Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Michel Lazard

Les zéros des fonctions analytiques d'une variable sur un corps valué complet

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 16, n° 1 (1962-1963), exp. n° 6, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1962-1963__16_1_A6_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
16e année, 1962/63, n° 6

10 décembre 1962

LES ZÉROS DES FONCTIONS ANALYTIQUES D'UNE VARIABLE SUR UN CORPS VALUÉ COMPLET

par Michel LAZARD

Cet exposé reprend, sous une forme plus géométrique, quelques résultats d'un article [1] qui sera désigné par les lettres [ZFA].

1. Corps valués ; corps complets et maximalement complets.

(1.1) Nous appelons ici corps valué un corps commutatif K muni d'une application $v : K \to \underset{\sim}{R} \cup \{+\infty\}$ vérifiant les axiomes suivants :

(1.1.1) $$v(x) = \infty \iff x = 0 ;$$

(1.1.2) $$v(xy) = v(x) + v(y) ;$$

(1.1.3) $$v(x + y) \geqslant \inf(v(x) , v(y)) .$$

L'ensemble des $v(x)$, pour $x \in K^*$, est un sous-groupe additif de $\underset{\sim}{R}$. Nous écartons le cas trivial où ce sous-groupe se réduit à zéro. Nous disons que la valuation est discrète si ce groupe additif est discret (et, quitte à multiplier les $v(x)$ par une constante, nous pourrons supposer que c'est $\underset{\sim}{Z}$) ; sinon nous dirons qu'elle est dense.

(1.2) Soit m un nombre > 0 . Les axiomes des valuations permettent de vérifier que les relations

(1.2.1) $$v(x - y) \geqslant m ,$$

(1.2.2) $$v(x - y) > m ,$$

entre éléments x et y de K , sont des relations d'équivalence. Si la valuation est discrète (disons à valeurs dans $\underset{\sim}{Z}$), il suffit de faire parcourir à m l'ensemble $\underset{\sim}{Z}$ des $v(x)$ et, dans (1.2.2) , on peut remplacer " $> m$ " par " $\geqslant (m + 1)$ ". Par contre, si la valuation est dense, les relations des types (1.2.1) et (1.2.2) sont essentiellement différentes.

---

(1) LAZARD (Michel). - Les zéros des fonctions analytiques d'une variable sur un corps valué complet. - Paris, Presses universitaires de France, 1962 (Institut des Hautes Etudes scientifiques, Publications mathématiques, 14 ; p. 47-75). M. KRASNER m'a fait la remarque que le théorème attribué à SCHNIRELMANN avait été prouvé antérieurement par SCHÖBE.

(1.2.3) La topologie du corps K associée à sa valuation se définit en prenant comme système fondamental de voisinages d'un élément $x \in K$ les classes d'équivalence (1.2.1) ou (1.2.2) de x. Ces classes seront dites (fort improprement) disque "fermé" (resp. disque "ouvert") de valuation m et de centre x. En fait ce sont des parties ouvertes et fermées de K.

La topologie de K peut être définie par une distance : on choisit un nombre e, $0 < e < 1$, et on pose $d(x, y) = e^{v(x-y)}$, Le corps K devient alors un espace ultramétrique : (1.1.3) est l'inégalité du triangle renforcée (tous les triangles sont isocèles).

(1.2.4) Le corps K est dit <u>complet</u> s'il est complet pour la métrique qu'on vient de définir. Dans un corps complet, on a un critère de convergence très commode pour les séries.

(1.2.5) Une série $\sum_n u_n$ ($u_n \in K$, corps valué complet) converge si et seulement si son terme général tend vers zéro, c'est-à-dire si $v(u_n) \to +\infty$. De plus, s'il existe un indice n_0 tel que $v(u_{n_0}) < v(u_n)$ pour tout $n \neq n_0$, alors $v(\sum_n u_n) = v(u_{n_0})$.

(1.2.6) La propriété d'être complet peut encore se formuler comme suit : un corps valué K est complet si toute famille de disques emboîtés, dont les valuations tendent vers $+\infty$, a une intersection non vide.

(1.2.7) Cette propriété n'implique pas que toute famille de disques emboîtés ait une intersection non vide. En voici un exemple. Prenons un corps k quelconque, et formons le corps K dont les éléments sont des séries formelles

$$x = \sum_{n \geq 0} a_n T^{r(n)}, \qquad a_n \in k ;$$

$\{r(n)\}_{n \geq 0}$ est une suite indéfiniment croissante de nombres rationnels, et, si $x \neq 0$, on suppose $a_0 \neq 0$, $v(x) = r(0)$. Considérons la suite $\{x_n\}_{n \geq 1}$ définie par

$$x_n = T^{1/2} + \dots + T^{(n-1)/n} .$$

Les disques D_n de centres x_n et de valuations $n/(n+1)$ sont emboîtés ; leur intersection est vide, bien que K soit complet.

(1.2.8) Un corps valué K est dit <u>maximalement complet</u> si toute famille de disques emboîtés a une intersection non vide.

Pour une valuation discrète, "complet" équivaut à "maximalement complet" ; cela est faux pour une valuation dense (1.2.7).

II. Convergence des séries de Laurent ; polygones de Newton.

(2.1) Appliquons le critère de convergence (1.2.5) aux séries de Laurent $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n T^n$ dont les coefficients a_n appartiennent à un corps valué complet K. L'indéterminée T sera remplacée par un élément x de K, ou d'une extension valuée complète L de K.

(2.1.1) Soient $x \in K$ (ou L), $v(x) = \mu$. La série de Laurent $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n x^n$ converge si et seulement si

$$\lim_{|n| \to \infty} v(a_n) + n\mu = +\infty .$$

(2.1.2) Pour calculer les nombres $v(a_n) + n\mu$, on utilise le procédé graphique suivant (figure 1) : on trace le point A_n d'abscisse n et d'ordonnée $v(a_n)$; par ce point on mène une droite Δ_n de pente $-\mu$; on obtient le nombre cherché $v(a_n) + n\mu$ comme ordonnée à l'origine de cette droite Δ_n.

(2.1.3) Il faut étudier les droites Δ_n pour tous les $n \in \mathbb{Z}$. Elles possèdent une "borne inférieure" Δ : c'est la droite de pente $-\mu$ et d'ordonnée à l'origine,

$$v(f\ ,\ \mu) = \inf_{n \in \mathbb{Z}} (v(a_n) + n\mu) .$$

Le critère (2.1.1) s'exprime ainsi : pour que la série converge, il faut et il suffit que la droite Δ ne soit pas rejetée à l'infini (c'est-à-dire $v(f\ ,\ \mu) > -\infty$), et que les points A_n s'éloignent indéfiniment de Δ (pour $|n| \to \infty$).

(2.1.4) Pour chaque $\mu \in \mathbb{R}$ nous obtenons ainsi une droite Δ (éventuellement à l'infini), que nous appellerons désormais $\Delta(\mu)$. Si nous faisons varier μ dans $\mathbb{R}$ l'intersection des demi-plans supérieurs limités par ces droites a pour frontière un polygone convexe : c'est le <u>polygone de Newton</u> de la série de Laurent f. Chaque $\Delta(\mu)$ est la <u>droite d'appui</u> de pente $-\mu$ du polygone de Newton. Les abscisses des sommets du polygone sont des entiers ; si n est l'abscisse d'un sommet, $v(a_n)$ est son ordonnée. La figure 2 représente le polygone de Newton de la série $\log(1 + T) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} T^n/n$, pour $p = 2$ $(v(2) = 1)$.

On voit que c'est un polygone convexe infini ; les sommets ont pour abscisses les nombres 2^i $(i \in \mathbb{N})$.

(2.1.5) Définition. - Un polynôme $P \in K[T]$ sera dit μ-extrémal si $P(0) \neq 0$ et si son polygone de Newton est un segment de pente $-\mu$.

Exemple : $P = T^2 + 3T + 3$ $(p = 3)$, figure 3.

III. Les zéros des séries de Laurent.

(3.1) Soit f une série de Laurent à coefficients dans K (valué complet). Quels sont les zéros possibles de f dans les extensions valuées complètes L de K ?

La dernière assertion de (1.2.5) et nos constructions géométriques nous fournissent déjà une réponse partielle.

(3.1.1) Soient $x \in L$, $v(x) = \mu$. Si la droite d'appui $\Delta(\mu)$ touche le polygone de Newton de f en un seul point d'abscisse n (nécessairement un sommet A_n), alors $v(f(x)) = v(a_n) + n\mu$, et x n'est donc pas zéro de f (si $x = 0$, le problème de savoir si $f(0) = 0$ est trivial).

Par contre, si le polygone possède un côté de pente $-\mu$, nous ne savons encore rien affirmer.

(3.1.2) Définition. - Soit f une série de Laurent. Nous notons $\mathrm{Conv}(f)$ l'intervalle de $\mathbb{R}$ formé des μ tels que $f(x)$ converge pour $v(x) = \mu$ (2.1.2). Si f est une série entière ($a_n = 0$ pour $n < 0$), nous adjoignons $+\infty$ à $\mathrm{Conv}(f)$.

(3.1.3) L'ensemble $\mathrm{Conv}(f)$ est toujours un intervalle de $\overline{\mathbb{R}}$ (comme en analyse classique, une série de Laurent converge sur une "couronne").

La division euclidienne des polynômes s'étend aux séries de Laurent.

(3.2.1) Soient f une série de Laurent à coefficients dans K (valué complet) et P un polynôme μ-extrémal (2.1.5). Alors il existe une série de Laurent g et un polynôme Q, déterminés univoquement par les conditions

$$f = Pg + Q \;,\quad \deg Q < \deg P \;,\quad \mathrm{Conv}(g) \supset \mathrm{Conv}(f) \;,\quad v(Q\,,\mu) \geq v(f\,,\mu)$$

pour $\mu \in \mathrm{Conv}(f)$.

[Pour la démonstration, cf. ZFA, n° 2, lemme 2.]

Le lemme (3.2.1) nous permet de parler de reste de la division de f par P : c'est le polynôme Q.

Le problème soulevé en (3.1) est résolu par les deux assertions suivantes (dues à HENSEL, au moins pour l'essentiel) :

(3.2.2) La valuation d'un corps valué complet K se prolonge d'une manière, et d'une seule, à la clôture algébrique K_a de K. Il en résulte, d'après (2.1.5) et (3.1.1), qu'un polynôme μ-extrémal ($\in K[T]$) se décompose en facteurs linéaires dans $K_a(T)$, toutes ses racines ayant la valuation μ.

(3.2.3) Soit f une série de Laurent. Si son polygone de Newton a un côté de pente $-\mu$, appelons $n(f, \mu)$ et $N(f, \mu)$ les abscisses de l'origine et de l'extrémité de ce côté. Alors f est divisible (au sens de (3.2.1)) par un polynôme μ-extrémal P de degré $N(f, \mu) - n(f, \mu)$, de telle sorte que, si $f = Pg$, le polygone de g n'ait pas de côté de pente $-\mu$. D'après (3.1.1) et (3.2.2), la série f possède donc $N(f, \mu) - n(f, \mu)$ zéros dans K_a (compte tenu des multiplicités).

[Pour la preuve de (3.2.3), cf. ZFA, n° 3, proposition 2.]

Le théorème (3.2.2) peut se démontrer à partir de (3.2.3) ; il se trouve dans tous les ouvrages consacrés aux corps valués (2).

IV. Développements en produits.

(4.1) Les théorèmes (3.1.1) et (3.2.3) nous permettent de "voir" les zéros de f sur son polygone de Newton. Par exemple, la figure 2 nous montre les zéros de la fonction $\log(1 + T)$; ce sont les racines des équations $(1 + x)^{p^h} = 1$.

En fait, nous ne voyons que le nombre de zéros de valuation donnée. Les zéros eux-mêmes restent invisibles.

(4.1.1) Donnons-nous un nombre $M > 0$. Considérons l'anneau A_M des séries <u>entières</u> $f = \sum_{n \geq 0} a_n T^n$ ($a_n \in K$, valué complet) qui convergent pour $v(x) > M$. Géométriquement, cela signifie que leur polygone de Newton a une direction

(2) par exemple : ARTIN (Emil). - Algebraic numbers and algebraic functions. - Princeton, Princeton University, 1950/51 (multigraphié).

asymptotique de pente $\geqslant -M$; analytiquement, cela équivaut à la relation

$$\underline{\lim} \frac{v(a_n)}{n} \geqslant -M \quad .$$

(4.1.2) Nous appellerons "côté significatif" du polygone de Newton d'un $f \in A_M$ un côté de pente $< -M$, c'est-à-dire (3.2.3) un côté qui correspond à des zéros de valuation $> M$.

(4.1.3) Problème. – Pouvons-nous trouver $f \in A_M$ dont les zéros de valuation $> M$ soient donnés arbitrairement ?

Compte tenu de (3.2.3), nous pouvons préciser le mot "arbitrairement". Nous nous donnons une suite (finie ou infinie) de nombres

$$m_1 > m_2 > \dots > M \quad .$$

Si la suite est infinie, nous supposons que m_n tend vers M. Pour chaque n, nous nous donnons un polynôme m_n-extrémal (2.1.5) P_n (nous pouvons supposer $P_n(0) = 0$) de degré $d_n > 0$.

Existe-t-il $f \in A_M$ qui ait précisément comme zéros dans le disque "ouvert" $\{x \mid x \in K_a\ ,\ v(x) > M\}$ ceux des polynômes P_n ?

(4.1.4) Nous énoncerons la question précédente en demandant que le diviseur de $f \in A_M$ soit le produit formel $\prod_{n\geqslant 1}(P_n)$. Cette nouvelle formulation définit le diviseur d'un $f \in A_M$.

(4.2) Il est naturel de chercher la solution du problème posé par des développements en produit

(4.2.1) $$f = \prod_{n\geqslant 1} f_n \qquad (f\ ,\ f_n \in A_M) \quad .$$

Pour cela nous devons définir la convergence dans A_M ; nous prenons la topologie de la convergence uniforme sur tous les diques "fermés" centrés à l'origine, de valuations $> M$.

(4.2.2) Plus précisément nous disons qu'une suite g_n $(\in A_M)$ converge vers g $(\in A_M)$ si les conditions suivantes sont vérifiées : pour tout $m > M$ et tout $\lambda \in R$, il existe un entier n_0 tel que $n \geqslant n_0$ implique $v(g - g_n\ ,\ m) \geqslant \lambda$ (2.1.3).

(4.2.3) La convergence d'un produit $\prod_{n\geqslant 1} f_n$ se définit comme la convergence vers une limite non nulle de la suite des produits partiels $\prod_{1\leqslant i\leqslant n} f_i$.

Le critère de convergence est aussi simple que pour les séries : $\prod_{n\geq 1} f_n$ est convergent si et seulement si f_n tend vers 1.

(4.3) La première étape vers la solution du problème (4.1.4) est la construction du polygone de Newton de la fonction cherchée f. Cette construction est toujours possible, et elle est univoque si nous supposons $f(0) = 1$ et la suite $(m_n)_{n\geq 1}$ infinie, ce que nous ferons désormais. Tous les côtés du polygone de Newton de f sont significatifs (4.1.2).

(4.3.1) Supposons que les degrés d_n des polynômes P_n soient bornés supérieurement. Cela revient à dire que les côtés du polygone de Newton de la fonction cherchée f ont des longueurs bornées. Alors il est impossible de trouver un développement en produit $\prod_{n\geq 1} f_n = f$ dont les facteurs f_n aient des diviseurs finis.

Donnons une "preuve" géométrique de cette assertion (cf. [ZFA], n° 5, proposition 7). Les côtés significatifs des f_n (par abus de langage, pour dire "... des polygones de Newton des séries...") sont parallèles à ceux de f, et de longueur au plus égale, donc bornée. Si nous voulons que les f_n aient des diviseurs finis (c'est-à-dire un nombre fini de côtés significatifs), il faut qu'une infinité de f_n aient au moins un côté significatif. Sans restreindre la généralité, nous pouvons supposer $f_n(0) = 1$ pour tout n, et nous voyons (figure 4) que cela interdit aux f_n de converger vers 1.

(4.4) Le résultat précédent montre que le problème posé ne peut pas être résolu, dans le cas général, par des développements en produits. C'est une curieuse particularité de l'analyse p-adique.

(4.4.1) Par contre, la même figure 4 nous rend l'espoir si la valuation est discrète (disons à valeurs dans $\underset{\sim}{Z}$). En effet, dans ce cas, nous ne pourrons jamais trouver une suite de polynômes m_n-extrémaux P_n dont les degrés soient bornés. Les côtés de leurs polygones de Newton ont des pentes rationnelles, et une suite infinie de nombres rationnels ne peut pas décroître strictement vers $-M$ $(> -\infty)$ sans que leurs dénominateurs croissent indéfiniment. Géométriquement, cela signifie que les côtés des polygones des P_n s'allongent indéfiniment (cf. figure 2).

(4.4.2) Si l'on précise les remarques précédentes, on parvient à résoudre le problème posé par un développement en produit du type de Weierstrass (c'est-à-dire avec des facteurs correctifs), lorsque la valuation est discrète (cf. [ZFA], n° 4, théorème 1).

V. Cas d'une valuation dense.

Si le corps valué complet K possède une valuation dense, on parvient au résultat suivant :

(5.1) Pour que le problème posé en (4.1.3) ait toujours une solution (quels que soient les P_n et le nombre M) il faut et il suffit que K soit maximalement complet (1.2.8).

Donnons quelques indications sur la démonstration ([ZFA], n° 7, théorème 2). Pour montrer que K doit être maximalement complet, nous nous plaçons dans les hypothèses de (4.3.1) en supposant tous les degrés d_n égaux à 1. Cela revient à se donner la suite $(y_n)_{n\geqslant 1}$ des zéros de la fonction cherchée f, avec $v(y_n) = m_n$, et $m_n \searrow M$ (strictement). S'il existe une telle série

$$f = 1 + a_1 T + a_2 T^2 + \dots$$

le coefficient a_1 est une pseudo-somme de la série $-\sum_{n\geqslant 1} y_n^{-1}$. Plus précisément, un résultat concernant la continuité des zéros ([ZFA], n° 3, proposition 3) montre que, pour tout $n \geqslant 1$

$$v(a_1 + \sum_{1\leqslant i\leqslant n} y_i^{-1}) \geqslant v(y_{n+1}^{-1}) .$$

Il est facile de montrer, en généralisant l'exemple (1.2.7) que l'existence d'un tel $a_1 \in K$ pour toutes les suites (y_n) considérées équivaut à la propriété d'être maximalement complet.

(5.2) Il est plus difficile (provisoirement peut-être) de construire la série f en supposant K maximalement complet.

(5.2.1) Rappelons (4.3) que nous connaissons le polygone de Newton de f. Ce polygone sera noté Π. Nous noterons $\Pi(r , \lambda)$ le polygone déduit de Π par une translation de vecteur (r , λ) ; r est un entier $\geqslant 0$, et $\lambda \in \mathbb{R}$ (figure 5). Un cas important est celui où $\lambda = - rM$. Le polygone Π est alors translaté suivant sa direction asymptotique ; il s'enfonce dans son intérieur, et s'éloigne à l'infini quand $r \to \infty$.

(5.2.2) La partie $A(r, \lambda)$ de A_M ([ZFA], n° 6, définition (6.5)) est formée des $f \in A_M$ dont le polygone de Newton est <u>au-dessus de</u> $\Pi(r, \lambda)$.

(5.2.3) On "voit sur la figure", ou on démontre par un calcul simple, que

(5.2.4) $$w(f ; m_n) \geq a_n + r(M - m_n) ,$$

pour tout $f \in A(r, -rM)$; le nombre a_n dépend de n mais non de r .

(5.2.5) On définit comme suit la partie $B(r)$ de A_M ([ZFA], n° 6, définition (6.7)). Les $f \in B(r)$ doivent vérifier

(i) $f(0) = 1$ (pour les normaliser).

(ii) $f \in A(0, 0)$ (c'est-à-dire que leur polygone doit être au-dessus de Π).

(iii) R_n désignant le reste de la division de f par P_n (3.2.1), on doit avoir

$$w(R_n ; m_n) \geq a_n + r(M - m_n) ,$$

où a_n est le même nombre qu'en (5.2.4).

Si l'on peut trouver un $f \in \bigcap_r B(r)$, on vérifie que f possède tous les zéros des P_n (5.2.5, (iii)) et n'en possède pas d'autres (5.2.5, (i) et (ii)).

On construit une suite de fonctions $g_r \in A_M$ vérifiant, pour $r \geq 0$,

(5.2.6) $$g(r) \in B(r) .$$

(5.2.7) $$g_{r+1}(r) - g(r) \in A(r, -rM) .$$

La relation (5.2.7) montre que les g_r convergent vers un élément f qui résout le problème posé.

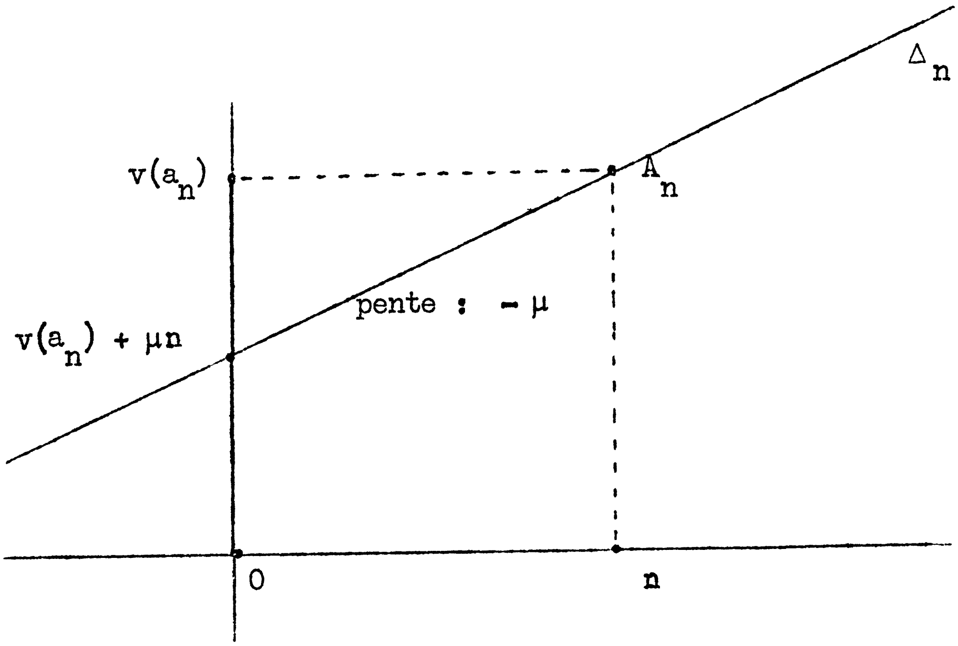
Toute la difficulté est concentrée dans la construction des g_r , ou plutôt dans le passage d'un g_r à un g_{r+1} (vérifiant (5.2.7)). Pour $r = 0$, on peut prendre $g_0 = 1$.

Connaissant un $g_r \in B(r)$, on construit, par un procédé canonique, une suite $f_s \in B(r)$ $(s \geq 0)$ avec $f_0 = g_r$. La série f_s est divisible par P_n pour $1 \leq n \leq s$. La relation entre f_{s-1} et f_s n'est pas très simple. Elle s'exprime par la formule

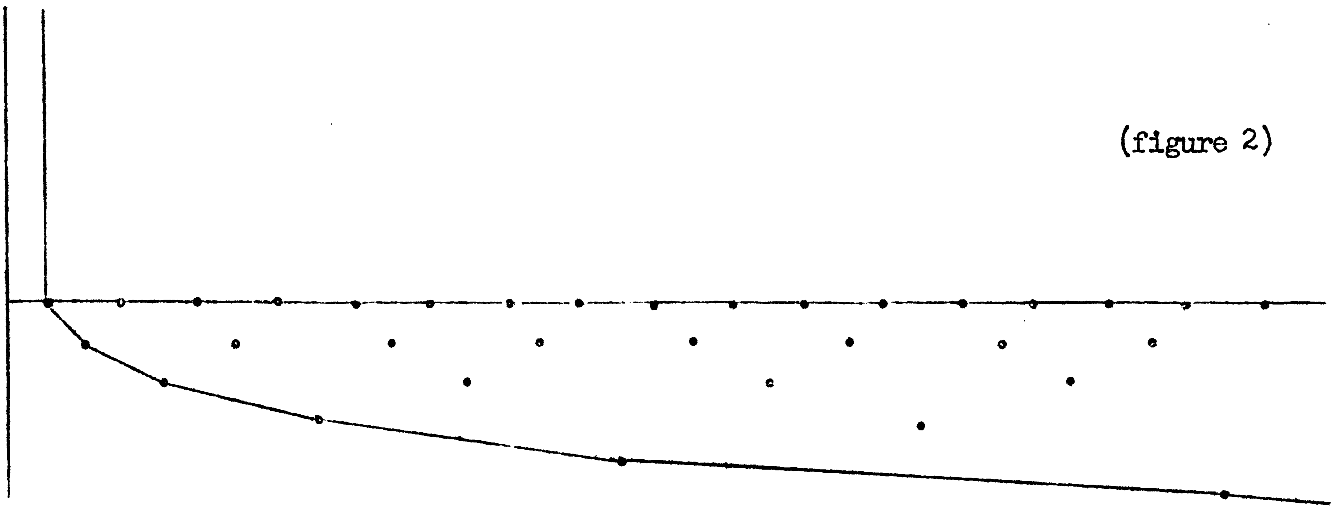
(5.2.8) $$f_s - f_{s-1} \in A(r, -rM) \cap A(r+1, -rM - m_s)$$

qui signifie que le polygone de Newton de $f_s - f_{s-1}$ est au-dessus de <u>deux</u> polygones translatés de Π : le premier, $\Pi(r, -rM)$, est translaté suivant la direction asymptotique, donc reste à l'intérieur de Π ; le second, $\Pi(r+1, -rM-m_s)$ est translaté plus loin vers la droite, mais suivant une direction située au-dessous de la direction asymtotique de Π, si bien qu'il peut sortir de l'intérieur de Π. La construction de f_s à partir de f_{s-1} est le moment essentiel de la démonstration [ZFA, n° 6, lemme 4].

Une fois construite, à partir de g_r, la suite des f_s $(s \geq 0)$, il est aisé de choisir un g_{r+1} vérifiant (5.2.6) et (5.2.8), pourvu que le corps K soit maximalement complet. Sinon ce choix, toujours indéterminé, peut être impossible.

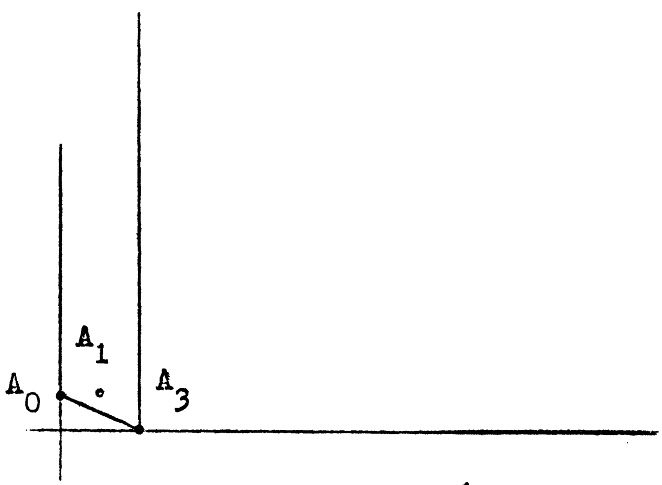


(figure 1)



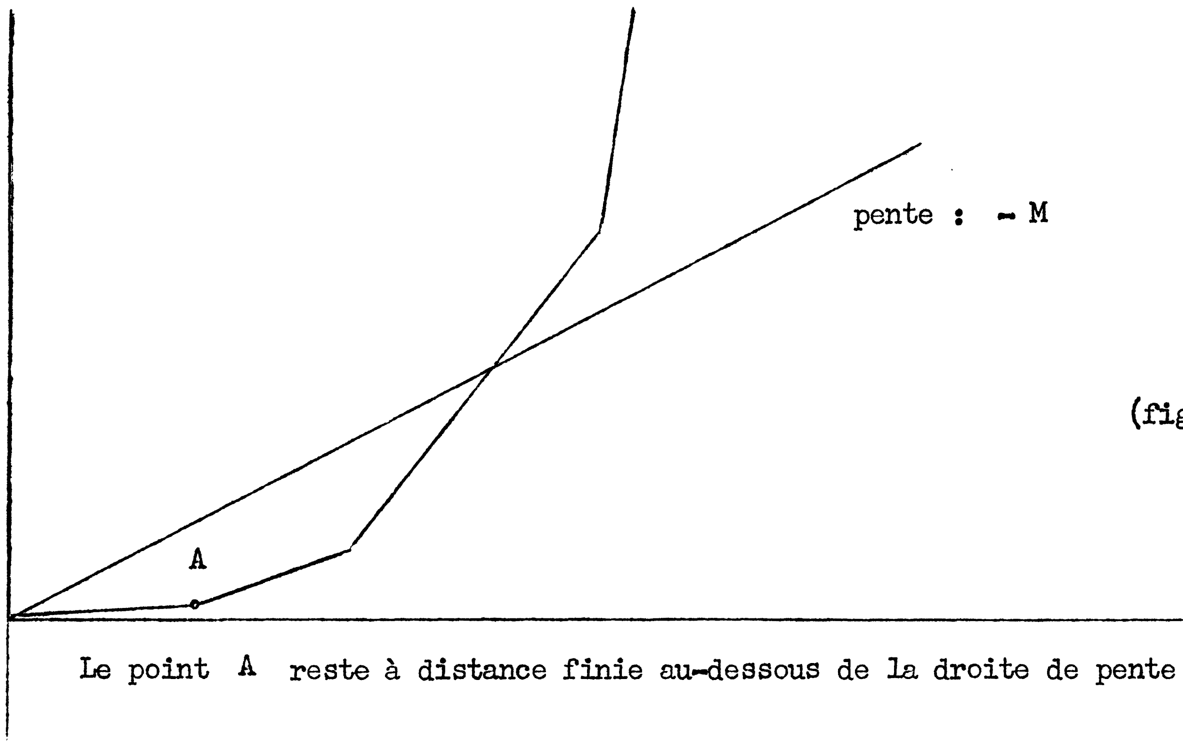
(figure 2)

Polygone de Newton de la série $\log(1 + T)$ $(p = 2)$



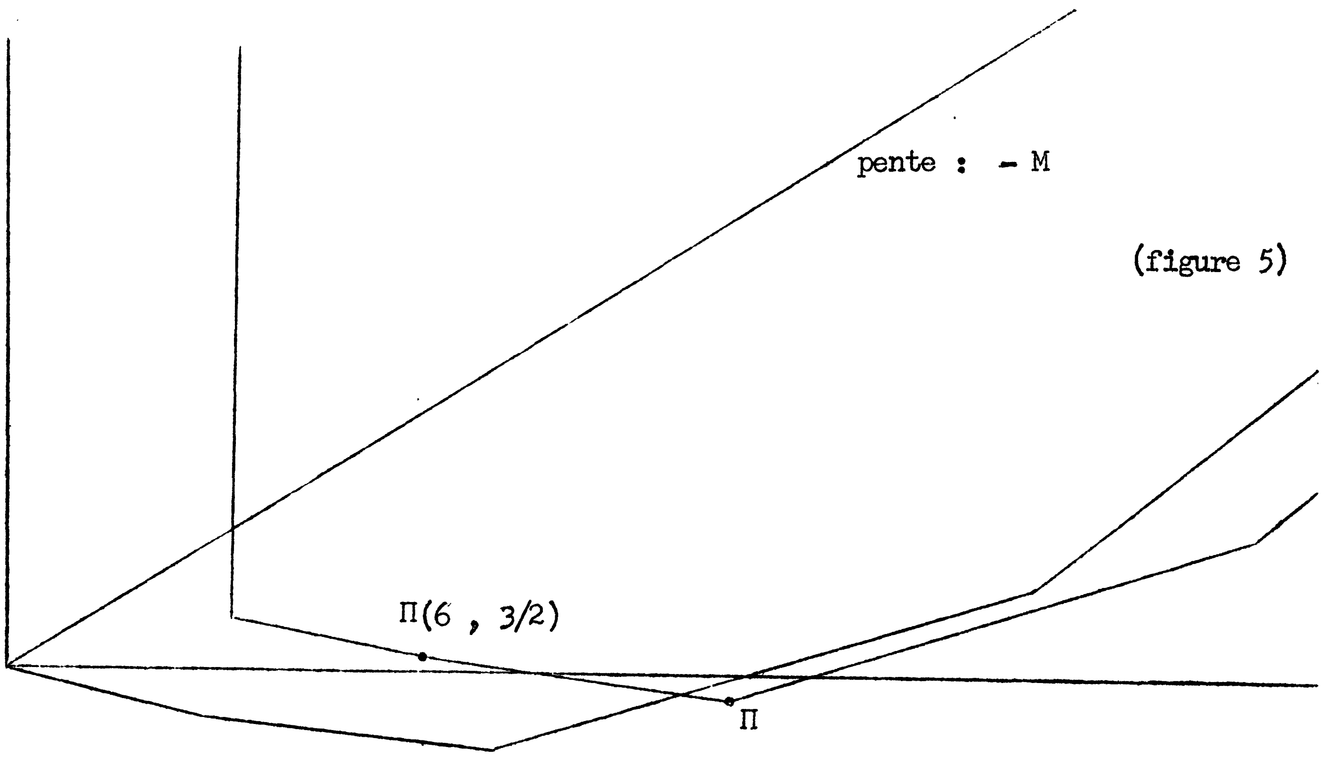
(figure 3)

Un polynôme $\frac{1}{2}$-extrémal



(figure 4)

Le point A reste à distance finie au-dessous de la droite de pente $-M$.



(figure 5)

$d_1 = 5$, $d_2 = 8$, $d_3 = 14$, ...