Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Hyman Bass

Anneaux de Gorenstein

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 16, n° 1 (1962-1963), exp. n° 5, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1962-1963__16_1_A5_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
16e année, 1962/63, n° 5

3 décembre 1962

ANNEAUX DE GORENSTEIN

par Hyman BASS

Les anneaux de Gorenstein ([6]) ont été rencontrés, en géométrie algébrique par R. APERY, D. GORENSTEIN [5], et P. SAMUEL [8]. Ces anneaux peuvent être caractérisés soit par des propriétés classiques des anneaux réguliers, soit par des propriétés homologiques.

Je me propose d'énoncer, dans cette conférence, un théorème général sur l'équivalence de ces conditions. Je donnerai la démonstration d'une partie de ce théorème.

On trouvera les détails dans [2].

Tous les anneaux considérés sont supposés commutatifs unitaires et noethériens.

Tous les modules considérés sont des modules à gauche unitaires.

1. Définition des invariants $\mu^h(p, M)$.

Soient A un anneau et M un A-module. D'après B. ECKMANN et A. SCHOPF (cf. [3]), il existe un complexe acyclique :

$$0 \to M \to I^0(M) \xrightarrow{d_0} \cdots \to I^h(M) \xrightarrow{d_h} I^{h+1}(M) \to \cdots$$

où $I^h(M)$ est l'enveloppe injective de $\ker d_h$ (pour $h \geqslant 0$). Ce complexe, noté $I(M)$, est appelé une résolution injective minimale de M. Il est unique à un isomorphisme, (non canonique) sur l'identité de M, près.

On a évidemment, $\dim \operatorname{inj}_A M < h$ si et seulement si $I^h(M) = 0$.

De plus, si T est une partie multiplicative de A, il est connu que $T^{-1} I(M)$ est une résolution injective minimale du $T^{-1} A$-module $T^{-1} M$.

Enfin, nous admettrons une propriété un peu moins triviale, dont on trouvera la démonstration dans [2] :

LEMME 1. - *Soit* C *le complexe :*

$$0 \to SM \to I^1(M) \to \cdots$$

où $SM = I^0(M)/M$. *Si un élément* x *de l'anneau* A *vérifie les conditions suivantes :*

(i) $xA \neq A$

(ii) $xy = 0 \implies y = 0$ *pour tout élément* y *de* A *ou de* M

alors, $\mathrm{Hom}_A(A/xA\, , C)$ *est une résolution injective minimale du* A/xA*-module* M/xM .

D'après E. MATLIS et P. GABRIEL (cf. [4]), on sait que le théorème de Krull-Schmidt reste valable pour les A-modules injectifs et que $I^0(A/p)$ définit une bijection entre $\mathrm{Spec}(A)$ et les types de modules injectifs indécomposables (non nuls).

On peut donc définir, pour chaque A-module M , chaque idéal $p \in \mathrm{Spec}(A)$ et chaque entier $h \geqslant 0$, un nombre cardinal $\mu^h(p\, , M)$ par la formule :

$$I^h(M) \cong \coprod_{p \in \mathrm{Spec}(A)} \mu^h(p\, , M)\ I^0(A/p)$$

où $\mu^h(p\, , M)\ I^0(A/p)$ désigne la somme directe de $\mu^h(p\, , M)$ copies de $I^0(A/p)$.

Lorsque $M = A_s$, on écrit $\mu^h(p)$ au lieu de $\mu^h(p\, , A_s)$.

2. Enoncé du théorème.

THÉORÈME local. - *Soit* A *un anneau local de dimension (de Krull)* d *et soit* $p = \mathrm{rad}\, A$. *Les conditions suivantes sont équivalentes* :

1° $\dim \mathrm{inj}_A A < \infty$ (*resp.* $\dim \mathrm{inj}_A A = d$) .

2° A *est un anneau de Cohen-Macaulay, et il existe un système de paramètres qui engendre un idéal irréductible de* A .

3° *Chaque système de paramètres engendre un idéal irréductible de* A .

4° $\mu^h(p) = 0$ *pour* $h \neq d$ *et* $\mu^d(p) = 1$.

5° *Il existe un entier* $h > d$ *pour lequel* : $\mu^h(p) = 0$.

Si, de plus, on a $A = B/\alpha$ *où* B *est un anneau local régulier de dimension* $d + s$, *les conditions précédentes sont équivalentes, en posant* $\Omega = \mathrm{Ext}_B^s(A\, , B)$, *à la condition* :

6° $\Omega \cong A$ (*resp.* Ω *est libre ; resp.* Ω *est monogène*).

Remarques.

1° L'équivalence (2) <==> (3) est due à D. G. NORTHCOTT-D. REES [7].

2° J.-P. SERRE m'a indiqué la condition (6) et son rapport avec le point de vue de GROTHENDIECK, pour lequel Ω joue un rôle de "différentiel". On peut remplacer B par un anneau local quelconque qui satisfait aux conditions du théorème pourvu que $\mathrm{dh}_B\, A < \infty$.

3° L'équivalence (1) $\Longleftrightarrow$ (2) sera démontrée au paragraphe 3.

THÉORÈME 2. - Pour un anneau A, les conditions suivantes sont équivalentes :

1° A_p satisfait aux conditions du théorème local pour chaque idéal premier (resp. maximal) p de A.

2° Si α est un idéal de hauteur h, engendré par h éléments, alors α est équidimensionel et chaque composante primaire de α est irréductible.

3° $\mu^h(p) = \delta_{h,\mathrm{haut}(p)}$ (symbole de Kronecker) pour chaque $p \in \mathrm{Spec}(A)$ et chaque $h \geqslant 0$.

4° Les foncteurs $E^i = \mathrm{Ext}_A^i(\cdot\, , A)$ de la catégorie des A-modules de type fini, dans elle-même, satisfont à $E^i \circ E^j = 0$, pour tous les i et j satisfaisants à $0 \leq i < j$.

Définition. - On appelle anneau de Gorenstein tout anneau qui satisfait aux conditions équivalentes du théorème 2.

Exemples. - Si x appartient au radical d'un anneau A, et n'est pas diviseur de zéro, alors A est un anneau de Gorenstein si et seulement si A/xA en est un.

D'une manière générale, on démontre que, si un anneau A est localement une intersection complète, alors A est un anneau de Gorenstein.

En particulier, cette dernière condition est vérifiée lorsque A est l'anneau des coordonnées d'une courbe affine tracée sur une surface non singulière.

Cependant P. SAMUEL, H. KODAIRA et R. APERY ont donné des exemples d'anneaux de Gorenstein qui ne sont pas des intersections complètes ; en particulier, il en est ainsi de l'anneau $A = k[[t^4, t^7, t^{10}]]$ où k est un corps.

3. Quelques propriétés des nombres cardinaux $\mu^h(p, M)$.

Il résulte immédiatement des remarques faites au paragraphe 1, la proposition suivante :

PROPOSITION 3.1. - Soit T une partie multiplicative d'un anneau A. Soit $p \in \mathrm{Spec}(A)$ tel que $T \cap p = \emptyset$; soit M un A-module. On a

$$\mu^h(T^{-1} p, T^{-1} M) = \mu^h(p, M).$$

PROPOSITION 3.2. - Soit $p \in \mathrm{Spec}(A)$, on a, en posant

$$k(p) = A_p/pA_p \; ,$$

<u>la double égalité</u> :

$$\mu^h(p\; ,\; M) = \dim_{k(p)} \operatorname{Ext}^h_{A_p}(k(p)\; ,\; M_p) = \dim_{k(p)} (\operatorname{Ext}^h_A(A/p\; ,\; M))_p \; .$$

<u>Démonstration</u>. - La proposition 3.1 permet de supposer que $A = A_p$, et il suffit de démontrer la première égalité.

Si $I(M)$ est une résolution injective minimale de M, le cobord dans $\operatorname{Hom}_A(k(p)\; ,\; I(M))$ s'annule.

Mais il est évident que :

$$\mu^h(p\; ,\; M) = \dim_{k(p)} \operatorname{Hom}_A(k(p)\; ,\; I^h(M)) \; .$$

La proposition est ainsi démontrée.

COROLLAIRE. - <u>Si</u> M <u>est un</u> A-<u>module de type fini</u>, $\mu^h(p\; ,\; M) < \infty$, <u>quels que soient</u> $p \in \operatorname{Spec} A$ <u>et</u> $h \geqslant 0$.

<u>De plus, on a</u> $\mu^0(p\; ,\; M) > 0$ <u>si et seulement si</u> $p \in \operatorname{Ass}(M)$.

PROPOSITION 3.3. - <u>Soient</u> q <u>et</u> p <u>deux idéaux premiers de</u> A <u>tels que</u> : $q \subset p$ <u>et tels qu'il n'existe aucun idéal premier</u> m <u>vérifiant</u> $q \subset m \subset p$.

<u>Si</u> M <u>est un</u> A-<u>module de type fini, l'inégalité</u>

$$\mu^h(q\; ,\; M) > 0 \quad \text{entraîne} \quad \mu^{h+1}(p\; ,\; M) > 0 \; .$$

<u>Démonstration</u>. - D'après la proposition (3.1) nous pouvons supposer $A = A_p$. Soit $B = A/q$ et soit $C = B/xB$ où $x \in p$ et $x \notin q$. L'hypothèse entraîne que longueur $C < \infty$.

A partir d'une suite exacte :

$$0 \to B \xrightarrow{x} B \to C \to 0$$

la suite

$$\operatorname{Ext}^h(B\; ,\; M) \xrightarrow{x} \operatorname{Ext}^h(B\; ,\; M) \to \operatorname{Ext}^{h+1}(C\; ,\; M)$$

est exacte.

La condition $\mu^h(q\; ,\; M) > 0$, signifie, d'après la proposition 3.2, que $\operatorname{Ext}^h_A(B\; ,\; M)_q \neq 0$.

M étant de type fini, $\operatorname{Ext}^h_A(B\; ,\; M)$ est un module de type fini ; on a $x \in \operatorname{rad} A$. D'après le lemme de Nakayama, on a :

$$\operatorname{Ext}^{h+1}_A(C\; ,\; M) \neq 0 \; .$$

Par récurrence sur la longueur de C , enfin, on conclut

$$\mathrm{Ext}_A^{h+1}(A/p , M) \neq 0$$

c'est-à-dire, en appliquant une seconde fois la proposition 3.2, que $\mu^{h+1}(p , M) > 0$.

COROLLAIRE 1. - Soit M un module de type fini, sur un anneau A , tel que $\dim \mathrm{inj}_A M = r$. Alors, si $r \geqslant \dim \mathrm{Supp}(M)$ et si $\mu^r(p , M) > 0$, l'idéal p est maximal.

Démonstration. - Il suffit de remarquer que si q est un élément minimal de $\mathrm{Supp}(M)$ alors $q \in \mathrm{Ass}(M)$. En appliquant la proposition 3.3, ainsi que le corollaire de la proposition 3.2, on "grimpe" à $\mathrm{Supp}(M)$.

COROLLAIRE 2. - Soit A un anneau local et soit $p = \mathrm{rad}\, A$. Si M est un A-module de type fini, on a $\dim \mathrm{inj}_A M < \infty$ si et seulement si $\mu^h(p , M) = 0$ pour h assez grand.

LEMME 2 [M. AUSLANDER-O. GOLDMAN [1]]. - Soit A un anneau local et soit N un A-module de type fini, non nul tel que $dh_A N = s < \infty$. Alors, pour tout A-module M , non nul, de type fini, on a $\mathrm{Ext}_A^s(N , M) \neq 0$.

On démontre ce lemme en considérant une résolution projective minimale P de N et en appliquant le lemme de Nakayama au dernier terme à gauche du complexe $\mathrm{Hom}_A(P , M)$.

COROLLAIRE 1. - Si A est un anneau local et si M est un A-module, non nul, de type fini tel que $\dim \mathrm{inj}_A M = r < \infty$. Alors r est égal à la profondeur de A . (Pour la définition de la profondeur d'un anneau se rapporter à [4].)

Démonstration. - Choisissons p tel que $\mu^r(p , M) > 0$. Il résulte du corollaire 1 de la proposition 3.3, que p est maximal. Donc $p = \mathrm{rad}\, A$. Posons $k = A/p$. D'après la proposition 3.2, on a $\mathrm{Ext}^r(k , M) \neq 0$. Soit α l'idéal de A engendré par une A-suite régulière maximale et soit $N = A/\alpha$. Alors $dh_A N = s$ est la profondeur de A . De plus, il existe une suite exacte :

$$0 \to k \to N .$$

D'après le lemme d'Auslander-Goldman, on a $\mathrm{Ext}_A^s(N , M) = 0$. Donc $s \leqslant r$.

Puisque le foncteur $\mathrm{Ext}_A^r(. , M)$ est exact à droite et puisque la suite $0 \to k \to N$ est exacte, on a $\mathrm{Ext}_A^r(N , M) \neq 0$, donc $r \leq s$. Par suite $s = r$ et le corollaire est démontré.

COROLLAIRE 2. - *Soit* A *un anneau local de dimension* d , *tel que* $\dim \operatorname{inj}_A A < \infty$. *Alors* $\dim \operatorname{inj}_A A = d$ *et* A *est un anneau de Cohen-Macaulay.*

Démonstration. - En appliquant les résultats précédents on a :

$$d = \dim \operatorname{Supp}(A) \leqslant \dim \operatorname{inj}_A A = \text{profondeur de } A \leqslant d .$$

En utilisant le lemme 1 (§ 1) on démontre la proposition suivante :

PROPOSITION 3.4. - *Soit* M *un* A*-module et soit* $p \in \operatorname{Spec}(A)$. *Si un élément* $x \in p$ *n'est pas diviseur de zéro ni dans* A , *ni dans* M , *on a :*

$$\mu^h(p , M) = \mu^{h-1}(p/xA , M/xM) , \qquad h > 0 .$$

COROLLAIRE. - *Si* M *est un module de type fini sur un anneau local* A , *on a :* $\dim \operatorname{inj}_A M < \infty$ *si et seulement si* $\dim \operatorname{inj}_{A/xA} M/xM < \infty$ *(où* x *est l'élément introduit dans l'énoncé de la proposition 3.4).*

LEMME 3. - *Soit* A *un anneau local d'Artin. Soit* $p = \operatorname{rad}(A)$. *On a*

$$\dim \operatorname{inj}_A A < \infty$$

si et seulement si : $\mu^0(p) = 1$; *ou encore* si et seulement si (0) *est un idéal irréductible de* A .

Démonstration. - Posons $I = I^0(A/p)$. On a alors $I^0(A) = \mu^0(p).I$ et, par suite, $\operatorname{long}(I^0(A)) = \mu^0(p) \operatorname{long}(I)$. Mais, d'après la dualité de Matlis-Gabriel,

$$\operatorname{long}(A) = \operatorname{long}(\operatorname{Hom}_A(A , I)) = \operatorname{long}(I) .$$

Donc

$$\operatorname{long}(I^0(A)) = \mu^0(p) \operatorname{long}(A)$$

d'où $A = I^0(A)$ si et seulement si $\mu^0(p) = 1$.

L'équivalence (1) $\Longleftrightarrow$ (2) du théorème local, se démontre facilement à partir des résultats précédents. On peut se poser des questions plus précises sur le comportement des nombres cardinaux $\mu^h(p , M)$. Sont-ils, par exemple, des polynômes en h , pour h assez grand ? L'ensemble des $p \in \operatorname{Spec}(A)$, pour lesquels A_p n'est pas un anneau de Gorenstein, est-il fermé dans $\operatorname{Spec}(A)$?

4. *Cas où la dimension est égale à* 1 .

Soit A un anneau dont la dimension (de Krull) est égale à 1 . Nous supposerons, pour simplifier les énoncés, que A est intègre et nous désignerons par K son corps des fractions. De plus, dans tout ce paragraphe, les A-modules considérés seront supposés de type fini.

THÉORÈME 3. — Les conditions suivantes sont équivalentes

1° A est un anneau de Gorenstein ;

2° K/A est un A-module injectif (resp. $K/A \cong \coprod_{p\,\max} I^0(A/p)$).

3° Chaque idéal principal est localement irréductible.

4° $\alpha = (\alpha^{-1})^{-1}$ pour chaque idéal $\alpha \subset K$.

5° Si $0 \neq b \subset \alpha$, on a :

$$\operatorname{long}(\alpha/b) = \operatorname{long}(b^{-1}/\alpha) .$$

6° On a

$$M \cong \operatorname{Hom}_A(\operatorname{Hom}_A(M , A) , A)$$

pour chaque A-module M sans torsion.

7° Toute suite exacte de modules : $0 \to P \to E \to M \to 0$ où P est projectif et M est sans torsion se scinde.

8° Pour chaque idéal maximal p , on a $p^{-1}/A \cong A/p$ [resp. p^{-1} est engendré par deux éléments]

Soit B la fermeture intégrale de A dans K . On suppose, à présent, que $c = B^{-1} \neq 0$.

Exemple. — Si A est anneau quotient d'un anneau régulier de dimension 2 , A est alors, localement, une intersection complète. C'est donc un anneau de Gorenstein. D'après les conditions (4) et (5) du théorème 3, on a :

$$\operatorname{long}(A/c) = \operatorname{long}(c^{-1}/A) = \operatorname{long}(B/A) .$$

On retrouve, ainsi, le résultat original de P. SAMUEL, D. GORENSTEIN et R. APERY.

Je conclurai cette conférence par un théorème de structure pour les modules sans torsion.

THÉORÈME 4. — Les conditions suivantes sont équivalentes :

1° Chaque anneau compris entre A et B est un anneau de Gorenstein ;

2° Chaque idéal de A peut être engendrée par deux éléments.

3° Chaque A-module sans torsion est somme directe de sous-modules de rang 1 .

Exemples.

1° Soit A une extension intégrale finie de rang 2 sur un anneau de Dedekind. (Par exemple, $A = \{a + 2b\sqrt{-1} \ ; \ a , b \in \mathbb{Z}\}$.)

2° $A = k[[t^2 , t^{2n+1}]]$ où k est un corps.

Dans ces deux cas, l'anneau A satisfait aux conditions du théorème 4.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AUSLANDER (M.) and GOLDMAN (O.). - Maximal orders, Trans. Amer. math. Soc., t. 97, 1960, p. 1-24.

[2] BASS (Hyman). - On the ubiquity of Gorestein rings, Math. Z., t. 82, 1963, p. 8-28.

[3] ECKMANN (B.) und SCHOPF (A.). - Über injektive Moduln, Archiv der Math., t. 4, 1953, p. 75-78.

[4] GABRIEL (Pierre). - Des catégories abéliennes, Bull. Soc. math. France, t. 90, 1962, p. 323-448 (Thèse Sc. math. Paris. 1961).

[5] GORENSTEIN (D.). - The arithmetic theory of adjoint plane curves, Trans. Amer. math. Soc., t. 72, 1952, p. 414-436.

[6] GROTHENDIECK (Alexander). - Local cohomology. Notes by R. C. Hartshorne. - Cambridge (Mass.), Harvard University, 1961 (multigr.).

[7] NORTHCOTT (D. G.) and REES (D.). - Principal systems, Quart. J. of Math., t. 8, 1957, p. 119-127.

[8] SAMUEL (Pierre). - Singularités des variétés algébriques, Bull. Soc. math. France, t. 79, 1951, p. 121-129.