Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres

MAURICE KOSKAS

Contribution à l'étude des groupoïdes. Demi-hypergroupes

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 16, nº 1 (1962-1963), exp. nº 9, p. 1-26

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1962-1963__16_1_A9_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
16e année, 1962/63, n° 9

21 janvier 1963

CONTRIBUTION À L'ÉTUDE DES GROUPOÏDES. DEMI-HYPERGROUPES,

par Maurice KOSKAS

Cet exposé comprend deux parties, liées par la notion de loi de composition multivoque.

Dans une première partie, nous exposons comment certaines propriétés d'un groupoïde peuvent être étudiées par des méthodes propres aux demi-groupes. Nous introduisons d'autre part un type de groupoïde qui généralise les quasi-groupes.

Dans une seconde partie, nous étudions les hypergroupes et demi-hypergroupes, lesquels sont des ensembles munis d'une loi de composition multivoque vérifiant certaines propriétés. Nous introduisons dans ces ensembles les notions de résiduation, équivalences principales, etc., et nous généralisons un certain nombre de résultats de la théorie des demi-groupes. Ces résultats peuvent, du reste, s'appliquer à l'étude d'un groupoïde.

Dans le prochain exposé, nous étudierons la notion d'hypertas : un hypertas est un ensemble muni d'un demi-groupe d'applications multivoques. (Nous adoptons la terminologie de P. GRILLET qui a étudié la notion de tas.)

La notion d'hypertas est fort générale : elle peut s'appliquer à l'étude des demi-groupes, des demi-hypergroupes, des groupoïdes, des espaces homogènes, ainsi qu'a celle des ensembles munis de relations binaires transitives (ordre, équivalence etc.). L'étude de cette structure nous permettra de donner une théorie unique des équivalences régulières, ou simplifiables d'un demi-groupe, ou demi-hypergroupe. De plus, comme nous le verrons, son emploi judicieux permet, d'une part de comprendre certaines hypothèses apparemment arbitraires faites en théorie des demi-groupes, d'expliquer certaines difficultés qui apparaissent dans cette théorie, enfin de découvrir des résultats nouveaux en théorie des demi-groupes.

Bien entendu, le second exposé permettra aussi de retrouver, dans une certaine mesure, les résultats énoncés dans celui-ci.

Première partie : Les groupoïdes.

1. Complexes associatifs d'un groupoïde.

Définition. - Soit G un groupoïde. On dira qu'un complexe A de G est associatif, si chaque fois qu'un produit d'éléments $a_1 \dots a_n$ appartient à A, tous les produits des a_i, quel que soit l'emplacement des parenthèses, appartiennent à A. (On aura en particulier : $a(bc) \in A \Longrightarrow a(bc) \in A$.) Nous noterons $\mathfrak{a}$ la famille des complexes associatifs de G, à laquelle on adjoint la partie vide.

THÉORÈME 1. - $\mathfrak{a}$ est un sous-treillis complémenté du treillis $P(G)$. En particulier $\mathfrak{a}$ est une $\cap$-famille de Moore. Si on désigne par Θ la fermeture de Moore associée à $\mathfrak{a}$ (Θ est appelée fermeture associative de G), on a :

$$y \in \Theta(x) \iff x \in \Theta(y) \qquad (\forall\ x, y \in G)$$

$$\Theta(A) = \bigcup_{x \in A} \Theta x, \qquad \forall\ A \text{ complexe de } G$$

$$\Theta(A) = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \quad \text{avec} \quad A_0 = A_1 \dots A_n = \{x \in G,\ x = \prod_g x_i\ ;\ \prod_{g'} x_i \in A_{n-1}\} \ [1]$$

$$\Theta(ax) \supsetneq a\,\Theta x\ ; \qquad \Theta(xa) \supseteq \Theta(x)\ a\ .$$

La démonstration de la dernière assertion est immédiate si l'on remarque que

$$A \in \mathfrak{a} \text{ et } B \subseteq G \Longrightarrow A \mathbin{\circ}^{\circ} B \in \mathfrak{a}\ .$$

PROPOSITION 2. - Si A est un sous-groupoïde, $\Theta(A)$ en est un aussi.

Exemple de complexe associatif. - Soit E un ensemble ordonné, soit 0 un élément quelconque, soit $\overline{E} = E \cup (0)$. Nous prolongeons l'ordre de E à $\overline{E}$ en convenant que 0 est élément maximum de $\overline{E}$.

Ceci dit, nous posons, si $x, y \in \overline{E}$,

$$xy = \begin{cases} \sup(xy) & \text{si } x \text{ et } y \text{ sont comparables} \\ 0 & \text{si } x \text{ et } y \text{ ne sont pas comparables.} \end{cases}$$

Notons que l'on a : $x.0 = 0.x = 0$; $xy = yx$; $x^2 = x$. Ainsi $\overline{E}$ est muni d'une structure de groupoïde. Nous voudrions étudier les complexes associatifs de ce groupoïde $\overline{E}$.

---

[1] Etant donnés $x_1 \dots x_n$ des éléments de G, $\prod_g x_i$ désigne un produit des x_i, pour un choix particulier, noté g, des parenthèses.

Soit

$$M = \left\{ z \in \overline{E} \; ; \; \exists \; x \, , \, y \in \overline{E} \; : \; \begin{matrix} x \leq z \\ y \leq z \end{matrix} \, , \, xy = 0 \right\}$$

Il est clair que M est un complexe de $\overline{E}$, car $0 \in M$.

Nous poserons d'autre part :

$$\mathfrak{M} = \{ m \in \overline{E} \, , \; m \text{ minimal dans } \overline{E} \} .$$

$\mathfrak{M}$ peut être vide ; on a : $\mathfrak{M} \cap M = \emptyset$.

PROPOSITION 3. – M est un complexe associatif de $\overline{E}$; tout complexe associatif de $\overline{E}$ contenant 0, contient M. Tout complexe contenu dans $\mathfrak{M}$ est associatif.

Définition. – On dira que $\mathfrak{M}$ est séparante si

$$x < y \implies \exists \; m \in \mathfrak{M} \text{ avec } m \not\leq x \, , \; m \leq y \, .$$

PROPOSITION 4. – Si $\mathfrak{M}$ est séparante, on a : $\overline{E} = M \cup \mathfrak{M}$. Tout complexe associatif de $\overline{E}$ est, soit de la forme $M \cup A$ avec $A \subseteq \mathfrak{M}$, soit de la forme $A \subseteq \mathfrak{M}$.

PROPOSITION 5. – Les propriétés suivantes sont équivalentes :

a. $E = M \cup \mathfrak{M}$,

b. tout complexe associatif de $\overline{E}$ est de la forme $M \cup A$ ou A, avec $A \subseteq \mathfrak{M}$,

c. tout complexe associatif de $\overline{E}$ non contenu dans $\mathfrak{M}$, contient 0.

Remarques. – Si on a $E = M \cup \mathfrak{M}$, la fermeture associative d'un complexe A est

$$\mathcal{O}(A) = \begin{cases} A \cup M & \text{si } A \not\subseteq M \\ A & \text{si } A \subseteq \mathfrak{M} \end{cases}$$

2. Eléments associatifs.

Définition. – On dira qu'un élément a d'un groupoïde G est un élément associatif de G, si chaque fois que a figure parmi les facteurs $a_1 \dots a_n$ d'un produit, ce produit est indépendant des parenthèses.

PROPOSITION 6. – L'ensemble des éléments associatifs d'un groupoïde est un idéal et un sous-demi-groupe de ce groupoïde. Etant donné un demi-groupe D, il existe un groupoïde G qui n'est pas un demi-groupe, et dont l'ensemble des éléments associatifs est D.

Remarque. - Dans un quasi-groupe, il n'existe pas d'éléments associatifs.

3. Equivalences associatives.

Définition. - Une équivalence $\mathcal{R}$ est associative si, quels que soient $a_1 \dots a_n$ éléments de G et les groupements de parenthèses g, g', on a :

$$\prod_g a_i \equiv \prod_{g'} a_i \quad (\mathcal{R})$$

(on a en particulier : $(ab)\,c \equiv a(bc) \quad (\mathcal{R})$).

PROPOSITION 7. - Soit $\mathcal{R}$ une équivalence régulière ; pour que $\mathcal{R}$ soit associative, il faut et il suffit que $G/\mathcal{R}$ soit un demi-groupe.

PROPOSITION 8. - L'ensemble des équivalences associatives et régulières de G est une $\cap$-famille de Moore, donc un treillis complet, dont le plus grossier élément est l'équivalence universelle.

Détermination de la plus fine équivalence associative et régulière de G.

PROPOSITION 9. - Soit ρ l'équivalence définie sur G de la façon suivante :

$$x \rho y \iff \forall\ A \in \mathfrak{A}\,,\quad x \in A \iff y \in A$$

ρ est la plus fine équivalence associative et régulière de G.

La classe de x modulo ρ est $\mathcal{O}x$.

On a de plus

$$x \rho y \iff \mathcal{O}x = \mathcal{O}y \iff x \in \mathcal{O}y\,.$$

Exemples d'équivalences associatives et régulières.

PROPOSITION 10. - Soit S un sous-groupoïde de G central à droite ($rS \subseteq Sr$, $\forall\ r \in G$), contenu dans l'idéal des éléments associatifs de G.

Soit I_S l'équivalence définie sur G par :

$$x\, I_S\, y \iff \exists\ s\,,\ s' \in S\ ;\quad sx = s'y\,.$$

I_S est associative et régulière à droite.

THÉORÈME 11. - Soit S un sous-groupoïde de G, net, unitaire, réflectif et associatif ; alors on a

$$\mathcal{R}_S = {}_S\mathcal{R} = \mathcal{R}\,.$$

$\mathcal{R}$ est associative et régulière. De plus $G/\mathcal{R}$ est un groupe. Inversement, tout groupe homomorphe à G s'obtient par ce procédé.

Remarques.

Le théorème 11 généralise un théorème de P. DUBREIL bien connu.

On peut étudier aisément la famille des complexes associatifs, réflectifs, unitaires, éventuellement nets.

4. Une classe de groupoïdes généralisant les quasi-groupes.

Soit G un quasi-groupe, dont ρ est la plus fine équivalence régulière. Il est clair que G/ρ est un groupe. On peut étudier les groupoïdes G qui sont tels que G/ρ soit un groupe. Nous les appellerons des pseudo-quasi-groupes.

THÉORÈME 12. - Soit G un groupoïde. Les conditions suivantes sont équivalentes:

a. G est un pseudo-quasi-groupe.

b. Il existe un complexe associatif minimal X, qui est un sous-groupoïde net, unitaire, réflectif, et tel que $X : u$ soit associatif minimal, $\forall\ u \in D$.

c. Toute équivalence associative et régulière d'un côté est simplifiable du même côté, et réciproquement.

d. Tout complexe associatif de G est net.

La démonstration de ce théorème est basée sur le théorème 11 et sur la caractérisation des groupes donnée par G. THIERRIN.

Remarque. - Etant donné un pseudo-quasi-groupe G, le complexe X du théorème 12, est entièrement déterminé et s'appelle complexe unitif de G. On a plus précisément

$$x \in X \iff \exists\ u \in G : xu\,\rho\,x \iff xu\,\rho\,x \text{ et } x\,\rho\,ux, \ \forall\ u \in G .$$

G. MATTENET a donné une autre caractérisation de X, lorsque G est un quasi-groupe.

PROPOSITION 13. - Tout image homomorphe d'un pseudo-quasi-groupe est un pseudo-quasi-groupe.

Equivalences associatives et régulières dans un pseudo-quasi-groupe.

THÉORÈME 14. - Soit G un pseudo-quasi-groupe, dont H est un sous-groupoïde associatif et unitaire d'un côté. Posons

$$x\,\mathcal{a}_H\,y \iff x \in \Theta(Hy)$$

(Θ est la fermeture associative de G).

$\mathcal{a}_H$ est l'équivalence associative et régulière à droite la plus générale de G ; H en est une classe ; enfin on a $\mathcal{a}_H = \mathcal{R}_H$. D'autre part, si H est de plus réflectif, on a $\mathcal{R} = \mathcal{R}_H = {}_H\mathcal{R} = \mathcal{a}_H = {}_H\mathcal{a}$; $\mathcal{R}$ est l'équivalence associative, régulière la plus générale de G .

5. Compléments sur les quasi-groupes.

Dans ce paragraphe, nous allons donner quelques compléments applicables quand G est un quasi-groupe.

Déterminons tout d'abord la fermeture associative Θ .

THÉORÈME 15 (MATTENET-KOSKAS). - Soit G un quasi-groupe, dont X est le complexe unitif, et A un complexe quelconque. On a $\Theta(A) = AX = XA$.

En particulier $\Theta(x) = Xx = xX =$ classe de x modulo ρ .

<u>Démonstration</u>. - Montrons que l'on a $\Theta(x) = Xx = xX$.

On a $y \in \Theta(x) \implies y\rho x$, mais on peut écrire $y = xs$. On a $xs\,\rho\,x \implies s \in X$. Donc $y \in xX$. La réciproque est triviale.

Dans les corollaires qui suivent, G est un quasi-groupe-fixé.

COROLLAIRE 15.1. - Les complexes associatifs de G sont les complexes A de G qui vérifient $AX \subseteq A$.

COROLLAIRE 15.2. - Si A est un complexe associatif de G , il en est de même de Ax et de xA ; plus généralement, si B est un complexe de G , AB est associatif. En effet on a

$$\Theta(Ax) = \Theta(A)\;x = Ax$$

(on montre que, G étant un quasi-groupe, on a : $\Theta(ax) = \Theta(a)\;x$).

COROLLAIRE 15.3. - Soit A un complexe associatif de G . A est un élément associatif du groupoïde $\mathcal{P}(G)$. En particulier on a $(Ax)\;y = A(xy)$. En effet, $(Ax)\;y$ et $A(xy)$ sont associatifs et coïncident donc respectivement avec $\Theta((Ax)\;y)$ et $\Theta(A(xy))$; mais on a manifestement

$$\Theta((Ax)\;y) = \Theta(A(xy)) .$$

COROLLAIRE 15.4. - L'équivalence associative et régulière à droite la plus générale d'un quasi-groupe G est la relation $x \in Hy$, où H est un sous-quasi-groupe de G.

Pour terminer cette étude relative aux quasi-groupes, nous allons déterminer l'équivalence régulière et simplifiable la plus générale d'un quasi-groupe G. (Rappelons que les équivalences régulières et simplifiables d'un quasi-groupe sont les équivalences qui, par passage au quotient, fournissent un quasi-groupe). Le théorème que nous donnerons a été trouvé par G. MATTENET.

<u>Définitions</u>. - Soit H un complexe d'un quasi-groupe G. Nous posons

$$x \rho_H y \iff x \ddots H = y \ddots H$$

(nous interpréterons et étudierons plus loin cette équivalence).

On peut définir aussi ${}_H\rho$. Nous dirons que H est présent à droite s'il vérifie

$$x \ddots H \between y \ddots H \implies x \ddots H = y \ddots H .$$

On définit la notion de présence à gauche immédiatement ; H est dit présent, s'il est présent à gauche et à droite.

THÉORÈME 16. - Soit X un complexe d'un quasi-groupe G possédant les propriétés suivantes :

$$X \text{ est présent ; } \rho_X = {}_X\rho = \mathcal{R} .$$

$$\forall\ u, v \in G,\ \exists\ w, w' \in G : u(vX) = wX ;\ (Xv)\, u = Xw' .$$

Alors $\mathcal{R}$ est une équivalence régulière et simplifiable de G dont X est une classe.

Réciproquement si $\mathcal{R}$ est une équivalence régulière et simplifiable, dont X est une classe, X vérifie les propriétés citées, et on a de plus : $\mathcal{R} = \rho_X = {}_X\rho$.

<u>Démonstration</u>. - On voit d'abord que $\mathcal{R}$ est régulière car $x \rho y \implies x \in Xu$, $y \in Xu \implies xa \in (Xu)\, a$ et $ya \in (Xu)\, a$. Mais $(Xu)\, a = Xv$, et on a donc $xa \in Xv$, $ya \in Xv$, soit $xa \mathcal{R} ya$. D'autre part $\mathcal{R}$ est simplifiable car $xa \rho ya$, $x \in Xu \implies xa \in (Xu)\, a = Xv \implies ya \in Xv = (Xu)\, a \implies y \in Xu$. Inversement si $\mathcal{R}$ est régulière et simplifiable, on vérifie aisément que l'on a $\mathcal{R} = \rho_X = {}_X\rho$ et que X est présent.

D'autre part, soit $y \in (Xu)\, v$; $y = (xu)\, v$ $(x \in X)$. On peut poser $y = xw$. Si $y' \in (Xu)\, v$, on a $y \mathcal{R} y'$ et par suite $y \in Xw$. On en conclut aisément que $(Xu)\, v = Xw$.

C. Q. F. D.

Deuxième partie : Hypergroupes, demi-hypergroupes.

Les ensembles munis de loi de composition multivoque ont été assez peu étudiés. C'est MARTY qui a introduit la notion d'hypergroupe ; en France, cette structure a été étudiée en particulier par M. KRASNER et J. KUNTZMANN.

Un exemple assez naturel de loi de composition multivoque est fourni par l'étude des demi-groupes : plus précisément, étant donné un demi-groupe D, on peut à tout couple x, y d'éléments de D, associer une partie de D, notée par exemple

$$x \times y ; \quad z \in x \times y \iff x = yz .$$

Bien entendu $x \times y$ peut parfois être vide.

Un autre exemple, fondamental dans notre étude est le suivant.

Soit G un groupoïde, dont Θ est la fermeture associative. A tout couple x, y d'éléments de G, on peut associer le complexe de G, $\Theta(xy)$; si l'on pose $x \star y = \Theta(xy)$, on voit que la loi $x , y \Longrightarrow x \star y$ est un exemple de loi de composition multivoque.

1. Définitions et exemples.

On appelle demi-hypergroupes la donnée d'un ensemble E, et d'une structure de demi-groupe $\cup$-distributive sur $\mathcal{P}(E)$. Si l'on note $\star$ la multiplication de ce demi-groupe, on a donc

$$x , y \in E \Longrightarrow x \star y \subseteq E , \quad x \star y \neq \emptyset .$$

D'autre part on a

$$x \star (y \star z) = (x \star y) \star z .$$

Un demi-hypergroupe E est dit un hypergroupe s'il vérifie les axiomes suivants :

$$x \in E , \quad y \in E \Longrightarrow \exists \; z \in E : \; x \subseteq y \star z$$
$$x \in E , \quad y \in E \Longrightarrow \exists \; z' \in E : \; x \subseteq z' \star y .$$

Exemples.

a. Passages au quotient modulo une équivalence régulière d'un côté. - Soit $\mathcal{R}$ une équivalence régulière à droite définie sur un groupe D. $D/\mathcal{R}$ peut être muni d'une structure de demi-hypergroupe de la façon suivante :

$$X \in D/\mathcal{R} , \quad Y \in D/\mathcal{R} , \qquad X \star Y = \{ Z \in D/\mathcal{R} : \; \exists \; x \in X , \; y \in Y : \; Z \ni xy \} .$$

b. Fermeture régulière.

Définition. - Soit G un groupoïde. Nous dirons qu'une application Θ de $\mathcal{P}(G)^* \to \mathcal{P}(G)^*$ est une fermeture régulière si Θ possède les propriétés suivantes :

- Θ est une fermeture de Moore.

- $\Theta(x_1 \dots x_n)$ ne dépend pas de la façon dont on fait le groupement des x_i pour calculer le produit $x_1 \dots x_n$; en particulier on a :

$$\Theta((xy)\, z) = \Theta(x(yz)) .$$

- $\Theta(Ax) \supseteq \Theta(A)\, x$; $\Theta(xA) \supseteq x\Theta(A)$ quel que soit le complexe A de G.

Nous poserons : $x \star y = \Theta(xy)$ $(\forall\ x , y \in G)$. Un exemple de fermeture régulière est celui où Θ est la fermeture associative de G.

PROPOSITION 17. - Soit G un groupoïde dont Θ est une fermeture régulière. La loi $x , y \to x \star y$ définit sur G une structure de demi-hypergroupe noté $H_\Theta(G)$; lorsque G est un quasi-groupe, $H_\Theta(G)$ est un hypergroupe ; lorsque Θ est la fermeture associative de G, $H_\Theta(G)$ est noté $H(G)$, et s'appelle demi-hypergroupe d'associativité de G (2).

Définition (KUNTZMANN). - Un demi-hypergroupe H est dit normal s'il possède la propriété suivante :

$$x \in a \star b\,,\ \ y \in b \star c \implies x \star c \between a \star y .$$

PROPOSITION 18. - Si G est un groupoïde, $H(G)$ est normal. Si D est un demi-groupe dont $\mathcal{R}$ est une équivalence régulière d'un côté, $D/\mathcal{R}$ est un demi-hypergroupe normal.

Démonstration. - Montrons par exemple la première assertion

$x \in a \star b \implies x \in \Theta(ab) \implies ab \in \Theta(x) \implies (ab)\ c \in \Theta(x)\ c \subseteq \Theta(xc) = x \star c$.
On montre de même que $a(bc) \in \Theta(a \star y)$ donc que : $(ab)\ c \in \Theta(a \star y)$. On a donc :

$$(ab)\ c \in x \star c \cap a \star y .$$

---

(2) Bien entendu G est un demi-groupe si et seulement si $H(G)$ est un groupoïde.

PROPOSITION 19. - Soit G un groupoïde ; $H(G)$ vérifie la condition suivante :

$$a \star b \between c \star d \implies a \star b = c \star d .$$

Démonstration.

$$u \in a \star b \cap c \star d \implies u \in \Theta(ab) \cap \Theta(cd) \implies ab \in \Theta u$$

$$\implies ab \in \Theta cd \implies \Theta(ab) = \Theta(cd) .$$

Définition. - Un demi-hypergroupe H est dit de type simple s'il possède la propriété suivante :

$$\forall\ x , y \in H , \ \exists\ z \in H : \ \forall\ u \in H , \quad x \star y \star u = z \star u ; \quad u \star x \star y = u \star z .$$

Un demi-hypergroupe H est dit de type fini s'il possède la propriété suivante :

$$\forall\ x , y \in H , \ \exists\ z_1 \dots z_n \in H : \ \forall\ u \in H ,$$

$$x \star y \star u = \bigcup_{i=1}^{n} z_i \star u ; \quad u \star x \star y = \bigcup_{i=1}^{n} u \star z_i .$$

Bien entendu si $x \star y$ est un complexe fini, quels que soient x , y, H est de type fini.

PROPOSITION 20. - Si G est un groupoïde, $H(G)$ est de type simple.

2. Congruences et homomorphismes.

La situation ne se présente pas de la même façon dans les hypergroupes et demi-hypergroupes, nous faisons deux études distinctes.

A. Etude dans le cas d'un demi-hypergroupe.

Définitions préliminaires. - Soit E un ensemble abstrait, dont $\mathcal{R}$ est une équivalence. On peut définir sur $\mathcal{P}(E)$ un certain nombre de relations binaires qui prolongent $\mathcal{R}$.

Soient A et B deux parties de E . Nous poserons $A \overline{\mathcal{R}} B$ si, et seulement si, pour tout $x \in A$, il existe $y \in B$ tel que $x \mathcal{R} y$, et si pour tout $y \in B$, il existe $x \in A$ tel que $x \mathcal{R} y$.

D'autre part nous poserons $A \overset{\equiv}{\mathcal{R}} B$ si et seulement si on a

$$x \in A , \ y \in B \implies x \mathcal{R} y .$$

PROPOSITION 21. - $\overline{\mathcal{R}}$ est la moins fine équivalence de $\mathcal{P}(E)$, $\cup$-régulière, dont la restriction à E soit $\mathcal{R}$; on a de plus : $A \overline{\mathcal{R}} \emptyset \implies A = \emptyset$

PROPOSITION 22. — $\overline{\overline{\mathcal{R}}}$ est une relation binaire symétrique ; on a $A \overline{\overline{\mathcal{R}}} \emptyset$, $\forall\ A \subseteq E$. De plus on a :

$$A \overline{\overline{\mathcal{R}}} B,\ C \subseteq A \implies C \overline{\overline{\mathcal{R}}} B$$

$$A \overline{\overline{\mathcal{R}}} B,\ B \neq \emptyset \implies A \overline{\overline{\mathcal{R}}} A$$

$A_i \overline{\overline{\mathcal{R}}} B,\ \forall\ i \implies \cup A_i \overline{\overline{\mathcal{R}}} B$

(une relation vérifiant cette propriété est dite quasi-$\cup$-régulière).

$\overline{\overline{\mathcal{R}}}$ est la moins fine des relations binaires quasi-$\cup$-régulières symétriques dont la restriction à E soit égale à $\mathcal{R}$.

Soient deux demi-hypergroupes H et H', et soit f une application de H dans H'. On dira que f est un <u>homomorphisme</u> si on a :

$$f(x \star y) = f(x) \star f(y) \qquad \forall\ x, y \text{ dans } H.$$

On dira que f est un <u>quasi-homomorphisme</u>, si on a

$$f(x \star y) \subseteq f(x) \star f(y).$$

On vérifie aisément que le composé de deux homomorphismes (quasi-homomorphisme) est encore un homomorphisme (quasi-homomorphisme), qu'un homomorphisme bijectif est un isomorphisme (en ce sens que son inverse est aussi un homomorphisme).

Soit d'autre part une équivalence $\mathcal{R}$ définie sur un demi-hypergroupe H. On dira que $\mathcal{R}$ est <u>régulière à droite</u> si $x \mathcal{R} y,\ a \in H \implies x \star a \overline{\mathcal{R}} y \star a$.

Une équivalence $\mathcal{R}$ est dite régulière si elle est régulière à gauche et à droite. D'autre part $\mathcal{R}$ est dite <u>fortement régulière à droite si</u> $x \mathcal{R} y$, $a \in H \implies x \star a \overline{\overline{\mathcal{R}}} y \star a$. On définit immédiatement la notion d'équivalence fortement régulière.

Nous noterons $\mathcal{F}_r$ la famille des équivalences régulières d'un demi-hypergroupe H, par $\mathcal{F}'_r$ la famille des équivalences fortement régulières de H. Il est clair que l'on a $\mathcal{F}'_r \subseteq \mathcal{F}_r$.

THÉORÈME 23 (Premier théorème d'isomorphisme).

a. Soit H un demi-hypergroupe dont $\mathcal{R}$ est une équivalence régulière. On peut alors munir $H/\mathcal{R}$ d'une structure de demi-hypergroupe telle que l'application canonique de H sur $H/\mathcal{R}$ soit un homomorphisme. Réciproquement, si f est un homomorphisme de H sur H', l'équivalence $\mathcal{R}$ associée à f est régulière et on a $H/\mathcal{R} \approx H'$.

b. Soit H un demi-hypergroupe dont $\mathcal{R}$ est une équivalence fortement régulière. Dans ces conditions $H/\mathcal{R}$ peut être muni d'une structure de demi-groupe telle que l'application canonique de H sur $H/\mathcal{R}$ soit un homomorphisme. La réciproque est également vraie.

Rappel de notations. - Si $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ sont deux équivalences définies sur un ensemble abstrait E, $\mathcal{R} \vee \mathcal{R}'$ désigne la borne supérieure de $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ dans le treillis des équivalences de E.

THÉORÈME 24. - Soit H un demi-hypergroupe. $\mathfrak{F}_r$ est une $\vee$-famille de Moore de plus fin élément l'égalité. $\mathfrak{F}'_r$ est une $\cap$-famille de Moore, et une $\wedge$-famille de Moore : c'est donc un sous-treillis complet du treillis des équivalences de H. Le plus fin élément de ce treillis est déterminable par un procédé fini.

Enfin on a

$$\rho \in \mathfrak{F}_r, \quad \rho' \in \mathfrak{F}'_r, \quad \rho' \subseteq \rho \implies \rho \in \mathfrak{F}'_r .$$

Démonstration. - On vérifie aisément que le plus fin élément de $\mathfrak{F}'_r$ est la fermeture transitive de la relation

$$\mathcal{R} : \quad x \,\mathcal{R}\, y \iff \exists \; x_1 \dots x_n : \begin{cases} x \in x_1 \star \dots \star x_n \\ y \in x_1 \star \dots \star x_n \end{cases}$$

Remarques. - Il est fort possible que $\mathfrak{F}'_r$ se réduise à l'équivalence universelle.

On peut aisément interpréter les équivalences régulières et fortement régulières dans le cas particulier où H est égal à $H_\Theta(G)$. Nous le ferons plus loin dans le cas particulier où Θ est la fermeture associative d'un groupoïde G.

Equivalences simplifiables.

Définition. - Soit H un demi-hypergroupe. On dira qu'une équivalence $\mathcal{R}$ est simplifiable à droite si on a :

$$\{u \in x \star a, \quad v \in y \star a\}_{u \,\mathcal{R}\, v} \implies x \,\mathcal{R}\, y .$$

On définit aisément la notion d'équivalence simplifiable. On établit immédiatement la relation existant entre cette notion, et la notion de demi-hypergroupe vérifiant une loi de simplifiabilité de la forme :

$$a \star b \between a' \star b \implies a = a' , \quad b \star a \between b \star a' \implies a = a'$$

(H est, selon le cas, simplifiable à droite, ou à gauche). On peut maintenant, étant donné un demi-hypergroupe H, résoudre différents problèmes analogues à ceux étudiés en théorie des demi-groupes et en particulier :

- construction de la plus fine équivalence simplifiable, et éventuellement régulière, d'un côté, laissant éventuellement indivisible une famille de complexes de H .

- conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un complexe soit une classe modulo une équivalence vérifiant des propriétés de régularité ou simplifiabilité.

Nous ne ferons pas ces études, car elles sont trop particulières. Lorsque nous étudierons la théorie des hypertas, nous établirons des théorèmes généraux qui résoudront entièrement les problèmes posés ici, ainsi que d'autres problèmes.

B. Etude dans le cas d'un hypergroupe. - La situation est ici beaucoup moins claire.

Définition. - Soit H un hypergroupe dont $\mathcal{R}$ est une équivalence. On dira que $\mathcal{R}$ est une congruence de H, si quelles que soient les classes X et Y modulo $\mathcal{R}$, $X \star Y$ est une réunion de classes.

En d'autres termes $\mathcal{R}$ est une congruence si et seulement si :

$$x \mathcal{R} y \,,\quad y \in u \star v \implies \exists\ u' \,, v' : \ x \in u' \star v' \,,\quad u \mathcal{R} u' \,,\quad v \mathcal{R} v' .$$

Nous noterons $\mathcal{C}$ la famille des congruences de l'hypergroupe H.

PROPOSITION 25. - $\mathcal{C}$ est une $\vee$-famille de Moore, de plus fin élément l'égalité. C'est donc un treillis complet.

Définition sur les homomorphismes. - Soient H et H' deux hypergroupes, et f une application de H dans H'. f est dit un homomorphisme d'hypergroupe si :

$$f(x \star y) \subseteq f(x) \star f(y) .$$

Un homomorphisme f est presque fort si :

$$f(u) \in f(x) \star f(y) \implies \exists\ x' \,, y' : \ u \in x' \star y' \,,\quad f(x) = f(x') \,,\quad f(y) = f(y') .$$

Un homomorphisme f est fort à droite si :

$$f(u) \in f(x) \star f(y) \implies \exists\ y' : \ u \in x \star y' \,,\quad f(y) = f(y')$$

f est fort, si f est fort à gauche et à droite.

Le rapport entre les homomorphismes et les congruences est précisé grâce au théorème suivant :

THÉORÈME 26 (KRASNER). - Soit H un hypergroupe dont $\mathcal{R}$ est une congruence. On peut munir $H/\mathcal{R}$ d'une structure d'hypergroupe telle que l'application canonique de H sur $H/\mathcal{R}$ soit un homomorphisme presque fort. Réciproquement, si f est un homomorphisme presque fort de H sur H', l'équivalence $\mathcal{R}$ associée à f est une congruence de H, et on a $H/\mathcal{R} \approx H'$.

Nous allons maintenant étudier les homomorphismes forts à gauche dans un cas particulier.

Définitions. - Soit H un hypergroupe. Soit $e \in H$. On dira que e est une unité scalaire à gauche si on a $e \star x = x \;\; \forall \; x \in H$. Soit A un complexe de H. On dira que A est multiplicativement fermé si on a

$$x \in A,\; y \in A \Longrightarrow x \star y \subseteq A .$$

On dira qu'un complexe multiplicativement fermé est réversible à gauche si on a

$$x \in A \star y \Longleftrightarrow y \in A \star x .$$

On montre aisément que lorsque A est réversible à gauche, les complexes $A \star x$ forment une partition de H, et que l'on a

$$x \in A \star x \quad \forall \; x \in H .$$

Ceci dit on a :

THÉORÈME 27. - Soient H et H' deux hypergroupes, et soit f un homomorphisme fort à gauche, de H sur H'. Supposons que H' possède une unité scalaire à gauche e'. Soit $A = f^{-1}(e')$. A est un complexe multiplicativement fermé, réversible à gauche qui vérifie de plus

$$a \star A \star b \subseteq A \star a \star b \qquad \forall \; a, b \text{ dans } H .$$

On a de plus

$$A \star m = A \star n \Longleftrightarrow fm = fn .$$

Enfin on a

$$f(a \star b) = f(a) \star f(b) .$$

Réciproquement, si A est une partie multiplicativement fermée, réversible à gauche, telle que

$$a \star A \star b \subseteq A \star a \star b ,$$

l'équivalence

$$x \,\mathcal{R}\, y \Longleftrightarrow A \star x = A \star y$$

est une congruence de H ; toute classe modulo $\mathcal{R}$ est de la forme $A \star x$. $H/\mathcal{R}$ possède une unité scalaire à gauche. Enfin l'homomorphisme f de H sur $H/\mathcal{R}$ est fort à gauche.

<u>Démonstration</u>. — Nous ne ferons que l'esquisser.

Tout d'abord on voit aisément que $A = f^{-1}(e')$ est multiplicativement fermé. Montrons que A est réversible à gauche :

$$x \in A \star y \implies fx = fy \implies f(y) = f(a) \star f(x) , \qquad a \in A \implies y \in A \star x$$

puisque f est fort à gauche.

D'autre part

$$x \in a \star A \star b \implies f(x) \subseteq f(a) \star f(b) \implies x \in a' \star b \quad \text{avec} \quad f(a') = f(a) .$$

On a aisément $a' \in A \star a$.

Enfin on a

$$f(x) \in f(a) \star f(b) \implies x \in A \star a \star b \implies f(x) \in f(A) \star f(a \star b) = f(a \star b) .$$

La réciproque se démontre facilement.

COROLLAIRE 27.1. — Soit H un hypergroupe, donc $\mathcal{R}$ est une congruence vérifiant les propriétés suivantes :

- $x \mathcal{R} y$, $y \in a \star b \implies x \in a' \star b$, $a \mathcal{R} a'$.
- Il existe $e \in H$: $x \in e \star y \implies x \mathcal{R} y$.

Alors $\mathcal{R}$ est une équivalence régulière de H considéré comme demi-hypergroupe.

COROLLAIRE 27.2. — Soit G un groupe dont g est un sous-groupe. Soit G/g l'hypergroupe formé des classes gx $(gx \star gy = \{gu\}_{u \in xgy})$. Soit f l'application canonique de G sur G/g. Pour que f soit un homomorphisme fort à gauche, il faut et il suffit que g soit un sous-groupe distingué de G.

THÉORÈME 28. — Soit H un hypergroupe. Soit $\mathcal{R}$ une congruence définie sur H. Pour que $H/\mathcal{R}$ soit un groupe, il faut et il suffit que $\mathcal{R}$ soit une équivalence fortement régulière de H considéré comme demi-hypergroupe.

<u>Remarque</u>. — Nous donnerons plus loin la forme générale des équivalences fortement régulières d'un hypergroupe H.

3. Complexes remarquables dans un demi-hypergroupe H.

A. Les résiduations dans un demi-hypergroupe.

Soient A et B deux complexes d'un demi-hypergroupe H. Nous posons :

$$A \mathbin{\bullet\!\!.} B = \{x \in H : x \star B \subseteq A\}$$

$$A \overset{\bullet}{\cdot}\!\cdot\, B = \{x \in H : \ x \star B \between A\} \qquad \text{(résiduation faible).}$$

On définit de même $A \,{\circ}^{\bullet}\, B$ et $A \,{\bullet}{\cdot}^{\bullet}\, B$. On étudie aisément les propriétés des résidus introduits.

B. Complexes multiplicativement fermés. – Nous en avons donné la définition.

PROPOSITION 29. – La famille des complexes multiplicativement fermés d'un demi-hypergroupe H est une $\cap$-famille de Moore. On vérifie aisément que si A est un complexe de H, la fermeture de Moore de A dans la famille des complexes multiplicativement fermés est

$$\bar{A} = \{u \in H : \ \exists \ x_1 \ldots x_n , \ \text{éléments de } A : \ u \in x_1 \star \ldots \star x_n\} .$$

Ce procédé peut du reste être appliqué lorsqu'on veut déterminer la fermeture unitaire d'un côté d'un complexe d'un demi-groupe D .

C. Complexes complets.

Définition. – Un complexe A d'un demi-hypergroupe H est dit complet si on a

$$x_1 \star \ldots \star x_n \between A \implies x_1 \star \ldots \star x_n \subseteq A .$$

PROPOSITION 30. – L'ensemble des complexes complets de H auquel on adjoint $\emptyset$ est un sous-treillis complet, complémenté, du treillis $\mathcal{P}(H)$ des parties de H . La fermeture de Moore de ce treillis peut être déterminée aisément.

Exemples de complexes complets :

Si $\mathcal{R}$ est une équivalence fortement régulière de H, toute classe modulo $\mathcal{R}$ est un complexe complet.

Si $H = H_{\Theta}(G)$, les complexes A vérifiant $\Theta x \between A \implies \Theta x \subseteq A$, sont des complexes complets.

Soit G un groupe dont g est un sous-groupe. Soit G/g l'hypergroupe constitué des classes à gauche gx . Soit φ l'application canonique de $G \to G/g$.

PROPOSITION 31. – Soit A un complexe de G/g . Soit $B = \varphi^{-1}(A)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a. A est complet.

b. $xgy \between B \implies xgy \subseteq B$.

c. g est indivisible modulo l'équivalence C_B définie ainsi

$$x\ \mathcal{C}_B\ y \iff B \bullet\bullet x = B \bullet\bullet y$$

(où $B \bullet\bullet x = \{(u, v) \in G \times G : uxv \in B\}$) ([3]).

Cette proposition suggère d'étudier, étant donné un demi-groupe D dont K est un complexe, l'ensemble des complexes A de D tels que K soit indivisible modulo $\mathcal{C}_A$. Cette étude peut être faite aisément.

D. Complexes réflectifs.

Définition. – Un complexe A d'un demi-hypergroupe H est dit réflectif si on a

$$x \star y \between A \implies y \star x \between A.$$

A est dit réflectif de première espèce si on a :

$$x \star y \subseteq A \implies y \star x \subseteq A.$$

On vérifie aisément la proposition suivante :

PROPOSITION 32. – L'ensemble des complexes réflectifs de H est une $\cup$-famille de Moore ; l'ensemble des complexes réflectifs de première espèce de H est une $\cap$-famille de Moore.

Remarque. – La fermeture de Moore de cette dernière famille peut être déterminée facilement.

E. Complexes unitaires.

Définition. – Un complexe A d'un demi-hypergroupe H est unitaire à gauche, si on a

$$a \star x \between A,\ a \in A \implies x \in A.$$

On définit de même les complexes unitaires à droite, et les complexes unitaires.

D'autre part A est dit unitaire à gauche de première espèce si on a

$$a \star x \subseteq A,\ a \in A \implies x \in A.$$

PROPOSITION 33. – L'ensemble des complexes de H, unitaires à gauche (resp. unitaires à gauche de première espèce) auxquels on adjoint Φ, est une $\cap$-famille de Moore.

Notons que l'on peut construire très facilement le plus petit complexe unitaire à gauche, contenant un complexe donné. Par contre, dans le cas général, on ne peut

([3]) L'équivalence $\mathcal{C}_B$ a été étudiée par R. CROISOT.

faire cette construction pour les complexes unitaires à gauche de première espèce.

F. Complexes nets. - Résidus d'un complexe A fixé.

Définitions. - Soit A un complexe d'un demi-hypergroupe H. On pose

$$W_A = \{x \in H : A \cdot\cdot^{\bullet} x = \Phi\} \; ; \quad W'_A = \{x \in H : A \cdot^{\bullet} x = \Phi\}$$

on définit de même ${}_A W$ et ${}_A W'$. Il est clair que l'on a $W_A \subseteq W'_A$.

Nous dirons qu'un complexe A est net à droite si $W_A = \Phi$. On définit de même les complexes nets à gauche, et les complexes nets. D'autre part, nous dirons que A est net de première espèce si $W'_A = \Phi$.

On peut faire l'étude des complexes nets minimaux, et généraliser les résultats obtenus par P. LEFEBVRE pour les demi-groupes. Nous ne ferons que l'esquisser, car dans l'étude des hypertas, elle sera reprise dans un cadre plus général.

THÉORÈME 34.

a. Soit A un complexe net à droite. Pour que A soit net à droite minimal, il faut et il suffit que l'on ait :

$$\forall \; a \in A , \quad a \star u \between A \Longrightarrow a \star u \cap A = \{a\}$$ (4).

b. Deux complexes nets minimaux ont le même cardinal.

Remarque. - On peut aussi faire l'étude des complexes W minimaux, et généraliser les résultats de P. LEFEBVRE.

G. Idéaux et parties consistantes.

Définitions. - Un complexe A de H est dit un idéal à droite si $A \star H \subseteq A$. On définit de même les idéaux à gauche de H, et les idéaux bilatères. Il est clair que l'on a la proposition suivante :

PROPOSITION 35. - L'ensemble des idéaux de H auquel on adjoint Φ est un sous-treillis complet de $\mathcal{P}(H)$.

On peut généraliser et étudier la notion d'équivalence de Green ; on sait que cette notion fait intervenir les idéaux minimaux.

Ceci dit, on peut, en étudiant les propriétés des complexes dont le complémentaire est un idéal, introduire la notion de complexe consistant.

---

(4) Le critère a été donné par P. DUBREIL en théorie des demi-groupes.

<u>Définition</u>. - Un complexe A de H est dit <u>consistant</u> à droite si on a :

$$x \star y \between A \implies y \in A \quad .$$

PROPOSITION 36. - Soit A un complexe de H, non égal à H. Pour que A soit un idéal à droite, il faut et il suffit que CA soit consistant à gauche.

Bien entendu il résulte de là, que les complexes consistants à gauche forment un sous-treillis complet de $\mathcal{P}(H)$.

<u>Remarque</u>. - On peut introduire les idéaux et parties consistantes de première espèce :

- A est un <u>idéal à droite de première espèce</u> si on a

$$a \star x \between A, \ \forall\ x \in H, \ a \in A .$$

- A est une partie <u>consistante à droite de première espèce</u> si on a :

$$x \star y \subseteq A \implies y \in A .$$

La famille des parties consistantes à droite de première espèce, à laquelle on adjoint Φ, est $\cap$-stable, et $\cup$-stable.

Un exemple de l'utilisation des idéaux.

THÉORÈME 37. - Soit H un demi-hypergroupe. Pour que H possède un complexe net à droite minimal, il faut et il suffit que tout idéal à droite de H contienne un idéal à droite minimal.

THÉORÈME 38. - Soit H un demi-hypergroupe possédant des complexes nets à droite minimaux. La réunion de ces complexes coïncide avec la réunion des idéaux à droite minimaux de H. Ces deux théorèmes généralisent deux théorèmes de P. LEFEBVRE. Nous en donnerons une démonstration lors de l'étude des hypertas.

H. <u>Complexes forts</u>.

<u>Définitions</u>. - Un complexe A d'un demi-hypergroupe H est dit <u>fort à droite</u> si on a :

$$x \star a_1 \star \dots \star a_n \between A , \quad y \star a_1 \star \dots \star a_n \between A , \quad x \star b_1 \star \dots \star b_n \between A ,$$
$$\implies y \star b_1 \star \dots \star b_m \between A .$$

Il est à noter que l'on peut définir la notion de complexe <u>fort à gauche</u>, et que ces notions, en général, ne coïncident pas ([5]).

([5]) A est dit <u>fort</u> s'il est fort à gauche et à droite.

Un complexe A est dit <u>fort de première espèce</u>, si on a :

$$a \star x \subseteq A\,, \quad a \star y \subseteq A\,, \quad b \star x \subseteq A \implies b \star y \subseteq A\,.$$

<u>Remarque</u>. - Si A est complet, on a :

A fort à droite $\iff$ A fort à gauche $\iff$ A fort de première espèce.

PROPOSITION 39. - La famille des complexes de H forts de première espèce est une $\cap$-famille de Moore. Si A est un complexe de H, le plus petit complexe fort de première espèce qui contient A, noté $\overline{A}$ peut être déterminé moyennant certaines conditions sur A, par un processus dénombrable, lorsque H est de type fini (ceci est réalisé si $H = H_0(G)$).

En particulier lorsque $a \star b$ est un complexe fini $\forall\ a, b \in H$ on a :

$$\overline{A} = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\ ; \quad A_0 = A\ ; \quad A_{n+1} = A_n \cup B_{n+1}\ ; \quad B_{n+1} = \bigcup_{\substack{\exists a,\, x \in H \\ a\star x \subseteq A_n \\ b\star x \subseteq A_n \\ a\star y \subseteq A_n}} b \star y\,.$$

<u>Complexes pseudo-forts</u>.

<u>Définition</u>. - Un complexe A de H est <u>pseudo-fort</u> si on a :

$$a \star x \between A\,, \quad a \star y \between A\,, \quad b \star x \between A \implies b \star y \between A\,.$$

(On vérifie aisément qu'il n'y a pas lieu de distinguer entre les complexes pseudo-forts à gauche, et les complexes pseudo-forts à droite).

Il est clair que lorsque H est un demi-groupe, les notions de pseudo-force, force, force de première espèce coïncident ; il en est de même lorsque A est complet. De plus, on a :

PROPOSITION 40. - Si A est fort d'un côté, alors A est pseudo-fort. Lorsque H est de type simple, les notions de pseudo-force et de force coïncident ; (ceci est réalisé lorsque $H = H_0(G)$).

<u>Démonstration</u>. - Supposons H de type simple. Soit A un complexe pseudo-fort. Supposons que l'on ait par exemple :

$$x \star \alpha_1 \star \dots \star \alpha_n \between A\ ; \quad y \star \alpha_1 \star \dots \star \alpha_n \between A\ ; \quad x \star \beta_1 \star \dots \star \beta_m \between A\,.$$

Pour montrer que l'on a $y \star \beta_1 \star \dots \star \beta_m \between A$, il est évident qu'il suffit d'établir que l'on a :

$$x \star \alpha_1 \star \dots \star \alpha_n = x \star u \quad ,$$

où u ne dépend que des α_i, et non de x. Or ceci est vrai pour $n = 1$ ou 2. Supposons-le vrai pour n, et montrons-le pour $n + 1$. On a :

$$x \star \alpha_1 \star \dots \star \alpha_n = x \star [\alpha_1 \star (\alpha_2 \star \dots \star \alpha_n)] = x \star [\alpha_1 \star v]$$

où v ne dépend que des $\alpha_2 \dots \alpha_n$. On a alors immédiatement :

$$x \star \alpha_1 \star \dots \star \alpha_n = x \star u \qquad (\text{et donc } y \star \alpha_1 \star \dots \star \alpha_n = y \star u).$$

C. Q. F. D.

Remarques. - La notion de complexe pseudo-fort nous sera utile quand nous étudierons certains exemples d'hypergroupes homomorphes à un demi-hypergroupe H, ne vérifiant pas de loi de simplifiabilité.

On peut se demander si un demi-hypergroupe H, tel que tout complexe pseudo-fort est fort, n'est pas de type simple.

I. Complexes symétriques.

Définitions. - Soit A un complexe d'un demi-hypergroupe H.

$$x \mathcal{R}_A y \iff A \cdot\!\cdot x = A \cdot\!\cdot y \; ; \qquad x \mathcal{R}'_A y \iff A \cdot x = A \cdot y .$$

On définit de même ${}_A\mathcal{R}$ et ${}_A\mathcal{R}'$.

Les équivalences ainsi introduites sont appelées équivalences principales.

A est symétrique si on a $\mathcal{R}_A = {}_A\mathcal{R}$.

A est symétrique de première espèce si on a $\mathcal{R}'_A = {}_A\mathcal{R}'$.

J. Relations entre les définitions introduites.

THÉORÈME 41. - Soit A un complexe complet, multiplicativement fermé, d'un demi-hypergroupe H. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. A est symétrique, fort, unitaire.
2. A est unitaire et réflectif.
3. $a \star x \star b \between A$, $a \star b \between A \implies x \in A$.

Démonstration.

(2) $\implies$ (1). - Il est clair que si les conditions (2) sont réalisées, A est symétrique ; montrons que A est fort.

$a \star x \between A$, $a \star y \between A$, $b \star x \between A \implies y \star a \subseteq A$,

$$x \star b \subseteq A \implies y \star a \star x \star b \subseteq A \implies a \star x \star b \star y \subseteq A \implies b \star y \subseteq A$$

puisque $a \star x \subseteq A$, et que A est unitaire.

(1) $\Longrightarrow$ (3). – Supposons que $a \star x \star b \subseteq A$, $a \star b \subseteq A$; on a dès lors

$$x \star b \star a \subseteq A , \quad b \star a \subseteq A , \text{ et donc } x \in A .$$

(3) $\Longrightarrow$ (2).

$$a \star x \between A , \quad a \in A \Longrightarrow a \star x \star a \subseteq A , \quad a \star a \subseteq A \Longrightarrow x \in A$$

$$a \star b \between A \Longrightarrow a \star b \star a \star b \subseteq A \Longrightarrow b \star a \between A .$$

C. Q. F. D.

<u>Remarque</u>. – Bien entendu l'hypothèse que A est complet est fondamentale puisqu'elle permet de remplacer le symbole $\between$ par le symbole $\subseteq$.

COROLLAIRE 41.1. – Soit A un complexe complet, multiplicativement fermé de H vérifiant les conditions équivalentes du théorème 41. Si A n'est pas net, on a

$$W_A = {}_A W = W'_A = {}_A W' = W .$$

W est un idéal premier complet.

COROLLAIRE 41.2. – La famille des complexes complets, multiplicativement fermés, vérifiant les conditions équivalentes du théorème 41 est une $\cap$-famille de Moore. Lorsque H possède un élément e vérifiant $a \star e \ni a$ $\forall$ $a \in H$, cette famille de Moore possède un élément minimum.

<u>Remarques</u>. – Un élément e, vérifiant la condition $a \star e \ni a$, $\forall$ a, est appelé unité à droite de H. Dans le corollaire 41.2 rien n'est changé si on suppose l'existence d'unités à gauche.

THÉORÈME 42. – Soit H un demi-hypergroupe possédant une unité scalaire e, et vérifiant la condition

$$a \star b \between b \star a \qquad \forall\ a , b$$ (6).

Alors la fermeture complète de $\{e\}$ est l'élément minimum de la famille des complexes de H complet, multiplicativement fermés, unitaires, réflectifs.

<u>Démonstration</u>. – On montrera d'abord que la fermeture complète d'un complexe multiplicativement fermé est un complexe multiplicativement fermé.

---

(6) Un demi-hypergroupe vérifiant cette condition est dit faiblement commutatif. J'ai construit un demi-hypergroupe non commutatif vérifiant cette condition.

D'autre part on montrera que dans un demi-hypergroupe vérifiant la condition $a \star b \between b \star a$, tout complexe complet est réflectif.

Montrons enfin que la fermeture complète de $\{e\}$ est unitaire, par exemple est unitaire à droite.

Posons $\mathfrak{N}$ la fermeture de $\{e\}$. On a

$$\mathfrak{N} = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \,, \quad \text{avec} \quad A_0 = \{e\} \,, \ldots , A_{n+1} = \left\{ \begin{bmatrix} x \in H : \; x \in a_1 \star \ldots \star a_m \\ a_1 \star \ldots \star a_m \between A_n \end{bmatrix} \right\}$$

On a manifestement

$$a \star b \between A_n \,, \quad a \in A_0 \implies b \in A_n \qquad \text{(quel que soit } n\text{)}.$$

Supposons que l'on ait

$$a \star b \between A_n \,, \quad a \in A_m \implies b \in \mathfrak{N} \qquad \text{(quel que soit } n\text{)},$$

Montrons que l'on a alors :

$$a \star b \between A_n \,, \quad a \in A_{m+1} \implies b \in \mathfrak{N} \,.$$

Or on peut écrire, si $a \star b \between A_n$ et $a \in A_{m+1}$:

$$a \in x_1 \star \ldots \star x_p \between A_m \,; \quad a \star b \between x'_1 \star \ldots \star x'_q \between A_n$$

$$a \star b \subseteq x_1 \star \ldots \star x_p \star b \between x'_1 \star \ldots \star x'_q \between A_n \,.$$

Donc on a

$$x_1 \star \ldots \star x_p \star b \subseteq A_{n+2} \,.$$

Soit $c \in x_1 \star \ldots \star x_p \cap A_m$. On a

$$c \star b \subseteq A_{n+2} \,, \quad c \in A_m \,. \qquad \text{Donc } \; b \in \mathfrak{N} \,.$$

C. Q. F. D.

Remarque. - Les complexes introduits dans le théorème 41 jouent un rôle essentiel dans l'étude des groupes homomorphes à un demi-hypergroupe, comme nous le verrons bientôt.

4. Hypergroupes et groupes homomorphes à un demi-hypergroupe fixé (généralisation des résultats de P. DUBREIL).

Dans ce qui suit, sauf précision supplémentaire, H est un demi-hypergroupe fixé.

PROPOSITION 43. - Soit A un complexe fort à droite de H. W_A est alors une classe modulo $\mathcal{R}_A$, et $\mathcal{R}_A$ est simplifiable à droite sur $H - W_A$. De plus on a

$$x \mathcal{R}_A y , \quad u \in H \implies \{(x \star u) - W_A\} \overline{\mathcal{R}}_A \{(y \star u) - W_A\} .$$

PROPOSITION 44. - Soit A un complexe fort à droite de H. Soit B une classe modulo $\mathcal{R}_A$, distincte de W_A. B est fort à droite, et on a $\mathcal{R}_A \subseteq \mathcal{R}_B$; $W_A \subseteq W_B$. D'autre part $\mathcal{R}_A$ et $\mathcal{R}_B$ coïncident sur $H - W_B$. Enfin, si $A \subseteq B$, on a $W_A = W_B$ et $\mathcal{R}_A = \mathcal{R}_B$.

<u>Définition</u>. - A fort à droite est dit parfait à droite si on a

$$a , b \in A \implies A \cdot\!\cdot\!\cdot a \between A \cdot\!\cdot\!\cdot b .$$

PROPOSITION 45. - Soit A un complexe parfait à droite de H. Il existe U_A parfait à droite, classe modulo $\mathcal{R}_A$ tel que :

$$A \subseteq U_A , \quad \mathcal{R}_A = \mathcal{R}_{U_A} , \quad W_A = W_{U_A} .$$

PROPOSITION 46. - Soit $\mathcal{R}$ une équivalence régulière de H dont A est une classe. On a $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}_A$. Si $\mathcal{R}$ est simplifiable à droite, on a de plus : A est fort à droite, et $\mathcal{R} = \mathcal{R}_A$ sur $H - W_A$.

PROPOSITION 47. - Soit A un complexe fort, net, symétrique, parfait à droite. Alors $\mathcal{R} = \mathcal{R}_A = {}_A\mathcal{R}$ est régulière, et $H/\mathcal{R}$ est un demi-hypergroupe simplifiable, possédant un élément net.

Inversement soit $\varphi : H \to H'$ un homomorphisme de H sur un demi-hypergroupe simplifiable, possédant un élément net a'. Soit $A = \varphi^{-1}(a')$. A est net, fort, symétrique, parfait à droite et on a

$$x \mathcal{R}_A y \iff \varphi(x) = \varphi(y) .$$

<u>Définition</u>. - Un complexe A de H est dit <u>fortement net à droite</u> si on a

$$\forall \ x , y \in H , \ \exists \ u , v \in H : \ x \star u \between A , \ y \star v \star u \between A .$$

On définit immédiatement les complexes fortement nets de H.

PROPOSITION 48. - Soit A un complexe fortement net, symétrique, fort, contenu dans H. Alors $\mathcal{R} = \mathcal{R}_A = {}_A\mathcal{R}$ est une équivalence régulière de H, et $H/\mathcal{R}$ est un hypergroupe vérifiant la loi de simplification.

Réciproquement, si φ est un homomorphisme de H sur un hypergroupe vérifiant la loi de simplification, et si A est une classe modulo l'équivalence $\mathcal{R}$ associée à φ, A est fortement net, symétrique, fort, et on a $\mathcal{R} = \mathcal{R}_A = {}_A\mathcal{R}$.

<u>Définition</u>. - Un hypergroupe H est complètement régulier si :

$\exists$ e, unité scalaire de H, telle que $a \star b \ni e \Longrightarrow b \star a \ni e$.

$\forall x \in H$, $\exists x' \in H$ unique, tel que : $x \star x' \ni e$.

THÉORÈME 49. - Soit A un complexe multiplicativement fermé, unitaire, net, réflectif, pseudo-fort, contenu dans H. Alors $\mathcal{R} = \mathcal{R}_A = {}_A\mathcal{R}$ est un hypergroupe complètement régulier, et A est une classe modulo $\mathcal{R}$.

Réciproquement si φ est un homomorphisme de H sur un hypergroupe complètement régulier d'unité e, et si on pose $A = \varphi^{-1}(e)$, A est multiplicativement fermé, unitaire, net, réflectif, pseudo-fort, et $\mathcal{R} = \mathcal{R}_A = {}_A\mathcal{R}$.

<u>Remarque</u>. - On peut aussi étudier les "hypergroupes avec zéro" images homomorphes de H ; l'étude est liée à celle des complexes multiplicativement fermés, unitaires, réflectifs, pseudo-forts, de résidu premier (un idéal W étant dit premier si $a \star b \between W$, $a \notin W \Longrightarrow b \in W$). Il est à noter que cette condition ne découle pas des propriétés de réflectivité, unitarité et pseudo-force, comme cela se passe pour les demi-groupes.

THÉORÈME 50. - Soit A un complexe complet, multiplicativement fermé, unitaire, réflectif et net contenu dans H. Alors $H/\mathcal{R}_A$ est un groupe. Réciproquement, si φ est un homomorphisme de H sur un groupe, et si A est la classe unité, A est complet, multiplicativement fermé, net, unitaire et réflectif, et $\mathcal{R}_A = {}_A\mathcal{R}$ est l'équivalence d'homomorphisme.

<u>Remarques</u>. - On peut aussi étudier les groupes homomorphes à l'aide de la proposition 48.

On peut étudier "les groupes avec zéro" images homomorphes de H.

THÉORÈME 51. - Soit H un hypergroupe. Il existe une correspondance biunivoque entre l'ensemble des congruences $\mathcal{R}$ de H telles que $H/\mathcal{R}$, soit un groupe, et l'ensemble des complexes de H multiplicativement fermés, complets, unitaires et réflectifs. Il existe une plus fine congruence $\mathcal{R}$ de H telle que $H/\mathcal{R}$ soit un groupe.

<u>Démonstration</u>. - Il existe une plus fine congruence $\mathcal{R}$ de H telle que $H/\mathcal{R}$ soit un groupe, parce que les congruences $\mathcal{S}$ de H telles que $H/\mathcal{S}$ soit un groupe, sont les équivalences fortement régulières de H, lesquelles constituent une $\cap$-famille de Moore. (Du reste on peut noter que si $a \in H$ est tel qu'il

existe $x \in H$: $a \star x \ni x$, a appartient à tout complexe multiplicativement fermé, unitaire, réflectif et complet.)

5. L demi-hypergroupe $H(G)$.

Dans cette partie nous donnons quelques compléments sur le demi-hypergroupe $H(G)$ (demi-hypergroupe d'associativité de G).

PROPOSITION 52. — Soit φ un homomorphisme d'un groupoïde G dans un groupoïde G'. φ est un quasi-homomorphisme de $H(G)$ dans $H(G')$. Si de plus $\varphi(A)$ est associatif lorsque A l'est aussi, φ est un homomorphisme de demi-hypergroupe. Lorsque φ est un isomorphisme de G sur G', c'est aussi un isomorphisme de $H(G)$ sur $H(G')$.

PROPOSITION 53. — Soit A un complexe de G. Pour que A soit complet dans $H(G)$, il faut et il suffit que A soit associatif dans G.

A est réflectif (fort) dans $H(G)$ si et seulement si $\Theta(A)$ l'est dans G.

PROPOSITION 54. — Soit A un complexe de G. Soient x, y, a des éléments de G. On a

$$(x \star a \between A \iff y \star a \between A) \iff (xa \in \Theta A \iff ya \in \Theta A).$$

PROPOSITION 55. — Soit $\mathcal{R}$ une équivalence d'un groupoïde G. Pour que $\mathcal{R}$ soit associative et régulière dans G, il faut et il suffit que $\mathcal{R}$ soit fortement régulière dans $H(G)$.

PROPOSITION 56. — Soit G un quasi-groupe ; $H(G)$ est un hypergroupe normal de type simple.

Il y a identité entre les équivalences suivantes :

- équivalences associatives et régulières de G.
- congruences $\mathcal{R}$ de $H(G)$ telles que $H(G)/\mathcal{R}$ soit un groupe.
- équivalences $\mathcal{R}$ de la forme $\mathcal{R}_A$ où A est un sous-groupoïde associatif, unitaire, réflectif de G.

Voir la bibliographie placée à la fin de l'exposé n° 10.