Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Mario Petrich

Sur la décomposition demi-réticulée maximale d'un demi-groupe

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 16, nº 1 (1962-1963), exp. nº 8, p. 1-16
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1962-1963__16_1_A8_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des Nombres)
16e année, 1962/63, n° 8

14 janvier 1963

SUR LA DÉCOMPOSITION DEMI-RÉTICULÉE MAXIMALE D'UN DEMI-GROUPE

par Mario PETRICH

L'image homomorphe demi-réticulée maximale d'un demi-groupe D est le demi-treillis Y tel que toute image homomorphe demi-réticulée de D soit aussi image homomorphe de Y ; des caractérisations du demi-treillis Y ont été données par A. H. CLIFFORD [1] et par M. YAMADA [8] (voir aussi G. THIERRIN [7]) ; la décomposition de D en les classes d'équivalence qui sont les images inverses complètes des éléments de Y est appelée la décomposition demi-réticulée maximale de D .

Nous nous proposons de caractériser les éléments de Y au moyen des idéaux premiers de D (§ 1) et d'établir certaines propriétés de ces éléments (§ 2). Au § 3, nous montrons comment certaines propriétés des N-classes d'un demi-groupe D influent sur la structure de D . AU § 4, nous donnons, pour certaines classes de demi-groupes, l'expression explicite de la plus petite face contenant un élément fixé du demi-groupe.

Les résultats contenus dans cet exposé seront développés dans un article qui doit paraître au Pacific Journal of Mathematics (voir [3]).

1. Image homomorphe demi-réticulée maximale d'un demi-groupe.

DÉFINITION 1. - Un idéal premier I d'un demi-groupe D est un idéal bilatère de D qui vérifie la propriété :

$$x , y \in D ; \quad xy \in I \Longrightarrow x \in I \quad \text{ou} \quad y \in I .$$

La partie vide, $\emptyset$, appartient à la famille $\mathfrak{J}$ des idéaux premiers ; nous excluons D de cette famille.

DÉFINITION 2. - On appelle face d'un demi-groupe D , un sous-demi-groupe consistant, c'est-à-dire un sous-demi-groupe N de D qui vérifie la propriété :

$$x , y \in D ; \quad xy \in N \Longrightarrow x \in N \quad \text{et} \quad y \in N .$$

Il est évident qu'une partie A de D est un idéal premier si et seulement si son complémentaire dans D , D - A , est une face.

G. THIERRIN a étudié quelques propriétés des faces d'un demi-groupe commutatif (cf. [5]).

Nous désignerons par $\mathcal{P}$ la famille de toutes les parties de l'ensemble $\mathfrak{I}$; la famille $\mathcal{P}$ n'est pas vide puisqu'elle contient $\{\emptyset\}$.

Nous noterons $\mathcal{E}$ l'ensemble des équivalences régulières de D qui vérifient les conditions :

$$x \sim x^2 \quad \text{et} \quad xy \sim yx \quad \text{quels que soient} \quad x , y \in D .$$

L'équivalence universelle est un élément de l'ensemble $\mathcal{E}$.

La théorie des décompositions demi-réticulées maximales peut se généraliser au cas où D est un groupoïde, c'est-à-dire un ensemble non vide dans lequel est définie une opération binaire univoque et universelle ; il est alors exigé que chaque élément $\sim$ de l'ensemble $\mathcal{E}$ satisfasse à la condition supplémentaire :

$$(xy)\, z \sim x(yz) \quad \text{quels que soient} \quad x , y , z \in D .$$

Si $\mathfrak{A}$ est une partie de l'ensemble $\mathcal{P}$, nous noterons $\overset{\mathfrak{A}}{\sim}$ la relation binaire définie dans D par la condition :

$$x \overset{\mathfrak{A}}{\sim} y \rightleftharpoons \{\forall \ I \in \mathfrak{A} \ ; \ x \in I \rightleftharpoons y \in I\} .$$

Soit φ l'application, définie dans $\mathcal{P}$, qui à l'élément $\mathfrak{A}$ fait correspondre la relation binaire $\overset{\mathfrak{A}}{\sim}$; on a le théorème :

THÉORÈME 1. - <u>L'image de l'application</u> φ <u>est l'ensemble</u> $\mathcal{E}$. <u>De plus, si</u> $\mathfrak{A}$ <u>et</u> $\mathfrak{B}$ <u>sont deux éléments de</u> $\mathcal{P}$, <u>l'ensemble</u> $\mathfrak{A}$ <u>est contenu dans l'ensemble</u> $\mathfrak{B}$ <u>si et seulement si l'équivalence</u> $\overset{\mathfrak{B}}{\sim}$ <u>est plus fine que l'équivalence</u> $\overset{\mathfrak{A}}{\sim}$.

Nous démontrons le théorème dans le cas où D est un demi-groupe ; la généralisation aux groupoïdes est évidente.

<u>Démonstration</u>. - Il est clair que $\overset{\emptyset}{\sim}$ est l'équivalence universelle. Soit, donc, $\mathfrak{A} \in \mathcal{P}$ et $\mathfrak{A} \neq \emptyset$. La relation binaire $\overset{\mathfrak{A}}{\sim}$ est visiblement une relation d'équivalence. Supposons que l'on ait :

$$x \overset{\mathfrak{A}}{\sim} y \tag{1}$$

et soit z un élément quelconque de D. Si zx est un élément d'un idéal I appartenant à l'ensemble $\mathfrak{A}$, ou bien $z \in I$ et, par suite, $zy \in I$; ou bien $x \in I$, et, d'après (1), $y \in I$; donc $zy \in I$. En échangeant les rôles de y et de x, on voit que l'appartenance $zy \in I$ entraîne $zx \in I$. Par suite, on a

$$zx \overset{\alpha}{\sim} zy \ .$$

On démontre de la même façon que :

$$xz \overset{\alpha}{\sim} yz \ .$$

D'autre part, il est évident que les relations :

$$x \overset{\alpha}{\sim} x^2 \quad \text{et} \quad xy \overset{\alpha}{\sim} yx$$

sont vérifiées par tous les éléments x et y de D. Par conséquent la congruence $\overset{\alpha}{\sim}$ appartient à l'ensemble $\mathcal{E}$.

Inversement, soit $\sim$ un élément de l'ensemble $\mathcal{E}$. A chaque élément x de D associons la partie

$$A_x = \{y \ ; \ y \in D \ ; \ x \sim xy\} \ .$$

Puisque $x \in A_x$, A_x est un complexe de D. Si y et z sont deux éléments de A_x, c'est-à-dire, si les relations :

$$x \sim xy \quad \text{et} \quad x \sim xz$$

sont vérifiées, on a $x \sim x(yz)$ et, par suite, $yz \in A_x$. Supposons, à présent, que yz soit un élément de A_x ; alors :

(2) $$x \sim x(yz) \ .$$

Puisque, par définition de $\sim$, $z \sim z^2$, la relation (2) entraîne :

$$x \sim xz$$

d'où $z \in A_x$.

Mais, toujours en vertu de la définition de $\sim$, la relation (2) s'écrit aussi :

$$x \sim (xz)\, y \ .$$

Comme $z \in A_x$, on a $x \sim y$. Par conséquent $y \in A_x$. On a, ainsi, démontré que A_x est une face de D, c'est-à-dire que $D - A_x$ est un idéal premier de D.

Désignons par α l'ensemble des idéaux premiers de la forme $D - A_x$, lorsque x parcourt le demi-groupe D. Nous allons montrer que les relations d'équivalence $\sim$ et $\overset{\alpha}{\sim}$ coïncident.

Supposons que la relation :

(3) $$x \sim y$$

soit vérifiée pour deux éléments x et y de D. D'autre part, supposons que :

$$x \notin I$$

pour un élément I de $\mathfrak{a}$.

Par définition de $\mathfrak{a}$, il existe un élément z de D pour lequel :

$$I = D - A_z .$$

Par conséquent :

$$z \sim zx .$$

On a alors, d'après (3),

$$z \sim zy$$

c'est-à-dire que $y \notin I$.

La relation $\sim$ étant symétrique, nous voyons que si $y \notin I$, alors $x \notin I$ et, par suite, on a :

$$x \overset{\mathfrak{a}}{\sim} y .$$

Supposons, à présent, que x et y soient liés par la relation $\overset{\mathfrak{a}}{\sim}$. Alors, pour chaque élément z de D, on a $x \in A_z$ si et seulement si $y \in A_z$; ou encore, la relation $z \sim zx$ est vérifiée si et seulement si la relation $z \sim zy$ l'est. En particulier, en prenant $z = x$, et, puisque l'on a, par définition de $\sim$,

$$x \sim x^2 \qquad \text{alors} \quad x \sim xy .$$

D'une manière analogue nous obtenons :

$$y \sim xy .$$

D'où

$$x \sim y .$$

Nous avons donc démontré que l'application φ est surjective.

La seconde partie du théorème est, à présent, évidente.

COROLLAIRE. - Le demi-groupe quotient de D par la relation $\overset{\mathfrak{J}}{\sim}$ est l'image homomorphe demi-réticulée maximale de D.

2. Eléments de la décomposition demi-réticulée maximale d'un demi-groupe.

Si elle n'est pas vide, l'intersection d'une famille quelconque de faces d'un demi-groupe D est encore une face de D. On peut donc parler de la plus petite face $N(x)$ contenant un élément x de D, qui est l'intersection de toutes les faces qui contiennent x.

DÉFINITION 3. - Soit x un élément du demi-groupe D et soit $N(x)$ la plus petite face de D contenant x. Nous appellerons N-classe de D (associée à l'élément x), le complexe :

$$N_x = \{y \ ; \ y \in D \ ; \ N(y) = N(x)\} .$$

Nous noterons Y l'ensemble des N-classes distinctes de D muni de l'opération :

$$N_x N_y = N_{xy} .$$

L'équivalence $\overset{\mathfrak{J}}{\sim}$ peut être caractérisée au moyen des N-classes. On a, en effet,

$$x \overset{\mathfrak{J}}{\sim} y \iff N_x = N_y .$$

Nous pouvons, par conséquent, énoncer le théorème :

THÉORÈME 2. - L'ensemble Y des N-classes distinctes de D représente la décomposition demi-réticulée maximale de D.

Par suite, chaque N-classe est un sous-demi-groupe de D.

Dans la suite N_x désignera soit une partie de D soit un élément de Y ; il ne pourra en résulter aucune confusion ; l'ensemble Y est muni d'une relation d'ordre partiel, $\leqslant$, définie, en termes de N-classes, par :

$$N_x \leqslant N_y \iff N_x N_y = N_x .$$

Le théorème 3 permettra de construire les ensembles $N(x)$. Pour cela, posons :

$$N_1(x) = \{x^m \ ; \ m \text{ entier } > 0\} .$$

Pour $n \geqslant 1$, définissons $N_{n+1}(x)$ comme étant le demi-groupe engendré par les éléments y de D tels que :

$$N_n(x) \cap J(y) \neq \emptyset$$

où $J(y)$ est l'idéal bilatère de D engendré par y.

On a alors :

THÉORÈME 3. - Pour tout élément x du demi-groupe D ; on a

$$N(x) = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n(x) .$$

Démonstration. - On a, évidemment, pour chaque entier positif n, l'inclusion

$$N_n(x) \subseteq N_{n+1}(x) .$$

Donc, le complexe $T = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n(x)$ est un sous-demi-groupe de D.

Si, d'autre part, le produit de deux éléments y et z de D appartient à T, il existe un entier positif n pour lequel :

$$yz \in N_n(x) \cap J(y) \cap J(z) .$$

Par suite, y et z appartiennent à $N_{n+1}(x)$ et donc :

$$y \in T \quad \text{et} \quad z \in T .$$

On a ainsi démontré que T est une face de D, qui contient, par construction, l'élément x.

Si, à présent, N est une face de D et si $x \in N$, on a, d'après la définition d'une face :

$$N_n(x) \subseteq N$$

et ceci pour tous les entiers positifs n.

Par conséquent

$$T = N(x) .$$

Le théorème suivant concerne la structure des N-classes.

THÉORÈME 4. - Aucun idéal bilatère d'une N-classe ne possède, en tant que demi-groupe, d'idéal premier non vide.

Démonstration. - Nous démontrerons le théorème en établissant que la seule face d'un idéal I d'une N-classe N_z, du demi-groupe D, est I lui-même.

Soient donc N une face de I, x un élément de N et y un élément de I. Nous avons, dans le demi-groupe D et d'après la définition de la N-classe N_z :

$$N(x) = N(y) = N(z) .$$

Par suite, $y \in N(x)$. Aussi aurions-nous démontré le théorème, si nous avions montré l'inclusion :

$$N(x) \cap I \subseteq N .$$

La démonstration se fait par récurrence sur l'indice des demi-groupes $N_n(x)$ (cf. théorème 3).

Soit $w \in N_1(x)$; il existe, alors, un entier positif m pour lequel

$$w = x^m .$$

Puisque $x \in N$, on a $w \in N$. Par conséquent $N_1(x) \subseteq N$; d'où

$$N_1(x) \cap I \subseteq N .$$

Supposons que l'on ait $N_n(x) \cap I \subseteq N$ et soit $w \in N_{n+1}(x) \cap I$. Alors, par définition du demi-groupe $N_{n+1}(x)$, on peut écrire :

$$w = w_1 \, w_2 \, \dots \, w_k ,$$

où, pour $i = 1, 2, \dots, k$, w_i est un élément de D pour lequel il existe deux éléments a_i et b_i de D^1 [D^1 désignant le demi-groupe obtenu en adjoignant à D un élément unité] tels que $a_i \, w_i \, b_i \in N_n(x)$. Puisque $N_n(x) \subseteq N(x)$, on a :

$$a_i \, w_i \, b_i \in N(x) ;$$

d'où

$$xa_i \, w_i \, b_i \, x \in N(x) .$$

Il en résulte que :

$$N(xa_i \, w_i \, b_i \, x) \subseteq N(x) .$$

Mais l'on a aussi $x \in N(xa_i \, w_i \, b_i \, x)$, car $N(xa_i \, w_i \, b_i \, x)$ est une face de D et, par suite, contient chacun des facteurs d'un produit qui lui appartient. Donc

$$N(x) \subseteq N(xa_i \, w_i \, b_i \, x) .$$

Par conséquent

$$N(x) = N(xa_i \, w_i \, b_i \, x) .$$

Dès lors $xa_i \, w_i \, b_i \, x$ est un élément de N_x.

Puisque x appartient au demi-groupe $N_n(x)$, nous avons

$$xa_i \, w_i \, b_i \, x \in N_n(x) \cap N_x .$$

Donc, puisque I est un idéal de N_x

$$x(xa_i \, w_i \, b_i \, x) \, x \in I .$$

On démontre de la même façon que les éléments : $x^2 \, a_i$, $x^2 \, a_i \, w_i$, $w_i \, b_i \, x^2$, $b_i \, x^2$ appartiennent à I. Par suite, la relation :

$$x^2 \, a_i \, w_i \, b_i \, x^2 \in N_n(x) \cap I \subseteq N$$

entraîne

$$x^2 \, a_i \, w_i \quad \text{et} \quad w_i \, b_i \, x^2 \in N ,$$

puisque N est une face de I.

Comme précédemment, on en déduit que $x^2 a_1 w_1 w_2 \in I$. Des relations :

$$(x^2 a_1 w_1 w_2)(b_2 x^2) = (x^2 a_1 w_1)(w_2 b_2 x^2) \in N \quad \text{et} \quad b_2 x^2 \in I$$

il suit :

$$x^2 a_1 w_1 w_2 \in N .$$

En répétant ce procédé $k-2$ fois, nous obtenons :

$$x^2 a_1 w_1 w_2 \dots w_k = x^2 aw \in N .$$

Donc, puisque $x^2 a_1 \in I$, nous obtenons $w \in N$. Il en résulte que : $N = I$.

COROLLAIRE 1. - Tout demi-groupe est un demi-treillis de demi-groupes sans idéaux premiers non vides (cf. G. THIERRIN [6], théorèmes 3 et 5).

COROLLAIRE 2. - Tout idéal premier d'un demi-groupe est une réunion de N-classes.

COROLLAIRE 3. - Il existe une bijection isotone, par rapport à l'inclusion, entre l'ensemble des idéaux premiers d'un demi-groupe D et l'ensemble des idéaux premiers de l'image homomorphe demi-réticulée maximale Y de D (cf. [7], théorème 5).

COROLLAIRE 4. - Pour un demi-groupe D , les deux conditions suivantes sont équivalentes :

a. D ne possède aucun idéal premier non vide.

b. D ne possède qu'une seule N-classe.

THÉORÈME 5. - Soit x un élément d'un demi-groupe D . La N-classe N_x est, par rapport à l'inclusion, le plus grand sous-demi-groupe de D qui contienne x et qui ne possède pas d'idéal premier non vide.

Démonstration. - Soit T un sous-demi-groupe de D contenant x ; supposons que $T \not\subseteq N_x$. Il existe alors un élément y de T pour lequel $N_x \neq N_y$.

Soit N le demi-groupe défini par les conditions :

$$N = T \cap N(x) \qquad \text{si} \quad N_x \not< N_y$$

$$N = T \cap N(y) \qquad \text{si} \quad N_x < N_y$$

où la relation d'ordre $\leqslant$ est définie par :

$$N_x \leqslant N_y \qquad \text{si et seulement si} \quad N_x N_y = N_x .$$

On établit facilement que :

$$N(x) = \bigcup_{N_z \geq N_x} N_z \quad \text{et que} \quad N(y) = \bigcup_{N_z \geq N_y} N_z .$$

Dans le cas où $N_x \not< N_y$, nous avons $x \in N$ et $y \notin N$.

Dans le cas où $N_x < N_y$, nous avons $x \notin N$ et $y \in N$.

Par suite, dans chaque cas, N est une face de T distincte de T. Donc $T - N$ est un idéal premier non vide de T. Le théorème 5 résulte à présent du théorème 4.

3. Quelques propriétés des N-classes.

On peut établir des relations intéressantes entre certaines propriétés concernant les N-classes d'un demi-groupe D et certaines propriétés concernant D lui-même.

En manière d'exemple, nous démontrerons le théorème suivant.

THÉORÈME 6. - Pour un demi-groupe D , les conditions suivantes sont équivalentes :

a. Chaque N-classe de D est un groupe ;

b. Tous les idéaux à gauche et tous les idéaux à droite d'une N-classe de D sont des idéaux bilatères semi-premiers ;

c. Tous les idéaux à gauche et tous les idéaux à droite de D sont des idéaux bilatères semi-premiers ;

d. Pour tout $x \in D$ on a :

$$Dx = xD \quad \text{et} \quad x \in Dx^2 .$$

De plus, si l'une des conditions précédentes est vérifiée, la condition :

e. Pour tout $x \in D$, $N_x = \{y \ , \ y \in D \ ; \ xD = yD\}$ l'est aussi.

Démonstration. - L'implication (a) $\Longrightarrow$ (b) est triviale.

L'implication (b) $\Longrightarrow$ (c) résulte des égalités $N_x = N_{x^2}$ et $N_{xy} = N_{yx}$.

Implication (c) $\Longrightarrow$ (d). - Soit x un élément de D ; l'idéal à gauche Dx^2 étant un idéal bilatère semi-premier, de l'appartenance $x^4 \in Dx^2$, il suit que $x \in Dx^2$. On voit de la même façon que $x \in x^2 D$. Puisque $Dx^2 \subseteq Dx$, on a $x \in Dx$; donc, Dx est le plus petit idéal à gauche qui contient x . On montre de la même façon que xD est le plus petit idéal à droite qui contient x. Comme, d'autre part, Dx et xD sont des idéaux bilatères, on a $Dx = xD$.

<u>Implication (d) $\Longrightarrow$ (e)</u>. - Soit x un élément de D. Posons :

$$P(x) = \{y \; ; \; y \in D \; ; \; xD \subseteq yD\} .$$

On a $x \in P(x)$.

D'autre part :

$$x \in x^2 D \subseteq x\, Dx \subseteq x\, Dx\, D .$$

Si, donc, y et z sont deux éléments de $P(x)$, c'est-à-dire si les relations :

$$xD \subseteq yD \quad \text{et} \quad xD \subseteq zD$$

sont vérifiées, on a

$$x \in yDzD = yzD^2 \subseteq yzD .$$

D'où $yz \in P(x)$ et $P(x)$ est un sous-demi-groupe de D.

Supposons, à présent, que yz soit un élément de $P(x)$. Nous avons

$$xD \subseteq yzD .$$

D'où

$$xD \subseteq yD .$$

Et, par conséquent

$$y \in P(x) .$$

D'autre part, puisque $yzD = Dyz$, nous avons aussi

$$xD \subseteq Dyz \subseteq Dz = zD .$$

Et, alors, $z \in P(x)$. Donc $P(x)$ est une face de D et contient x. Dès lors :

$$N(x) \subseteq P(x) .$$

Mais, si y est un élément de $P(x)$, c'est-à-dire si

$$xD \subseteq yD$$

il existe un élément a de D pour lequel

$$x^2 = ya .$$

Donc

$$N_x = N_{x^2} = N_{ya}$$

c'est-à-dire que $ya \in N_x \subseteq N(x)$.

Comme $N(x)$ est une face de D, on a alors $y \in N(x)$. Par suite $P(x) \subseteq N(x)$; d'où $P(x) = N(x)$.

Nous avons donc démontré que :

$$N_x = \{y \ ; \ y \in D \ ; \ xD = yD\} .$$

Implication (d) $\Longrightarrow$ (a). - Nous allons montrer, en utilisant la condition (e) que pour chaque élément y de N_x, on peut trouver un élément z de N_x tel que :

$$x = zy .$$

Ceci établit l'existence des quotients à gauche dans N_x.

On démontre, de façon analogue, l'existence des quotients à droite.

Puisque $x \in x^2 D$ et que $xD = yD = Dy$, il existe deux éléments a et b de D pour lesquels sont vérifiées les égalités :

$$x = x^2 a = x(xa) = x(by) = (xb) y .$$

Nous avons donc :

$$N_x = N_{xb} N_y = N_{xb} N_x = N_{xb} .$$

D'où $xb \in N_x$. Ainsi, N_x est un groupe.

On peut remplacer la condition (a) du théorème 5 par des conditions telles que :

a'. Chaque N-classe est un demi-groupe simple à gauche.

a". Chaque N-classe est un demi-groupe simple.

a"'. Chaque N-classe est un demi-groupe complètement simple.

On obtient alors des conditions, portant sur le demi-groupe D et qui sont équivalentes à (a') (resp. (a") ; resp. (a"')) [cf. [3]].

4. Quelques expressions de $N(x)$.

THÉORÈME 7. - On a $DxD = Dx^2 D$ pour tout élément x d'un demi-groupe D, si et seulement si :

$$N(x) = \{y \ ; \ y \in D \ ; \ DxD \subseteq DyD\}$$

pour tout élément x de D.

Démonstration. - En effet supposons que l'on ait l'égalité

$$Dx\,D = Dx^2\,D$$

pour tout élément x de D. Soit $P(x) = \{y\ ;\ y \in D\ ;\ Dx\,D \subseteq Dy\,D\}$. Evidemment x est un élément de $P(x)$. Soient y et z deux éléments de $P(x)$; on a donc :

$$Dx\,D \subseteq Dy\,D \quad \text{et} \quad Dx\,D \subseteq Dz\,D\ .$$

Si a est un élément quelconque de D, de l'égalité :

$$Dzay\,D = Dzay\,zay D$$

il suit :

$$Dzay\,D \subseteq Dyz\,D\ .$$

D'où

$$Dz\,Dy\,D \subseteq Dyz\,D\ ,$$

Mais l'on a :

$$Dx\,D = Dx^4\,D \subseteq Dx\,D.Dx\,D \subseteq Dz\,Dy\,D\ .$$

Donc

$$Dx\,D \subseteq Dyz\,D \quad \text{et} \quad yz \in P(x)\ .$$

Par conséquent $P(x)$ est un sous-demi-groupe de D. Supposons que yz soit un élément de $P(x)$: Nous avons donc

$$Dx\,D \subseteq Dyz\,D\ .$$

D'où il suit

$$Dx\,D \subseteq Dy\,D \quad \text{et} \quad Dx\,D \subseteq Dz\,D\ .$$

Par suite, $P(x)$ est une face de D contenant x. On a donc :

$$N(x) \subseteq P(x)\ .$$

Soit $y \in P(x)$; on a :

$$x^3 \in Dx\,D \subseteq Dy\,D \subseteq J(y)$$

où $J(y)$ est l'idéal bilatère de D engendré par y. Donc $x^3 \in N_1(x) \cap J(y)$, et, par suite, $y \in N_2(x)$. Comme $N_2(x) \subseteq N(x)$, y appartient à $N(x)$. Par conséquent $P(x) \subseteq N(x)$; d'où $P(x) = N(x)$.

Réciproquement, si $N(x) = \{y\ ;\ y \in D\ ;\ Dx\,D \subseteq Dy\,D\}$ et puisque $x^2 \in N(x)$, alors $Dx\,D \subseteq Dx^2\,D$ et, donc,

$$Dx\,D = Dx^2\,D\ .$$

COROLLAIRE. - Si le demi-groupe D est idempotent, on a, pour tous les éléments x de D, $N(x) = \{y \; ; \; y \in D \; ; \; x = xyx\}$.

Démonstration. - En vertu du théorème 7, il suffit de montrer que, pour tous les éléments x et y de D, l'inclusion :

$$DxD \subseteq DyD$$

est satisfaite si et seulement si l'on a $x = xyx$.

La condition est nécessaire, car de $DxD \subseteq DyD$, il suit

$$x = x^3 = ayb$$

où a et b sont deux éléments de D. Par conséquent

$$x = aybx = a(ybx)(ybx) = (aybx)(ybx) .$$

Donc

$$x = x(ybx) = (xy)^2 bx = (xy)(xybx) = xyx .$$

La condition est suffisante. En effet si $x = xyx$, on a, quels que soient les éléments a et b de D :

$$axb = (ax)\, y(xb) \in DyD .$$

Par conséquent

$$DxD \subseteq DyD .$$

Il résulte de ce corollaire, que, lorsque le demi-groupe D est idempotent, on a, pour tout élément x de D :

$$N_x = \{y \; ; \; y \in D \; ; \; x = xyx \; ; \; y = yxy\} ,$$

résultat obtenu précédemment par D. McLEAN [2].

DEFINITION 4. - Un demi-groupe D est dit faiblement commutatif si, pour chaque couple d'éléments x et y de D, il existe un couple d'éléments a et b de D et un entier naturel k pour lesquels l'égalité :

$$(xy)^k = ax = yb$$

est vérifiée.

THÉORÈME 8. - Si le demi-groupe D est faiblement commutatif on a, pour tout élément x de D :

$$N(x) = \{y \; ; \; y \in D \; ; \; \exists \; n \text{ , entier naturel : } x^n \in Dy\} .$$

<u>Démonstration</u>. - Posons $P(x) = \{y \ ; \ y \in D \ ; \ \exists \ n$ entier naturel $x^n \in Dy\}$. On a évidemment $P(x) \subseteq N(x)$; puisque x est un élément de $P(x)$, il suffira de démontrer que $P(x)$ est une face de D pour conclure que $P(x) = N(x)$.

Soient y et z deux éléments de $P(x)$; il existe donc deux éléments a et b de D et deux entiers naturels m et n pour lesquels on a :

$$x^m = ay \quad \text{et} \quad x^n = bz .$$

Puisque D est faiblement commutatif, il existe un entier naturel r et un élément c de D, pour lesquels l'égalité :

$$x^{nr} = (bz)^r = zc$$

est vérifiée.

Il en résulte que :

$$x^{m+nr} = [a(yz)]\ c ,$$

Il existe alors un entier naturel k et un élément d de D pour lesquels on a :

$$x^{(m+nr)k} = d.a(yz) .$$

Donc $yz \in P(x)$.

Inversement supposons que $yz \in P(x)$, c'est-à-dire que : $x^m = ayz$, m entier naturel, $a \in D$. Donc $x^m = (ay)z$ et $z \in P(x)$. D'autre part, on a :

$$x^{mk} = b(ay)$$

pour un entier naturel k et un élément b de D. Donc $y \in P(x)$.

Il résulte du théorème 8, que lorsque le demi-groupe D est faiblement commutatif, on a :

$$N_x = \{y \ ; \ y \in D \ ; \ \exists \ n \text{ entier naturel} : x^n \in Dy \text{ et } y^n \in Dx\} ,$$

expression d'une N-classe, précédemment obtenue par T. TAMURA et N. KIMURA [4] dans le cas particulier où D est commutatif.

Nous supposerons à présent que le demi-groupe D est périodique ; nous désignerons par E l'ensemble des idempotents de D et si $e \in E$, nous poserons :

$$K^{(e)} = \{x , \ x \in D , \ x^n = e \text{ pour un entier naturel } n\} .$$

THÉORÈME 9. - <u>Soit</u> D <u>un demi-groupe périodique</u> ; D <u>est faiblement commutatif si et seulement si chaque complexe</u> $K^{(e)}$ <u>est une</u> N<u>-classe de</u> D.

<u>Démonstration</u>. - La condition est suffisante. Supposons que pour tout idempotent

e , on ait

$$K^{(e)} = N_x$$

où $x \in K^{(e)}$.

Nous avons, si a et b sont deux éléments de D

$$ab\ ,\ ba \in N_{ab} = K^{(f)}$$

où $f \in E$ et, donc,

$$(ab)^m = (ba)^n = f$$

où m et n sont deux entiers naturels. Par conséquent :

$$\begin{aligned}(ab)^m &= (ba)^{2n} \\ &= b[a(ba)^{2n-1}] = [(ba^{2n-1}\ b]\ a\ .\end{aligned}$$

La condition est nécessaire. En effet, supposons D faiblement commutatif. Pour chaque élément x de D , N_x est un sous-demi-groupe de D et, par conséquent, il contient un idempotent. Si e et f appartiennent à $E \cap N_x$ nous avons, d'après le théorème 8,

$$e = af \quad \text{et} \quad f = be$$

où a et b sont deux éléments de D .

Par suite

$$ef = (af)\ f = af = e \quad \text{et} \quad fe = (be)\ e = be = f\ .$$

D'autre part, il existe un entier naturel k et deux éléments c et d de D pour lesquels on a :

$$(ef)^k = ce = fd\ .$$

D'où

$$e = e^k = (ef)^k = fd\ .$$

Par conséquent

$$f = fe = f(fd) = fd = e\ .$$

Donc

$$N_x \subseteq K^{(e)}\ .$$

Mais il est évident que $K^{(e)} \subseteq N_x$. Et nous avons alors

$$N_x = K^{(e)}\ .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] CLIFFORD (A. H.). - Résumé de [8], Math. Reviews, t. 17, 1956, p. 584.

[2] McLEAN (David). - Idempotent semigroups, Amer. math. Monthly, t. 61, 1954, p. 110-113.

[3] PETRICH (Mario). - The maximal semilattice decomposition of a semigroup, Bull. Amer. math. Soc., t. 69, 1963, p. 342-344 ; Math. Z., t. 85, 1964, p. 68-82.

[4] TAMURA (T.) and KIMURA (N.). - On decompositions of a commutative semigroup, Kôdai math. Sem. Rep., t. 4, 1954, p. 109-112.

[5] THIERRIN (Gabriel). - Quelques propriétés des sous-groupoïdes consistants d'un demi-groupe abélien D , C. R. Acad. Sc. Paris, t. 236, 1953, p. 1837-1839.

[7] THIERRIN (Gabriel). - Sur quelques décompositions des groupoïdes, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 242, 1956, p. 596-598.

[8] YAMADA (M.). - On the greatest semilattice decomposition of a semigroup, Kôdai math. Sem. Rep., t. 7, 1955, p. 59-62.