Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Thomas S. Blyth

Groupoïdes résidués et demi-groupes nomaux

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 16, nº 2 (1962-1963), exp. nº 24, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1962-1963__16_2_A10_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
16e année, 1962/63, n° 24

13 mai 1963

GROUPOÏDES RÉSIDUÉS ET DEMI-GROUPES NOMAUX

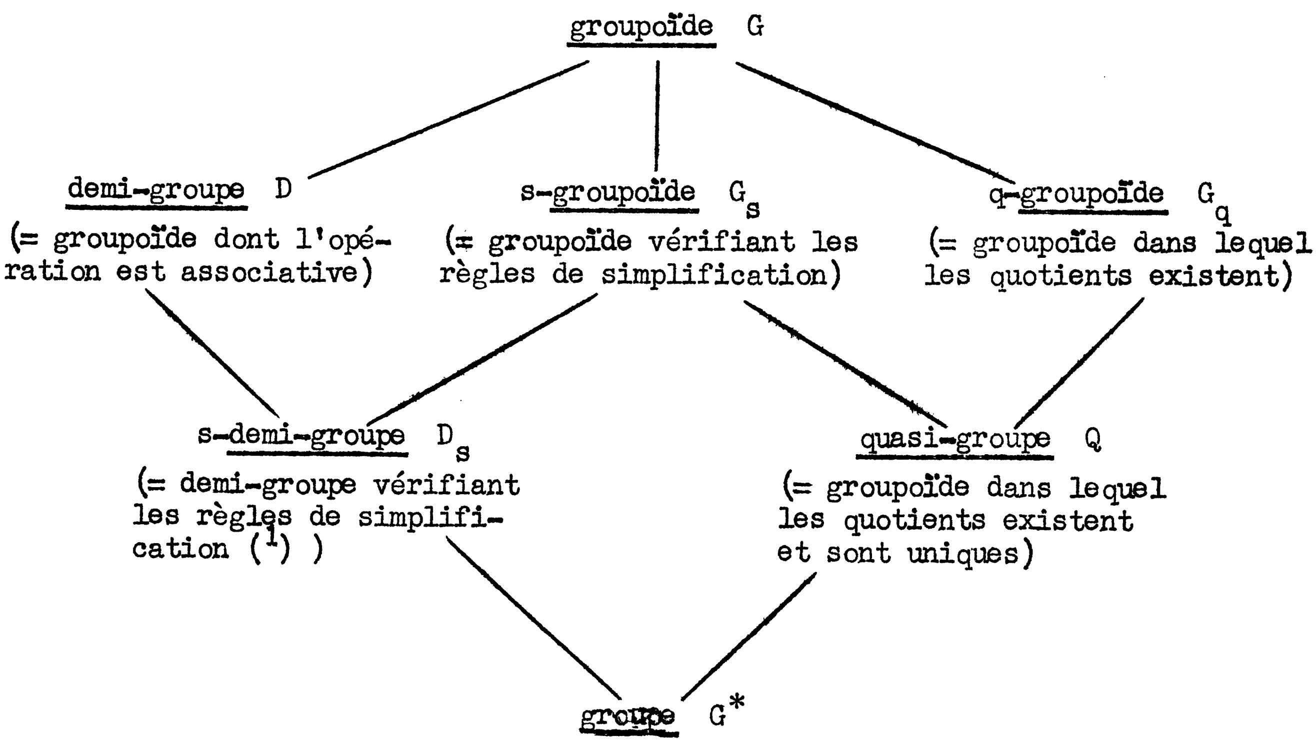
par Thomas S. BLYTH

Cet exposé est essentiellement un résumé des trois premiers chapitres de [1], mémoire auquel nous renvoyons pour une étude plus détaillée. Une partie des résultats que nous présentons ici a fait l'objet de deux notes aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (cf. [2], [3]).

Au paragraphe 1, nous essayons de caractériser la structure d'ensemble partiellement ordonné d'un groupoïde (non nécessairement commutatif) résidué. Le paragraphe 2 consiste en l'étude d'éléments particuliers d'un groupoïde résidué.

1. Structure ordonnée des groupoïdes résidués.

Considérons le tableau des structures algébriques classiques suivant :



(1) Un " s-demi-groupe" est un "semi-groupe" au sens où on le rencontre dans la littérature.

D'autre part, nous savons que chaque ensemble partiellement ordonné peut être représenté par un diagramme de Hasse dont l'interprétation est la suivante : si a et b sont deux éléments de l'ensemble ordonné, $a < b$, si et seulement si a peut être joint à b, dans le diagramme de Hasse correspondant, par un trait croissant. En général, un diagramme de Hasse est la réunion de "parties détachées" que nous allons caractériser, et auxquelles nous nous intéresserons.

Définissons, dans un ensemble partiellement ordonné P, la relation binaire R suivante :

$$a \equiv b \quad (R)$$

si et seulement s'il existe dans P un ensemble fini $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ tel qu'en posant $a_1 = a$ et $a_n = b$, on ait :

$$a_i \not\parallel a_{i+1} \qquad (i = 1, 2, \dots, n-1) \quad (^2).$$

Il est évident que R est une relation d'équivalence. Les classes modulo R sont, alors, les "parties détachées" du diagramme de Hasse de l'ensemble ordonné P.

Nous avons le théorème suivant :

THÉORÈME 1. - *Dans un groupoïde ordonné* G *la relation d'équivalence* R *est compatible avec l'opération de* G.

Ce dernier résultat est une conséquence immédiate de l'isotonie de l'opération de G. Si l'on suppose, de plus, que G est résidué, les propriétés classiques de la résiduation (3) conduisent aux résultats suivants :

THÉORÈME 2. - *Dans un groupoïde résidué, la relation d'équivalence* R *est compatible avec la résiduation.*

THÉORÈME 3. - *Si le groupoïde ordonné* G *est résidué, le groupoïde* G/R *est un quasi-groupe (homomorphe à* G *).*

COROLLAIRE. - *Si* D *est un demi-groupe résidué, alors* D/R *est un groupe (homomorphe à* D *).*

---

(2) $x \not\parallel y$ signifie, ici, que x est comparable à y ; c'est-à-dire que $x \leq y$ ou $y \leq x$.

(3) Voir I. MOLINARO ([6], chap. I).

Dans l'étude des structures algébriques résiduées, nous sommes amenés à considérer des éléments <u>extrémaux</u>, c'est-à-dire des éléments maximaux ou minimaux, D . Ces éléments nous permettent de donner la forme générale des groupoïdes résidués, forme que nous résumons dans le théorème suivant :

THÉORÈME 4. - <u>Si le groupoïde ordonné</u> G <u>est résidué, l'une des conditions suivantes est vérifiée</u> :

1° <u>chaque classe</u> modulo R <u>possède un élément maximum et un élément minimum</u> ;

2° <u>chaque classe</u> modulo R <u>possède un élément maximum et aucune classe</u> modulo R <u>ne possède d'élément minimal</u> ;

3° <u>aucune classe</u> modulo R <u>ne possède d'élément maximal</u>.

Il est à remarquer qu'il ne nous a pas été possible de construire un exemple de groupoïde résidué, sans élément maximal, dans lequel existent des éléments minimaux. Or, on peut démontrer que l'existence d'un élément minimal, dans un demi-groupe résidué D entraîne l'existence d'un élément maximal dans D ; le problème correspondant reste donc ouvert pour les groupoïdes. On peut, cependant, établir le résultat suivant :

THÉORÈME 5.- <u>Si le groupoïde résidué</u> G <u>possède un élément minimal, chaque classe</u> modulo R <u>est un ensemble filtrant supérieurement</u>.

Les relations d'équivalence des types A , B et F , introduites et étudiées par I. MOLINARO (loco citato), jouent un rôle important dans la théorie de la résiduation. Toutes ces relations d'équivalences sont plus fines que R et le résultat, décrit dans le théorème 6 suivant, montre qu'une condition nécessaire et suffisante pour que R soit une équivalence de fermeture (au sens de J. QUERRÉ, [7], [8]), dans un groupoïde résidué G , est que G possède un élément maximal :

THÉORÈME 6. - <u>Pour qu'un groupoïde résidué</u> G <u>possède un élément</u> x <u>tel que</u> $R = A_x$ $(= {}_xA)$ <u>il faut et il suffit que</u> G <u>possède un élément maximal</u>.

Dans le cas d'un demi-groupe résidué, nous avons le résultat suivant :

THÉORÈME 7. - <u>Pour qu'un demi-groupe résidué</u> D <u>possède un élément minimal, il faut et il suffit qu'il existe un élément</u> $c \in D$ <u>tel que</u> $R = F_c$ $(= {}_cF)$.

On peut démontrer, à l'aide du théorème 7, que l'existence d'un élément minimal, dans un demi-groupe résidué, entraîne l'existence d'un élément maximal ; on en déduit la forme générale des demi-groupes résidués :

THÉORÈME 8. - Si le demi-groupe D est résidué, l'une des conditions suivantes est satisfaite :

1° chaque classe modulo R possède un élément maximum et un élément minimum ;

2° chaque classe modulo R possède un élément maximum et aucune classe modulo R ne possède d'élément minimal ;

3° aucune classe modulo R ne possède d'élément maximal ni d'élément minimal.

On démontre, en utilisant le théorème 5, qu'un s-groupoïde résidué G_s ne peut avoir d'élément minimal sans que la relation d'équivalence R ne se réduise à l'égalité. On a donc :

THÉORÈME 9. - Si le s-groupoïde G_s est résidué, l'une des conditions suivantes est vérifiée :

1° La relation d'équivalence R se réduit à l'égalité (4) ;

2° Chaque classe modulo R possède un élément maximum et aucune classe modulo R ne possède d'élément minimal ;

Dans le cas d'un q-groupoïde résidué G_q, on démontre que si G_q possède un élément maximal, il possède un élément minimal ; de plus, si G_q possède un élément minimal, la relation d'équivalence R est l'égalité. Il en résulte alors :

THÉORÈME 10. - Si le q-groupoïde G_q est résidué, l'une des condition suivantes est satisfaite :

1° La relation d'équivalence R est l'égalité ;

2° Aucune classe modulo R ne possède d'élément maximal ni d'élément minimal.

On obtient pour les s-demi-groupes résidués (resp. les quasi-groupes résidués) un théorème analogue au théorème 9 (resp. au théorème 10).

Signalons aussi les résultats suivants :

THÉORÈME 11. - Pour qu'un groupoïde résidué G soit un quasi-groupe, il faut et il suffit que toute relation d'équivalence des types B et F, définie dans G, se réduise à l'égalité.

---

(4) G_s est, alors, d'après le théorème 3, un quasi-groupe et l'on a : $a \leq b \rightleftarrows a = b$.

THÉORÈME 12. - Tout quasi-groupe résidué est dual.

THÉORÈME 13. - Tout quasi-groupe demi-réticulé (5) est résidué et, par suite, est réticulé.

Rappelons qu'un groupe ordonné G^* est résidué ; la résiduation y étant définie par : $a \mathbin{.\!^{\bullet}} b = b^{-1} a$ et $a \mathbin{^{\bullet}\!.} b = ab^{-1}$. Un théorème, analogue au théorème 10, détermine la forme générale des groupes ordonnés.

Nous avons obtenu les propriétés suivantes concernant la relation d'équivalence R et les relations d'équivalence nomales de I. MOLINARO et J. QUERRÉ, dans un demi-groupe résidué :

THÉORÈME 14. - Pour que, dans un demi-groupe résidué D, la relation d'équivalence R coïncide avec la relation d'équivalence A-nomale, il faut et il suffit que D possède un élément maximal.

THÉORÈME 15. - Pour que, dans un demi-groupe résidué D, la relation d'équivalence R coïncide avec la relation d'équivalence B-nomale, il faut et il suffit que D possède un élément minimal.

On déduit, de ces résultats, que tout demi-groupe résidué D possédant un élément maximal (resp. minimal) est A-nomalement fermé (resp. B-nomalement fermé).

2. Quelques types d'éléments d'un groupoïde résidué.

DÉFINITION 1. - L'élément a d'un groupoïde résidué G est dit

1° équirésiduel si $a \mathbin{.\!^{\bullet}} x = a \mathbin{^{\bullet}\!.} x$, $\forall\ x \in G$

2° de type α si $x \mathbin{.\!^{\bullet}} a = x \mathbin{^{\bullet}\!.} a$, $\forall\ x \in G$

3° de type β si $a \mathbin{.\!^{\bullet}} x = x \mathbin{^{\bullet}\!.} a$, $\forall\ x \in G$

4° de type γ si $x \mathbin{.\!^{\bullet}} a = a \mathbin{^{\bullet}\!.} x$, $\forall\ x \in G$

5° de type δ si $a \mathbin{.\!^{\bullet}} x = x \mathbin{.\!^{\bullet}} a$, $\forall\ x \in G$

6° de type ε si $a \mathbin{^{\bullet}\!.} x = x \mathbin{^{\bullet}\!.} a$, $\forall\ x \in G$.

On peut montrer, par des exemples, que ces six types d'éléments sont deux à deux distincts. Mais, lorsque G possède des propriétés supplémentaires, certains de ces types coïncident. D'autre part, plusieurs structures résiduées peuvent contenir les mêmes éléments particuliers, donnés à l'avance.

---

(5) Voir M.-L. DUBREIL-JACOTIN, L. LESIEUR et R. CROISOT [4].

Il reste à résoudre le problème suivant : à quelles conditions, nécessaires et suffisantes, un élément d'un groupoïde résidué G est-il équirésiduel ? On peut, toutefois, affirmer que si la classe $A \in G/R$ ne figure pas symétriquement dans le tableau de multiplication de G/R, A ne possède pas d'élément équirésiduel. Lorsqu'il s'agit d'un demi-groupe résidué D, si la classe $A \in D/R$ n'appartient pas au centre de D/R, A ne possède pas d'élément équirésiduel. On a, encore, le résultat suivant :

THÉORÈME 16. - Pour que, dans un demi-groupe A-nomal D, un élément A-nomal α soit équirésiduel, il faut et il suffit que la classe de α modulo la relation d'équivalence A-nomale A_ε appartienne au centre de D/A_ε.

Ceci nous montre pourquoi, dans la généralisation partielle des travaux sur la propriété d'A-nomalité de I. MOLINARO, qu'il a donnée dans [8], G. MAURY a supposé que le groupe d'Artin D/A_ε était abélien.

Pour les éléments des types α, β, γ, δ et ε, nous avons :

THÉORÈME 17. - L'élément a du groupoïde résidué G est du type α si et seulement s'il appartient au centre de G.

THÉORÈME 18. - Soit A une classe modulo R du groupoïde résidué G. Un élément $a \in A$ est du type β si et seulement si les trois conditions suivantes sont satisfaites :

1° chaque classe modulo R contient un élément maximum et un élément minimum ;

2° si $B, C \in G/R$ et si $BC = A$, on a $CA = B$

3° si $\bar{\beta}$ et $\bar{\gamma}$ sont des éléments maximaux de G et si $\bar{\beta}\cdot\bar{\gamma} \in A$, on a : $\bar{\beta}\cdot\bar{\gamma} \leq a$

4° quel que soit $x \in G$, xa est un élément minimal de G.

Il y a, bien entendu, des théorèmes analogues pour les éléments des types γ, δ et ε.

On peut caractériser les éléments des types β, γ, δ et ε d'un demi-groupe résidué au moyen de la nomalité :

THÉORÈME 19. - Un élément a d'un demi-groupe résidué D est du type β si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

1° a est B-nomaloïde à gauche et A-nomaloïde ;

2° Le groupe d'Artin D/A_ε est involutif.

Du théorème 19, il résulte qu'un élément d'un demi-groupe résidué est du type β [resp. γ] si et seulement s'il est du type ε [resp. δ] ; alors, dans chacun de ces deux cas, cet élément est équirésiduel.

De plus, on peut démontrer que si, dans un demi-groupe unitaire résidué D, un élément α, appartenant à une classe A modulo R, est de l'un des types β, γ, δ ou ε, alors A est réduite à un seul élément, et a est un élément équirésiduel des types α, β, γ, δ et ε.

Nous dirons qu'un élément a d'un demi-groupe unitaire D est d'ordre fini s'il existe un plus petit entier naturel n (l'ordre de a) pour lequel $a^n = e$, où e est l'élément unité de D. Nous avons, alors :

THÉORÈME 20. - *Si l'élément* a *d'un demi-groupe unitaire résidué* D *est d'ordre fini, les relations d'équivalence* $\underset{a}{F_{\lambda}}$, ${}_{a}\lambda^{F}$, $\underset{a}{B_{\lambda}}$ *et* ${}_{a}\lambda^{B}$ *se réduisent, quel que soit* λ, *à l'égalité*.

En manière de corollaire, nous pouvons dire que si D n'est pas un groupe, il ne possède pas d'élément d'ordre fini d'un des types β, γ, δ où ε. De plus, si tous les éléments de D sont d'ordre fini, D est un groupe, en vertu des théorèmes 11 et 20.

THÉORÈME 21. - *Les conditions suivantes sont équivalentes et sont nécessaires et suffisantes pour que l'élément* a *d'un demi-groupe unitaire résidué* D *satisfasse à :* $a^n = e$.

(i) $$x \mathbin{.\!\cdot} a^{\lambda} = a^{\mu} x$$

(ii) $$x \mathbin{^{\circ}\!.} a^{\lambda} = x a^{\mu}$$

quels que soient λ *et* μ *tels que* $\lambda + \mu = n$, *et quel que soit* $x \in D$.

DÉFINITION 2. - Un élément a d'un groupoïde résidué unitaire G est dit r-*ovoïde* si $a = e \mathbin{.^{\circ}} (e \mathbin{.\!\cdot} a)$ et ℓ-*ovoïde* si $a = e \mathbin{\cdot\!.} (e \mathbin{\cdot\!.} a)$, où e est l'élément unité de G.

THÉORÈME 22. - *Toute puissance d'un élément d'ordre fini d'un demi-groupe unitaire est, à la fois,* r-*ovoïde et* ℓ-*ovoïde*.

Dans un demi-groupe *intégralement fermé* D, c'est-à-dire dans un demi-groupe D tel que $x \mathbin{.\!\cdot} x = x \mathbin{\cdot\!.} x = e$ quel que soit $x \in D$, les conditions suivantes, pour un élément $a \in D$, sont équivalentes :

(i) a est r-ovoïde ;

(ii) a est ℓ-ovoïde ;

(iii) a est A-nomal.

Par suite, dans un tel demi-groupe, les seuls éléments d'ordre fini sont les éléments A-nomaux ; si, de plus, les éléments A-nomaux de D forment une chaîne, l'élément unité e est le seul élément d'ordre fini de D .

BIBLIOGRAPHIE

[1] BLYTH (Thomas S.). - Contribution à la théorie de la résiduation dans les structures algébriques ordonnées, Annali di Mat. (à paraître) (Thèse Sc. math. Paris, 1963).

[2] BLYTH (Thomas S.). - La forme générale des structures algébriques résiduées, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 254, 1962, p. 2112-2114.

[3] BLYTH (Thomas S.). - La forme générale des structures algébriques résiduées, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 254, 1962, p. 2506-2508.

[4] DUBREIL-JACOTIN (M.-L.), LESIEUR (L.) et CROISOT (R.). - Leçons sur la théorie des treillis, des structures algébriques ordonnées et des treillis géométriques. - Paris, Gauthier-Villars, 1953 (Cahiers scientifiques, 21).

[5] MAURY (Guy). - La condition "intégralement clos" dans quelques structures algébriques, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., t. 78, 1961, p. 31-100 (Thèse Sc. math. Paris, 1960).

[6] MOLINARO (Italico). - Demi-groupes résidutifs, J. Math. pures et appl., Série 9, t. 39, 1960, p. 319-356 (Thèse Sc. math. Paris, 1956).

[7] QUERRÉ (Julien). - Equivalences de fermeture dans un demi-groupe résidutif, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et Théorie des nombres, t. 15, 1961/62, n° 3, 31 p.

[8] QUERRÉ (Julien). - Contribution à la théorie des structures ordonnées et des systèmes d'idéaux, Annali di Mat. pura ed appl., Série 4, t. 66, 1964, p. 265-389 (Thèse Sc. math. Paris, 1963).