Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Roger Desq

Éléments inversibles dans un demi-groupe D

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 16, nº 1 (1962-1963), exp. nº 4, p. 1-16

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1962-1963__16_1_A4_0>

26 novembre 1962

ÉLÉMENTS INVERSIBLES DANS UN DEMI-GROUPE D

par Roger DESQ

[d'après E. S. LJAPIN (*)]

1. D demi-groupe quelconque.

DÉFINITION 1.1. - Un élément a d'un demi-groupe D est dit inversible à droite si $aD = D$; bilatèrement inversible (noté b-inversible) s'il est inversible à gauche et à droite.

THÉORÈME 1.1. - Si l'ensemble G de tous les éléments b-inversibles n'est pas vide, c'est un groupe dont l'élément unité est unité pour tout le demi-groupe.

G est un sous-demi-groupe. Soient a et $b \in G$; il existe x , y avec $xb = a$, $by = a$.

$xD = xbD = aD = D$; x est inversible à droite, de même y est inversible à gauche.

Il existe i , c_1 , c_2 avec $bi = b$; $c_1 a = i$; $bc_2 = i$; pour tout z , il existe z' avec $z = z' b$.

D'où : $zi = z' bi = z' b = z$, i est élément unité à droite de D .

$$z = zi = zbc_2 = zbic_2 = zbc_1 ac_2 = zbc_1 xbc_2 = (zbc_1) x$$

donc x est inversible à gauche et $x \in G$. De même $y \in G$. G vérifiant l'axiome des quotients est donc un groupe.

Soit e l'élément unité de G , $eD = D$, $De = D$, e est bien élément unité du demi-groupe D .

COROLLAIRE 1.1. - Pour que D ait des éléments b-inversibles, il faut et il suffit que D contienne un élément unité.

Soient $R = \{$éléments inversibles à droite et non inversibles à gauche$\}$.
$L = \{$éléments inversibles à gauche et non inversibles à droite$\}$.
$A = \{$éléments inversibles ni à droite, ni à gauche$\}$.

THÉORÈME 1.2. - Pour un demi-groupe quelconque D nous avons la table de multiplication suivante

(*) [2], chapitre III, § 5 ; chapitre VI, § 1 , 2 ; chapitre IX, § 4.

	G	R	L	Λ
G	G	R	L	Λ
R	R	R	D	R + Λ
L	L	Λ	L	Λ
Λ	Λ	Λ	L + Λ	Λ

(signifie que si G , L , par exemple, sont $\neq \emptyset$, on a $GL \subseteq L$).

Il y a seize cas à vérifier. Cette vérification est simplifiée si l'on remarque que :

$R + \Lambda = \{$éléments non inversibles à gauche$\}$, est un idéal à gauche.

$R + G = \{$éléments inversibles à droite$\}$, est un sous-demi-groupe.

Considérons par exemple $G\Lambda$.

$$G\Lambda \subseteq R + \Lambda \text{ qui est un idéal à gauche .}$$

Supposons qu'il existe $g \in G$, $a \in \Lambda$ avec $ga = r \in R$.

$$gaD = rD = D \ , \quad g \in G \ , \quad \exists \ g' \in G \text{ avec } g'g = e \ , \quad g'D = D$$

$$g'gaD = g'D \implies aD = D \text{ impossible .}$$

Dans certaines cases du tableau précédent, il y a une somme de plusieurs éléments, montrons que le nombre de ces termes ne peut être diminué.

Soient Ω l'ensemble des entiers naturels $\mathfrak{S}_\Omega$ l'ensemble des applications de Ω dans lui-même. Prenons, dans $\mathfrak{S}_\Omega$,

e = application identique,

$$r_1 = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & \dots, & n, & \dots \\ 1, & 1, & 2, & \dots, & n-1, & \dots \end{pmatrix} \qquad r_2 = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & \dots, & n, & \dots \\ 1, & 1, & 1, & 2, & \dots, & n-2, & \dots \end{pmatrix}$$

$$r_3 = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & \dots, & n, & \dots \\ 1, & 2, & 2, & 3, & \dots, & n-1, & \dots \end{pmatrix}$$

$$\ell_1 = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & \dots, & n, & \dots \\ 2, & 3, & 4, & 5, & \dots, & n+1, & \dots \end{pmatrix} \qquad \ell_2 = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & \dots, & n, & \dots \\ 3, & 4, & 5, & 6, & \dots, & n+2, & \dots \end{pmatrix}$$

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & \dots, & n, & \dots \\ 2, & 2, & 3, & 4, & \dots, & n, & \dots \end{pmatrix} \qquad a_2 = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & \dots, & n, & \dots \\ 1, & 1, & 1, & 1, & \dots, & 1, & \dots \end{pmatrix}$$

les r_i étant surjectives divisent e à gauche, mais pas à droite, car ces applications ne sont pas injectives.

On voit de même que $r_i \in R$ $(i = 1 , 2 , 3)$; $\ell_i \in L$ $(i = 1 , 2)$; $a_i \in \Lambda$ $(i = 1 , 2)$.

RL : $r_1 \ell_1 = e \in G$,

$r_2 \ell_1 = r_1 \in R$,

$r_3 \ell_2 = \ell_1 \in L$, $r_3 \ell_1 = a_1 \in \Lambda$.

RA : $r_1 a_1 = r_1 \in R$; $r_1 a_2 = a_2 \in \Lambda$.

AL : $a_1 \ell_1 = \ell_1 \in L$; $a_2 \ell_1 = a_2 \in \Lambda$.

Cet exemple montre qu'en général la décomposition $D = G + R + L + \Lambda$ n'est pas une "sviaska" c'est-à-dire une bande (CLIFFORD).

Nous allons maintenant considérer les éléments inversibles particuliers que sont les éléments grossissants.

DÉFINITION 1.2. - Un élément g de D est dit <u>grossissant à droite</u> s'il existe un complexe $D' \subset D$, $D' \neq D$ tel que $D' g = D$.

THÉORÈME 1.3. - <u>Tout élément grossissant à droite est inversible à gauche, mais non inversible à droite.</u>

$Dg \supseteq D' g = D \implies g$ inversible à gauche. Si g était de plus inversible à droite, g appartiendrait à G , il existerait g' avec $gg' = g' g = e$.

$D' = D' e = D' gg' = Dg' \supseteq Dgg' = De = D$; ce qui contredit la définition.

COROLLAIRE 1.2.

a. Aucun élément d'un demi-groupe ne peut être à la fois grossissant à gauche et grossissant à droite.

b. Un demi-groupe commutatif n'a pas d'éléments grossissants.

Soient $D^{(r)} = \{$éléments grossissants à droite$\}$;
$D^{(\ell)} = \{$éléments grossissants à gauche$\}$;
$D^{(n)} = D \setminus (D^{(r)} \cup D^{(\ell)})$.

THÉORÈME 1.4. - $D^{(r)}$ <u>et</u> $D \setminus D^{(r)}$ <u>sont des sous-demi-groupes de</u> D . $D^{(r)}$ <u>est un demi-groupe sans torsion.</u>

Soient $g_1 \in D^{(r)}$; $g_2 \in G + L$, c'est-à-dire g_2 inversible à gauche ; il existe $D' \subset D$, $D' g_1 = D$

$$D'(g_1 g_2) = D' g_1 g_2 = Dg_2 = D .$$

$D^{(r)}$ est un idéal à droite dans $G + L = \{$éléments inversibles à gauche$\}$.

Soient $a_1 , a_2 \in D \setminus D^{(r)}$; s'il existait $D' \subset D$ avec $D' a_1 a_2 = D$ on aurait $D' a_1 \neq D$, car a_1 n'est pas grossissant à droite ; mais alors a_2 serait grossissant à droite.

Soit $g \in D^{(r)}$ avec $g^n = f$ élément idempotent.

$$D = Dg = \dots = Dg^n = Df \implies f \text{ élément unité à droite.}$$

Soit $D' \neq D$, $D' g = D$; $D' g^n = Dg^{n-1} = D$, mais $D' f = D'$, d'où $D' = D$.

COROLLAIRE 1.3. - Un demi-groupe périodique ne contient pas d'éléments grossissants.

THÉORÈME 1.5. - $D = D^{(r)} + D^{(\ell)} + D^{(n)}$.

α. $D^{(r)}$ <u>est un demi-groupe qui ne contient pas d'élément inversible à droite.</u>

β. $D^{(\ell)}$ <u>est un demi-groupe qui ne contient pas d'élément inversible à gauche.</u>

γ. <u>Si</u> D <u>a un élément unité,</u> $D^{(n)}$ <u>est non vide et c'est un demi-groupe qui ne contient pas d'éléments grossissants.</u>

α. Soit x un élément de $D^{(r)}$ inversible à droite dans $D^{(r)}$. Il existe $z \in D^{(r)}$ avec $xz = x$.

$$\exists\ D' \subset D ,\ D' z = D ;\ \forall\ a \in D ,\ \exists\ b \text{ avec } bx = a$$

$az = bxz = bx = a$; z est donc élément unité à droite de D , mais alors $D' = D$ (contradiction).

γ. $e \in D^{(n)} \implies D^{(n)} \neq \emptyset$.

Soit $x \in D^{(n)}$ tel qu'il existe $D' \subset D^{(n)}$ avec $D' x = D^{(n)}$.

$$e \in D^{(n)} \implies \exists\ y \text{ avec } yx = e ;\ (Dy)\, x = De = D .$$

Comme $x \in D^{(n)}$, $Dy = D$.

$\exists$ z avec $zy = e$; $x = ex = zyx = ze = z$; $xy = e$.

$$D' = D' e = D' xy = D^{(n)} y \supseteq D^{(n)} xy = D^{(n)} e = D^{(n)} .$$

2. D <u>contient un élément unité.</u>

Construction du demi-groupe bicyclique $\mathcal{B}$. - Soient $\mathcal{B} = \{[a , b]\}$, $a , b = 0 , 1 , 2 , \dots , n , \dots$ et h la fonction définie par

$$h(x) = x \text{ si } x \geq 0 ;\ h(x) = 0 \text{ si } x < 0 .$$

Définissons dans $\mathcal{B}$ l'opération suivante :

$$[a_1 , b_1][a_2 , b_2] = [a_1 + h(a_2 - b_1) ;\ b_2 + h(b_1 - a_2)] .$$

$$([a_1\ ,\ b_1][a_2\ ,\ b_2])[a_3\ ,\ b_3] = [a_1 + h(a_2 - b_1)\ ;\ b_2 + h(b_1 - a_2)][a_3\ ,\ b_3]$$
$$= [a_1 + h(a_2 - b_1) + h\{a_3 - b_2 - h(b_1 - a_2)\}\ ;\ b_3 + h\{b_2 + h(b_1 - a_2) - a_3\}]$$

$$[a_1\ ,\ b_1]([a_2\ ,\ b_2][a_3\ ,\ b_3]) = [a_1\ ,\ b_1][a_2 + h(a_3 - b_2)\ ;\ b_3 + h(b_2 - a_3)]$$
$$= [a_1 + h\{a_2 + h(a_3 - b_2) - b_1\}\ ;\ b_3 + h(b_2 - a_3) + h\{b_1 - a_2 - h(a_3 - b_2)\}]\ .$$

Il y a quatre cas à envisager

(1) $a_2 \geqslant b_1$	(2) $a_2 \geqslant b_1$	(3) $a_2 < b_1$	(4) $a_2 < b_1$
$a_3 \geqslant b_2$	$a_3 < b_2$	$a_3 \geqslant b_2$	$a_3 < b_2$

On vérifie l'associativité en remarquant que $h(h(x)) = h(x)$ et

$$h(x + y) = h(x) + h(y) \quad \text{si} \quad x \quad \text{et} \quad y \geqslant 0\ ,$$

Nous avons

$$[a\ ,\ b] = [a\ ,\ 0][0\ ,\ b] =$$

$$[a\ ,\ 0] = [1\ ,\ 0]^a \qquad [0\ ,\ b] = [0\ ,\ 1]^b$$

$$[a\ ,\ b][0\ ,\ 0] = [0\ ,\ 0][a\ ,\ b] \qquad [0\ ,\ 1][1\ ,\ 0] = [0\ ,\ 0]\ .$$

En posant $u = [1\ ,\ 0]$; $v = [0, 1]$; $e = [0\ ,\ 0]$.

$\mathcal{B}$ est engendré par u , v avec comme relations

$$vu = e\ ;\quad eu = ue = u\ ;\quad ev = ve = v$$

ce qui permet de poser $u^0 = v^0 = e$.

Les éléments de $\mathcal{B}$ s'écrivent $u^\alpha v^\beta$ avec $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$. D'après l'identification que nous venons de faire, ceci est la forme canonique des mots de $\mathcal{B}$.

$$u^\alpha v^\beta u^{\alpha'} v^{\beta'} = \begin{cases} u^{\alpha+\alpha'-\beta}\, v^{\beta'} & \text{si} \quad \alpha' \geqslant \beta \\ u^\alpha\, v^{\beta-\alpha'+\beta'} & \text{si} \quad \alpha' < \beta \end{cases}$$

<u>Remarque</u>. - On aurait pu poser $\mathcal{B} = \{u\ ,\ v\}$ avec $vu = e$; $eu = ue = u$; $ev = ve = v$. Les éléments de $\mathcal{B}$ étant des produits en u et v se mettent évidemment sous la forme $u^\alpha v^\beta$; mais on ne sait pas si cette forme est unique.

Dans $\mathcal{B}$ les éléments u^α $(\alpha > 0)$ sont grossissants à droite, car

$$(\mathcal{B}v^\alpha)\, u^\alpha = \mathcal{B}v^\alpha u^\alpha = \mathcal{B}e = \mathcal{B} \quad .$$

$\mathcal{B}v^\alpha \neq \mathcal{B}$; en effet $\mathcal{B}v^\alpha$ ne contient que les éléments $u^\gamma v^{\alpha+\delta}$ $\delta \geqslant 0$.

Les éléments v^α $(\alpha > 0)$ sont grossissants à gauche. Les autres éléments ne sont pas grossissants ; pour e évident ; pour $u^\alpha v^\beta$, α , $\beta \neq 0$, car $u^\alpha v^\beta \mathcal{B} \not\ni v$ et $\mathcal{B}u^\alpha v^\beta \not\ni u$.

LEMME 2.1. - Pour tout élément x de $\mathbb{B}$, $x \neq u$, v, il existe un élément $x' \neq e$, qui n'est pas une puissance de x et qui permute avec x.

Si $x = u^\alpha v^\beta$ avec $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta > 2$, on peut prendre $x' = uv$.

$$x' x = u^\alpha vu^\alpha v^\beta = u^\alpha v^\beta ; \quad xx' = u^\alpha v^\beta uv = u^\alpha v^\beta .$$

$$x^n = u^\alpha v^\beta \dots u^\alpha v^\beta = u^\gamma v^\delta \quad \text{avec} \quad \gamma \geqslant \alpha ; \quad \delta \geqslant \beta \implies \gamma + \delta > 2$$

donc $x^n \neq x'$, $\forall$ n.

- Si $x = uv$ prendre $x' = u^2 v^2$, on a $xx' = x' x = x'$.

$$x^2 = uvuv = x \implies x^n = x \implies x' \neq x^n , \ \forall \ n .$$

- Si $x = u^\alpha$, $\alpha > 1$ prendre $x' = u$; $x^n = u^{\alpha n} \neq u$.

- Si $x = v^\beta$; $\beta > 1$ prendre $x' = v$.

- Si $x = u$; $x' \neq u^n \implies x' = u^\alpha v^\beta$, $\beta > 0$

$$xx' = u^\alpha v^{\beta-1} \quad \text{avec} \quad v^0 = e \quad \text{si} \quad \beta = 1$$

$$x' x = u^{\alpha+1} v^\beta \qquad xx' \neq x' x .$$

De même pour $x = v$, il n'existe pas de $x' \neq v^n$ permutant avec v.

THÉORÈME 2.1. - $\mathbb{B}$ n'a pas d'automorphisme distinct de l'automorphisme identique.

Soit φ un automorphisme de $\mathbb{B}$. Si $x \neq u$, v, il existe $x' \neq x^n$, e, $xx' = x' x$. $\varphi(x)$ et $\varphi(x')$ possèdent la même propriété, ainsi que $\varphi^{-1}(x)$ et $\varphi^{-1}(x')$.

Donc $\varphi(u) = u$ ou v et, φ étant un automorphisme, on a soit

$$(1) \begin{cases} \varphi(u) = u \\ \varphi(v) = v \end{cases} \qquad (2) \begin{cases} \varphi(u) = v \\ \varphi(v) = u \end{cases}$$

(1) $\implies \varphi =$ identité.

(2) $\varphi(u^2 v) = \varphi^2(u)\, \varphi(v) = v^2 u = v = \varphi(u)$, mais alors φ n'est pas un automorphisme.

COROLLAIRE 2.1. - Si $\mathbb{D}$ est isomorphe à $\mathbb{B}$, il existe un seul isomorphisme entre $\mathbb{D}$ et $\mathbb{B}$.

En effet soient $\varphi_1 : \mathbb{B} \to \mathbb{D}$, $\varphi_2 : \mathbb{B} \to \mathbb{D}$ deux isomorphismes. $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ est un automorphisme de $\mathbb{B} \implies \varphi_2 = \varphi_1$.

THÉORÈME 2.2. - Soit D un demi-groupe ayant un élément unité $e_D = e$. Pour qu'un élément $x \in D$ soit grossissant à droite, il faut et il suffit qu'il existe

<u>un isomorphisme</u> φ <u>de</u> $\mathcal{B}$ <u>dans</u> D <u>tel que</u> $\varphi(e_{\mathcal{B}}) = e_D = e$, $\varphi(u) = x$.

1° Soit x un élément grossissant à droite de D ; il existe y avec $yx = e$.

Considérons $\mathfrak{A} = \{x , y\}$, comme $yx = e$, tous les éléments de $\mathfrak{A}$ se mettent sous la forme $x^\alpha y^\beta$, $x^0 = y^0 = e$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$.

Supposons $x^{\alpha_1} y^{\beta_1} = x^{\alpha_2} y^{\beta_2}$ avec $\alpha_1 \geq \alpha_2$.

$$y^{\alpha_2} x^{\alpha_1} y^{\beta_1} = y^{\alpha_2} x^{\alpha_2} y^{\beta_2} \implies x^{\alpha_1 - \alpha_2} y^{\beta_1} = y^{\beta_2} .$$

Si $\alpha_1 = \alpha_2$, $y^{\beta_1} = y^{\beta_2}$; si $\beta_1 \neq \beta_2$ soit $\gamma = \sup(\beta_1 , \beta_2)$

$$y^{\beta_1} x^\gamma = y^{\beta_2} x^\gamma \implies x^d = e , \quad d = |\beta_1 - \beta_2| ;$$

x étant sans torsion, on a $d = 0$.

Si $\alpha_1 > \alpha_2$, $xD \supseteq xx^{\alpha_1 - \alpha_2 - 1} y^{\beta_1} D = y^{\beta_2} D \supseteq y^{\beta_2} x^{\beta_2} D = D$. x serait inversible à droite ce qui contredit le théorème 1.3. On obtient donc un isomorphisme φ de $\mathcal{B}$ sur $\mathfrak{A} \subseteq D$ en posant $\varphi(u^\alpha v^\beta) = x^\alpha y^\beta$, on a

$$\varphi(e_{\mathcal{B}}) = e , \quad \varphi(u) = x .$$

2° Soit φ un isomorphisme de $\mathcal{B}$ dans D tel que $\varphi(e_{\mathcal{B}}) = e$;

$$\varphi(u)\ \varphi(v) = \varphi(uv) \neq \varphi(e_{\mathcal{B}}) = e .$$
$$\varphi(v)\ \varphi(u) = \varphi(vu) = e .$$

Ceci montre que $\varphi(v)$ n'est pas inversible à gauche, car si on avait $a\,\varphi(v) = e$, on aurait $a\,\varphi(v)\ \varphi(u) = \varphi(u) \implies ae = \varphi(u)$, mais $\varphi(u)$ ne répond pas à la question.

$$[D\ \varphi(v)]\ \varphi(u) = De = D ; \quad D\ \varphi(v) \neq 0 , \text{ car } e \notin D\ \varphi(v) .$$

$\varphi(u)$ est bien un élément grossissant à droite.

COROLLAIRE 2.2. - Dans un demi-groupe ayant un élément unité chaque élément grossissant est régulier.

On a

$$x = \varphi(u) , \qquad \varphi(u)\ \varphi(v)\ \varphi(u) = \varphi(uvu) = \varphi(u) .$$

COROLLAIRE 2.3. - Si un demi-groupe, avec élément unité, a des éléments grossissants d'un côté, il en a aussi de l'autre.

Exemple montrant qu'il n'en est pas ainsi lorsque D n'a pas d'élément unité :

Soit A un demi-groupe avec zéro, ayant au moins deux éléments et tel que le produit de deux éléments soit toujours 0 .

Soient B un demi-groupe quelconque et $D = A \cup B$; avec comme produit dans A et dans B le produit initial, et si $x \in A$, $y \in B$, $xy = 0$; $yx = x$.

Soient $z_1 = (x_1 x_2) x_3$, $z_2 = x_1(x_2 x_3)$.

Si x_1 ou $x_2 \in A$, $z_1 = z_2 = 0$.

Si $x_1, x_2 \in B$, $x_3 \in A$, alors $z_1 = x_3$; $z_2 = x_3$.

Si $x_1, x_2, x_3 \in B$, $z_1 = z_2$, car B est un demi-groupe.

Soient $x \in A$, $y \in B$, $D' \subset D$ avec $D' = A' \cup B'$, $A' \subseteq A$; $B' \subseteq B$.

$$xD' = xA' \cup xB' = 0 \cup 0 = 0 , \quad D'x = A'x \cup B'x \subseteq 0 \cup x .$$
$$yD' = yA' \cup yB' \subseteq A' \cup yB' , \quad D'y = A'y \cup B'y \subseteq 0 \cup B'y .$$

Ce calcul montre que D ne peut avoir d'élément grossissant à droite, mais si B contient un élément g grossissant à gauche, alors g est grossissant à gauche dans D. Prendre $D' = A \cup B'$ ou $B' \subset B$, $gB' = B$.

THÉORÈME 2.3 (Réciproque du théorème 1.3). - Dans un demi-groupe avec élément unité les éléments grossissants à droite et seulement eux sont inversibles à gauche et non inversibles à droite.

Soit ℓ tel que $D\ell = D$, $\ell D \neq D$.

Soit r tel que $r\ell = e$, e élément unité de D.

$$r(\ell D) = eD = D \implies r \text{ grossissant à gauche.}$$

Considérons $\mathfrak{A} = \{r , \ell\}$, $r\ell = e$, les éléments de $\mathfrak{A}$ sont de la forme $\ell^\alpha r^\beta$ $(\ell^0 = r^0 = e)$.

Soit $\ell^{\alpha_1} r^{\beta_1} = \ell^{\alpha_2} r^{\beta_2}$.

Si $\alpha_1 = \alpha_2$, $r^{\beta_1} = r^{\beta_2}$ comme r est grossissant, $\beta_1 = \beta_2$.

Soit $\alpha_1 > \alpha_2$, $\ell^{\alpha_1-\alpha_2} r^{\beta_1} = r^{\beta_2}$.

$$rD = D \ ; \quad \ell D \supseteq \ell^{\alpha_1-\alpha_2} rD = r^{\beta_2} D = D \quad \text{ce qui contredit } \ell D \neq D .$$

Donc $\mathfrak{A} = \{r , \ell\}$ est isomorphe au demi-groupe bicyclique $\mathfrak{B}$, le théorème 2.2 $\implies \ell$ grossissant à droite.

Avec les notations des théorèmes 1.2 ; 1.5, nous avons :

$$R = D^{(\ell)} \qquad L = D^{(r)} \qquad D^{(n)} = G + A .$$

3. Inversibilité potentielle.

DÉFINITION 3.1. - Un élément $a \in D$ est dit potentiellement inversible à gauche, s'il existe un sur-demi-groupe D' de D dans lequel a est inversible à gauche.

Cette notion a été introduite par LJAPIN. L'étude qui suit résulte des travaux de ŠUMOV (1958).

Soit $\mathcal{K}$ un système de générateurs de D, si $\forall\ k \in \mathcal{K}$, il existe dans D un élément z_k tel que $z_k\, a = k$, a est inversible à gauche dans D. En effet si $s = k_1 \ldots k_n$, on a

$$(k_1\, k_2 \ldots k_{n-1}\, z_{k_n}).a = s\ .$$

L'écriture $x \in D^*$ signifie que $x \in D$ ou que x est le mot vide.

LEMME 3.1. - Soit a un élément de D potentiellement inversible à gauche ; si pour un n et pour $x\, , y \in D^*$, on a $a^n\, x = a^n\, y$, alors $sx = sy$, $\forall\ s \in D$.

En effet soit D' un sur-demi-groupe dans lequel a est inversible à gauche. Dans D' il existe $b_1, \ldots, b_n$, avec

$$b_1\, a = s\ ;\quad b_2\, a = b_1\ ;\ \ldots\ ;\ b_n\, a = b_{n-1}\ .$$

$$\left.\begin{array}{l} b_n\, a^n\, x = b_{n-1}\, a^{n-1}\, x = \ldots = b_1\, ax = sx \\ b_n\, a^n\, y = b_{n-1}\, a^{n-1}\, y = \ldots = b_1\, ay = sy \end{array}\right\} \Longrightarrow sx = sy\ .$$

LEMME 3.2. - Si dans D, $a^2\, x = a^2\, y$ implique $sx = sy$, $\forall\ s \in D$; pour $x\, , y \in D^*$, $a^n\, x = a^n\, y$ implique $sx = sy$, $\forall\ s \in D$, $\forall\ n$.

En effet si x et y, tels que $ax = ay$, $a^2\, x = a^2\, y \Longrightarrow sx = sy$.

$$a^n\, x = a^n\, y\ ,\ n > 2 \Longrightarrow a^2(a^{n-2}\, x) = a^2(a^{n-2}\, y) \Longrightarrow a(a^{n-2}\, x) = a(a^{n-2}\, y) \Longrightarrow a^{n-1}\, x = a^{n-1}\, y$$

d'où par induction

$$a^2\, x = a^2\, y \text{ et } sx = sy\ .$$

THÉORÈME 3.1. - Dans le cas où a est de type fini, la condition du lemme 3.1 est nécessaire et suffisante pour que a soit inversible à gauche dans D.

Soit $(h\, , d)$ le type de a, on a $a^{h+d} = a^h$, $a^h\, a^d = a^h$. La condition du lemme 3.1 $\Longrightarrow sa^d = s$, $\forall\ s \in D$.

$(sa^{d-1}).a = s$, a est bien inversible à gauche dans D. On peut remarquer que dans ce cas le sous-demi-groupe engendré par a est un groupe. En effet, il existe $x_1, \dots, x_h$, avec $x_1 a = a$, $x_2 a = x_1 \dots x_h a = x_{h-1} \Longrightarrow x_h a^h = a$.

$$a^{h+d} = a^h \Longrightarrow x_h a^{h+d} = x_h a^h \Longrightarrow a^{1+d} = a .$$

<u>Construction fondamentale</u>. - Soit a un élément de D vérifiant la condition du lemme 3.1.

Soit $\mathcal{K} = \{(x, n)\}$, $x \in D$, n entier ≥ 0.

$\mathcal{B} = \{$mots sur $\mathcal{K}$, $W \in \mathcal{B}$, $W = (x_1, n_1) \dots (x_s, n_s)\}$ dans lesquels n_i, n_{i+1} ne peuvent être nuls en même temps.

$W.W' = W''$ si $W' = (x'_1, n'_1) \dots (x'_{s'}, n'_{s'})$, $W'' =$ produit des mots $W.W'$ si $n_s \neq 0$ ou si $n'_1 \neq 0$.

Si $n_s = 0$, $n'_s = 0$, alors dans W'' le terme $(x_s, 0)(x'_1, 0)$ est remplacé par $(x_s x'_1, 0)$. $\mathcal{B}$ est un demi-groupe.

<u>Définissons dans</u> $\mathcal{B}$ <u>les relations suivantes</u>.

$$\begin{cases} W \sim W'(\eta_1) \text{ si } W, W' \in \mathcal{B} . \\ W = (x_1, k)(x_2, 0) ; \ ax_2 = a^{k+1} r ; \ W' = (x_1 r, 0), \ x_1, x_2 \in D, \ r \in D^* . \end{cases}$$

$$\begin{cases} W \sim W'(\eta_2) \text{ si } W, W' \in \mathcal{B} . \\ W = (x_1, k)(x_2, 0), \ ax_2 = a^{\ell} r, \ W' = (x_1, k - \ell + 1)(r, 0) \\ \qquad \text{pour } k \geqslant \ell > 1 ; \ r \in D^* \text{ si } r \text{ mot vide, } (r, 0) \text{ mot vide} . \end{cases}$$

$$\begin{cases} W \sim W'(\eta_3) \text{ si on a soit} \\ W \sim W'(\eta_1) ; \ W' \sim W(\eta_1) ; \ W \sim W'(\eta_2) ; \ W' \sim W(\eta_2) ; \ W = W' . \end{cases}$$

Remarquons que si $W \sim W'(\eta_i)$, alors $\forall\ x \in D$, $W(x, 0) \sim W'(x, 0)(\eta_i)$ pour $i = (1, 2, 3)$.

<u>Définition dans</u> $\mathcal{B}$ <u>d'un opérateur</u> σ. - Soit $W = (x_1, k_1) \dots (x_m, k_m) \in \mathcal{B}$ et soit, s'il existe (x_t, k_t) l'élément le plus à droite de ce mot tel que $t < m$, $k_{t+1} = 0$ et qu'il existe $r \in D^*$ avec $ax_{t+1} = a^{k_t+1} r$. $\sigma(W)$ se déduit de W en remplaçant $(x_t, k_t)(x_{t+1}, 0)$ par $(x_t r, 0)$ [si $k_{t-1} = 0$, $(x_{t-1}, 0)(x_t r, 0) = (x_{t-1} x_t r, 0)$]. S'il n'existe pas dans W d'élément (x_t, k_t), on pose $\sigma(W) = W$. σ est bien défini, car si $ax_{t+1} = a^{k_t+1} r = a^{k_t+1} r'$ d'après l'hypothèse que vérifie a, $xr = xr'$, $\forall\ x \in D$, donc $x_t r = x_t r'$.

<u>Notations.</u>

η étant une relation binaire dans D, nous écrirons $x \sim y(\eta')$, $x, y \in D$ s'il existe $u_1, u_2 \in D^*$, $x_1, y_1 \in D$ tels que $x = u_1 x_1 u_2$; $y = u_1 y_1 u_2$; $x_1 \sim y_1(\eta)$.

η'' = fermeture transitive de η'. η'' est la relation d'équivalence régulière engendrée par η si η est une relation réflexive, symétrique.

On a $W \sim \sigma(W)$ (η_1') et $\forall$ $x \in D$, $\sigma[(x, 0)] = (x, 0)$ ou $W = \sigma(W)$.

<u>Propriétés de</u> η_3, η_3', η_3''.

LEMME 3.3. - Si $W \sim W'$ (η_3') alors $\sigma(W) \sim \sigma(W')$ (η_3').

Soient $W = T_1.U.T_2$, $W' = T_1.U'.T_2$, $U \sim U'$ (η_3).

Prendre $U \sim U'$ (η_i), $i = 1, 2$, car le cas $U = U'$ est trivial et le cas $U' \sim U$ (η_i) est symétrique du précédent.

D'après la remarque qui suit la définition de η_3 on peut supposer que T_2 commence par (x, p) avec $p \neq 0$.

- Si $\sigma(T_2) \neq T_2$, $\sigma(W) = T_1.U.\sigma(T_2)$; $\sigma(W') = T_1.U'.\sigma(T_2)$ d'où $\sigma(W) \sim \sigma(W')$ (η_3')

- Si $\sigma(T_2) = T_2$. Supposons $U \sim U'$ (η_1) alors $\sigma(U) = U'$ ce qui donne

$$\sigma(W) = T_1.\sigma(U).T_2 \implies \sigma(W) = W'$$

$$\text{or } \begin{cases} W' \sim \sigma(W') \quad (\eta_1') \\ \text{ou } W' = \sigma(W') \end{cases} \implies \sigma(W) \sim \sigma(W') \quad (\eta_3')$$

Si $U \sim U'$ (η_2) alors

$U = (x_1, k).(x_2, 0)$; $ax_2 = a^\ell r$; $U' = (x_1, k - \ell + 1)(r, 0)$ $k \geq \ell > 1$.

S'il existe s tel que $ax_2 = a^{k+1} s$, on a $\sigma(W) = T_1.(x_1 s, 0).T_2$

$$a^\ell r = a^{k+1} s \implies ar = a^{k-\ell+2} s$$

d'après la propriété de a.

$$\sigma(W') = T_1.(x_1 s, 0).T_2 = \sigma(W).$$

S'il n'existe pas de s vérifiant $ax_2 = a^{k+1} s$, il n'existe pas non plus de s tel que $ar = a^{k-\ell+2} s$, par suite

$$\sigma(U) = U \ ; \quad \sigma(U') = U'$$

$$\sigma(W) = \sigma(T_1).U.T_2 \ ; \quad \sigma(W') = \sigma(T_1).U'.T_2$$

d'où

$$\sigma(W) \sim \sigma(W') \quad (\eta_2').$$

LEMME 3.4. - Si $(x , 0) \sim (y , 0) \quad (\eta_3'')$, on a $x = y$.

En effet

$$(x , 0) \sim (y , 0) \quad (\eta_3'') \implies \exists \; V_1 , V_2 , \dots , V_p \in \mathcal{B}$$

tels que

$$(x , 0) = V_1 \; ; \; V_1 \sim V_2 \quad (\eta_3') \; ; \dots ; V_i \sim V_{i+1} \quad (\eta_3') \; ; \dots ; V_p = (y , 0) .$$

Récurrence sur p . Si $p = 1$ trivial,

$$\sigma[(x , 0)] = (x , 0) = \sigma(V_1) \; ; \quad \sigma(V_p) = \sigma[(y , 0)] = (y , 0) .$$

Le lemme 3.3 entraîne $\sigma(V_i) \sim \sigma(V_{i+1}) \quad (\eta_3')$.

$V_2 \sim (x , 0) \quad (\eta_3')$, la seule possibilité est $V_2 \sim (x , 0) \quad (\eta_1')$ avec $V_2 = (x_1 , 0)(x_2 , k)(x_3 , 0)$; $ax_3 = a^{k+1} r$; $x = x_1 x_2 r$; mais alors

$$\sigma(V_2) = (x_1 x_2 r , 0) = (x , 0) .$$

On obtient donc une suite $\sigma(V_1)$; $\sigma(V_2)$; ... ; $\sigma(V_p)$ plus courte que la précédente. Par suite $x = y$.

THÉORÈME 3.2. - <u>Pour qu'un élément</u> a <u>d'un demi-groupe</u> D <u>soit potentiellement inversible à gauche, il faut et il suffit que</u> $\forall \; x , y \in D^*$, <u>tels que</u> $a^2 x = a^2 y$, <u>on ait</u> $sx = sy$, $\forall \; s \in D$.

La condition nécessaire résulte du lemme 3.1.

<u>Condition suffisante</u> : Considérons $\mathcal{B}$ comme un <u>sur-demi-groupe</u> de D en identifiant $(x , 0)$ avec x ; et $\overline{\mathcal{B}} = \mathcal{B}/\eta_3''$. Dans $\overline{\mathcal{B}}$ l'élément $\bar{a}$ (classe de a mod η_3'') est inversible à gauche. En effet pour $\forall \; (x , k)$, on a $k \geq 1$,

$$(x , k + 1)(a , 0) \sim (x , k) \quad (\eta_2) \qquad \text{prendre } \ell = 2 \; ; \; r \text{ mot vide.}$$

$$(x , 1)(a , 0) \sim (x , 0) \quad (\eta_1) \qquad \text{prendre } r \text{ vide.}$$

Dans $\overline{\mathcal{B}}$ on a

$$\overline{(x , k + 1)} . \bar{a} = \overline{(x , k)} ,$$

Soit φ l'homomorphisme naturel de $\mathcal{B}$ sur $\overline{\mathcal{B}}$.

La restriction de φ à D est un isomorphisme d'après le lemme 3.4.

$\overline{\mathcal{B}}$ étant engendré par les $\overline{(x , k)}$, $\bar{a}$ est inversible à gauche dans $\overline{\mathcal{B}}$.

COROLLAIRE 3.1. - Dans un semi-groupe D tous les éléments sont potentiellement inversibles à droite.

Soit $a \in D$, $a^2 x = a^2 y \implies x = y$ si x et $y \in D \implies sx = sy$.

$$a^2 x = a^2 \implies ax = a .$$

Mais si dans D , $ax = a$, a simplifiable, alors x est élément unité de D. Donc $sx = s$, $\forall\ s \in D$.

Un élément potentiellement b-inversible (c'est-à-dire tel qu'il existe $D' \supseteq D$ avec $aD' = D'a = D'$) est évidemment potentiellement inversible à gauche et à droite. La réciproque est fausse. On peut construire un exemple où D est un semi-groupe et où D contient un élément non potentiellement b-inversible. En particulier ce semi-groupe n'est pas immergeable dans un groupe.

<u>Soit le demi-groupe libre</u> $\mathcal{W}_{\mathcal{K}}$ construit avec comme système de générateurs $\mathcal{K} = \{x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , x_5 , x_6\}$.

Soient

$$\mathcal{K}_1 = \{x_1 , x_2 , x_3 , x_4\} , \quad \mathcal{K}_2 = \{x_1 , x_2 , x_5 , x_6\}$$

$$\mathcal{B} = \{x_1 x_5 , x_1 x_6 , x_2 x_5 , x_3 x_1 , x_3 x_2 , x_4 x_1\} .$$

Remarquons que $x_i x_j \in \mathcal{B} \implies x_i \in \mathcal{K}_1 ; \ x_j \in \mathcal{K}_2$.

Soient

$$\delta : \mathcal{K}_1 \to \mathcal{K}_1$$

$$\delta(x_1) = x_3 ; \quad \delta(x_2) = x_4 ; \quad \delta(x_3) = x_1 ; \quad \delta(x_4) = x_2$$

$$\tau : \mathcal{K}_2 \to \mathcal{K}_2$$

$$\tau(x_1) = x_5 ; \quad \tau(x_2) = x_6 ; \quad \tau(x_5) = x_1 ; \quad \tau(x_6) = x_2 .$$

Remarquons que

$$\delta^2(x_i) = x_i ; \quad \tau^2(x_j) = x_j .$$

<u>Définissons dans</u> $\mathcal{W}_{\mathcal{K}}$ <u>la relation</u> η <u>suivante</u> $U , V \in \mathcal{W}_{\mathcal{K}}$, $U \sim V \ (\eta)$ si $U = V$ ou $U = x_i x_j \in \mathcal{B}$ et $V = \delta(x_i).\tau(x_j)$.

(η) est réflexive et symétrique.

<u>Propriétés de</u> (η) .

α. Si $x_i x_k \in \mathcal{B}$; $x_j x_k \in \mathcal{B}$; alors on ne peut avoir $x_j = \delta(x_i)$.

β. Si $x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_3} \sim x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_s} \ (\eta'')$; si $x_{i_1} \notin \mathcal{K}_1$, alors $x_{i_1} = x_{j_1}$.

γ. Si $x_{i_1} \in \mathcal{K}_1$ alors $x_{j_1} = x_{i_1}$ ou $x_{j_1} = \delta(x_{i_1})$.

δ. Si $x_k x_{i_1} \dots x_{i_s} \sim x_k x_{j_1} \dots x_{j_s} \ (\eta')$, alors

$$x_{i_1} \dots x_{i_s} \sim x_{j_1} \dots x_{j_s} \quad (\eta') .$$

ε. Si $x_k x_{i_1} \dots x_{i_s} \sim x_k x_{j_1} \dots x_{j_s}$ (η'') , alors

$$x_{i_1} \dots x_{i_s} \sim x_{j_1} \dots x_{j_s} \quad (\eta'').$$

En effet soient

$$U_1 \sim U_2 \quad (\eta') \dots U_\alpha \sim U_{\alpha+1} \quad (\eta') \dots U_m \sim U_{m+1} \quad (\eta')$$

où

$$U_1 = x_k x_{i_1} \dots x_{i_s} \; ; \; U_\alpha = x_{\alpha_0} x_{\alpha_1} \dots x_{\alpha_s} \; ; \; U_{m+1} = x_k x_{j_1} \dots x_{j_s} \; ;$$
$$2 \leqslant \alpha \leqslant m .$$

Remarque : deux mots liés par (η') ont la même longueur, ce qui justifie l'écriture des U_α .

Raisonnons par récurrence sur le nombre $m + 1$ de termes de la suite U_α . Si $x_k x_{i_1} \notin ß$ ou $x_k x_{j_1} \notin ß$, le 2e ou le m-ième terme commence par x_k , l'hypothèse de récurrence donne le résultat car pour $m = 1$ nous sommes dans le cas (δ) .

Soit $m > 1$. S'il existe α avec $x_{\alpha_0} = x_k$ en appliquant l'hypothèse de récurrence à $U_1 , U_2 , \dots , U_\alpha ; U_\alpha , U_{\alpha+1} , \dots , U_m$, on obtient

$$x_{i_1} \dots x_{i_s} \sim x_{\alpha_1} \dots x_{\alpha_s} \quad (\eta'')$$
$$x_{\alpha_1} \dots x_{\alpha_s} \sim x_{j_1} \dots x_{j_s} \quad (\eta'')$$

d'où le résultat.

Si pour α , $x_{\alpha_0} \neq x_k$, comme $x_k x_{i_1}$ ou $x_k x_{j_1} \in ß$, on a $x_k \in \mathcal{K}_1$, donc d'après (γ) $x_{\alpha_0} = \delta(x_k)$.

$$x_{20} = \delta(x_k) \implies x_{21} = \tau(x_{i_1})$$

et

$$x_{22} = x_{i_2} \; ; \dots x_{2s} = x_{i_s} .$$

De même

$$x_{m_0} = \delta(x_k) \; ; \; x_{m_1} = \tau(x_{j_1}) \; ; \; x_{m_2} = x_{j_2} \dots x_{m_s} = x_{j_s} .$$

$U_2 \sim U_m$ (η'') . Donc l'hypothèse de récurrence donne

$$x_{21} x_{22} \dots x_{2s} \sim x_{m_1} \dots x_{m_s} \quad (\eta'') .$$

(β) et (γ) $\Longrightarrow$ $x_{2s} = x_{m_1}$ ou $x_{2_1} = \delta(x_{m_1})$, mais $x_{20}\, x_{21} \in \mathcal{B}$; $x_{m_0}\, x_{m_1} \in \mathcal{B}$ $\Longrightarrow$ 2e cas impossible.

On peut à nouveau appliquer l'hypothèse qui donne

$$x_{22} \dots x_{2s} \sim x_{m_2} \dots x_{m_s} \quad (\eta'')$$

c'est-à-dire

$$x_{i_2} \dots x_{i_s} \sim x_{j_2} \dots x_{j_s} \quad (\eta'') .$$

Mais $x_{i_1} = \tau(x_{21})$, $x_{j_1} = \tau(x_{m_1})$, $x_{21} = x_{m_1}$ d'où

$$x_{i_1}\, x_{i_2} \dots x_{i_s} \sim x_{j_1}\, x_{j_2} \dots x_{j_s} \quad (\eta'') .$$

ζ. Si

$$x_{i_1}\, x_{i_2} \dots x_{i_s}\, x_k \sim x_{j_1}\, x_{j_2} \dots x_{j_s}\, x_k \quad (\eta'') ,$$

alors

$$x_{i_1}\, x_{i_2} \dots x_{i_s} \sim x_{j_1}\, x_{j_2} \dots x_{j_s} \quad (\eta'') .$$

Démonstration analogue à celle de (ε).

ξ. $x_2\, x_6 \not\sim x_4\, x_2 \quad (\eta'')$.

Résulte de ce que $x_2\, x_6$ n'est lié qu'à lui-même par η .

Considérons maintenant le demi-groupe quotient $\mathcal{W}_{\mathcal{K}}^{\eta} = \mathcal{W}_{\mathcal{K}}/\eta''$. Ses éléments sont les classes notées $\overline{W}$, si $W \in \overline{W}$.

Des propriétés (ε) et (ζ) de η'' , on déduit

$$\overline{x}_k\, \overline{U} = \overline{x}_k\, \overline{V} \Longrightarrow \overline{U} = \overline{V}$$
$$\overline{U}\, \overline{x}_k = \overline{V}\, \overline{x}_k \Longrightarrow \overline{U} = \overline{V}$$

$\mathcal{W}_{\mathcal{K}}^{\eta}$ est donc un semi-groupe.

LEMME 3.5. - Si dans un demi-groupe D des éléments $y_1 , \dots , y_6$ vérifient $y_1\, y_5 = y_3\, y_1$, $y_2\, y_5 = y_4\, y_1$, $y_1\, y_6 = y_3\, y_2$ et s'il existe un sur-demi-groupe D' dans lequel y_1 soit bilatèrement inversible, on a $y_2\, y_6 = y_4\, y_2$.

Dans D' il existe u et v tels que $y_1\, u = y_2$; $v y_1 = y_2$

$$y_2\, y_6 = v y_1\, y_6 = v y_3\, y_2 = v y_3\, y_1\, u = v y_1\, y_5\, u = y_2\, y_5\, u$$
$$= y_4\, y_1\, u = y_4\, y_2 .$$

Dans le semi-groupe $\mathcal{W}_{\mathcal{K}}^{\eta}$ les éléments $\overline{x}_1 , \dots , \overline{x}_6$ vérifient les hypothèses du lemme 3.5, mais on n'a pas $\overline{x}_2\, \overline{x}_6 = \overline{x}_4\, \overline{x}_2$, donc $\overline{x}_1$ n'est pas un élément potentiellement b-inversible.

Remarque. - Le 23 avril 1956, J. RIGUET avait fait dans ce séminaire un exposé [3] ayant pour titre : "Travaux soviétiques récents sur la théorie des demi-groupes". Il s'agissait d'un mémoire de E. S. LJAPIN [1]. Le théorème principal de la première partie de ce travail était énoncé : "Pour qu'un élément d'un demi-groupe soit potentiellement inversible, il faut et il suffit qu'il soit simplifiable". L'exemple ci-dessus contredit évidemment ce théorème. En reprenant l'exposé de RIGUET, on peut constater qu'en plus de certaines imprécisions dans la définition de l'application σ, c'est le lemme 2 qui est faux. Soient $u = t_1 t_2$; $v = t_1 x \bar{x} t_2$. On n'a pas $\sigma(v) = u$ ou $\sigma(u) \dashv \sigma(v)$.

En effet prenons comme demi-groupe E le demi-groupe $\mathfrak{W}_{\mathfrak{K}}^{\eta} = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6\}$ avec

$$y_1 y_5 = y_3 y_1 \; ; \quad y_2 y_5 = y_4 y_1 \; ; \quad y_1 y_6 = y_3 y_2 \; ; \quad y_2 y_6 \neq y_4 y_2 \; .$$

Faisons jouer à y_1 le rôle de x dans l'exposé de RIGUET.

Soit

$$u = (y_2 \bar{x} y_3) . y_2 \; , \quad v = y_2 \bar{x} y_3 x \bar{x} y_2 \; .$$

Mais

$$u = y_2 \bar{x} x y_6 \qquad \sigma(u) = y_2 y_6$$

$$v = y_2 \bar{x} x y_5 \bar{x} y_2 \qquad \sigma(v) = y_2 y_5 \bar{x} y_2 = y_4 x \bar{x} y_2 \; .$$

D'où

$$\sigma(v) \neq u \; ; \qquad \sigma(u) \not\dashv (v) \; .$$

Donc, du théorème énoncé au début de cette remarque, seule reste valable la condition nécessaire.

BIBLIOGRAPHIE

[1] LJAPIN (E. S.). - Inversibilité potentielle des éléments d'un demi-groupe [en russe], Mat. Sbornik, N. S., t. 38, 1956, p. 373-388.

[2] LJAPIN (E. S.). - Polugrupp' [Demi-groupes]. - Moskva, 1960.

[3] RIGUET (Jacques). - Travaux soviétiques récents sur la théorie des demi-groupes, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et Théorie des nombres, t. 9, 1955/56, n° 21, 13 p.