$$

Alors,

$$S(L) = S(M) \otimes_A S_0(M') = S(M) \otimes_A A = S(M)$$

et d'après le lemme 6, $S(M)$ est factoriel.

THÉORÈME 4. - Soient A un anneau et $\mathfrak{a}$ un idéal de A. Si $S(\mathfrak{a})$ est factoriel, alors A est factoriel et $\mathfrak{a}$ est principal (P. SAMUEL).

En effet, comme $S(\mathfrak{a})$ est factoriel, d'après le lemme 6, il en est de même de $A = S_0(\mathfrak{a})$. Comme $S(\mathfrak{a})$ est intègre, c'est l'anneau de Rees

$$R(\mathfrak{a}) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{a}^n X^n \subset A[X] .$$

Il existe un élément $a \in \mathfrak{a}$ tel que, aucun diviseur strict de a ne soit dans $\mathfrak{a}$. Alors l'élément aX de $S(\mathfrak{a})$ est irréductible dans $S(\mathfrak{a})$, donc premier. Pour tout élément $b \in \mathfrak{a}$, on a $b(aX) - a(bX) = 0$ et comme aX est premier et ne divise pas a dans $S(\mathfrak{a})$ (sinon $0 \geqslant d^0(a) \geqslant d^0(aT) = 1$), il divise bX. Le quotient x est dans A (homogène de degré 0). Donc $bX = x(aX)$, d'où $b = xa$, c'est-à-dire, $\mathfrak{a} = Aa$.

Dans [9], SAMUEL a donné un exemple d'un module projectif pas libre sur un anneau factoriel. Soient, en effet,

$$A = \underset{\sim}{R}[x , y , z]$$

avec la relation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ et M le A-module engendré par les éléments x', y', z' liés par la relation $xx' + yy' + zz' = 0$ (module des différentielles). On peut montrer que A est factoriel et que M est un A-module projectif pas libre. Alors $S(M)$ est factoriel. D'ailleurs, dans ce cas particulier, on peut vérifier cela autrement. En effet, soit

$$S = \{1 , z , z^2 , \dots\}$$

la partie multiplicative de A formée par les puissances de l'élément premier z de A. La relation

$$xx' + yy' + zz' = 0$$

nous donne

$$S^{-1}(S(M)) = (S^{-1} A)[x' , y')$$

et comme A est factoriel, il en est de même de $S^{-1}(S(M))$. D'après le théorème de Nagata, $S(M)$ est factoriel.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI (Nicolas). - Algèbre, Chapitre 3, 2e édition. - Paris, Hermann, 1958 (Act. scient. et ind., 1044 ; Bourbaki, 7).

[2] BOURBAKI (Nicolas). - Algèbre commutative, Chapitres 1 et 2. - Paris, Hermann, 1961 (Act. scient. et ind., 1290 ; Bourbaki, 27).

[3] CARTIER (Pierre). - Questions de rationalité des diviseurs en géométrie algébrique , Bull. Soc. math. France, t. 86, 1958, p. 177-261 (Thèse Sc. math. Paris. 1958).

[4] CHEVALLEY (Claude). - Fundamental concepts of algebra. - New York, Academic Press, 1956 (Pure and applied Mathematics. A Series of Monographs and Textbooks, 7).

[5] KOSZUL (Jean-Louis). - Algebra multilinear. - São Paulo, Sociedade de Matematica de São Paulo, 1956.

[6] MICALI (Artibano). - Algèbre symétrique d'un idéal, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 251, 1960, p. 1954-1956.

[7] MICALI (Artibano). - Sur les algèbres symétrique et extérieure d'un module projectif, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 255, 1962, p. 2871-2873.

[8] REES (D.). - Two classical theorems of ideal theory, Proc. Cambr. phil. Soc., t. 52, 1956, p. 155-157.

[9] SAMUEL (Pierre). - Sur les anneaux factoriels, Bull. Soc. math. France, t. 89, 1961, p. 155-173.

[10] ZARISKI (O.) and SAMUEL (P.). - Commutative algebra, Vol. 1. - Princeton, D. Van Nostrand, 1958 (The University Series in higher Mathematics).