Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Pierre Grillet

Sur l'équivalence F de Green

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 16, nº 1 (1962-1963), exp. nº 2, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1962-1963__16_1_A2_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
16e année, 1962/63, n° 2

12 novembre 1962

SUR L'ÉQUIVALENCE $\mathfrak{J}$ DE GREEN

par Pierre GRILLET

I. Semi-équivalences canoniques et équivalences associées.

On suppose connues les propriétés élémentaires des relations binaires sur un ensemble E en particulier : inclusion, intersection, réunion, produit, cette dernière opération étant définie par

$$(x \ \mathcal{R} \circ \mathcal{S} \ y) \iff ((\exists \ z \in E) \ \ x \, \mathcal{R} \, z \ \text{ et } \ z \, \mathcal{S} \, y) \ .$$

L'équivalence engendrée par deux équivalences $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sera notée $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$; en général $\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \neq \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$. L'égalité sera aussi notée I.

1. Semi-équivalences.

DÉFINITION 1. - On appelle semi-équivalence toute relation binaire symétrique et transitive.

DÉFINITION 2. - Si s est une semi-équivalence sur E, et si $x \in E$, on pose

$$s(x) = \{y \in E \ ; \ \ x \ s \ y\} \ .$$

PROPOSITION 1. - $s(x) \neq \emptyset \iff x \ s \ x$; $s(x)$ rencontre $s(y) \implies s(x) = s(y)$.

Ceci résulte immédiatement des propriétés de s (symétrie et transitivité). On posera la

DÉFINITION 3. - On appelle s-classe tout complexe $s(x)$.

D'après la proposition 1, $x \ s \ y$ équivaut à $s(x) = s(y) \neq \emptyset$, en sorte que la considération d'une semi-équivalence équivaut à celle d'une "décomposition" au sens de O. BORŮVKA [1].

PROPOSITION 2. - Si s est une semi-équivalence, $\mathbb{S} = s \cup I$ est une équivalence, et si $x \in E$:

$$\begin{aligned} \mathbb{S}(x) &= s(x) \quad \text{si} \quad x\,s\,x \\ &= \{x\} \quad \text{si} \quad s(x) = \emptyset \,. \end{aligned}$$

2. Semi-équivalences canoniques d'un demi-groupe.

Dans toute la suite, D est un demi-groupe.

DÉFINITION 4. - On appelle r, ℓ, m les relations binaires sur D définies par :

$$a\,r\,b \iff a \in bD \quad \text{et} \quad b \in aD$$

$$a\,\ell\,b \iff a \in Db \quad \text{et} \quad b \in Da$$

$$a\,m\,b \iff a \in DbD \quad \text{et} \quad b \in DaD \,.$$

PROPOSITION 3. - ℓ, r, m sont des semi-équivalences.

Elles sont déjà symétriques. Démontrons que m, par exemple, est transitive ; si $a, b, c \in D$:

$$\begin{aligned} a\,m\,b \text{ et } b\,m\,c &\implies a \in DbD,\ b \in DcD,\ c \in DbD,\ b \in DaD \\ &\implies a \in D^2\,cD^2 \subseteq DcD,\ c \in D^2\,aD^2 \subseteq DaD \implies a\,m\,c\,, \end{aligned}$$

ℓ, r, m seront par suite appelées semi-équivalences canoniques de D.

PROPOSITION 4. - Le produit de deux semi-équivalences canoniques est contenu dans une semi-équivalence canonique, conformément à la table :

$\subseteq$	ℓ	r	m
ℓ	ℓ	m	m
r	m	r	m
m	m	m	m

D'abord $\ell \circ \ell \subseteq \ell$, $r \circ r \subseteq r$, $m \circ m \subseteq m$ résulte de la transitivité de ℓ, r, m. Montrons $\ell \circ r \subseteq m$:

$$a \,\ell\, b \text{ et } b \,r\, c \implies a \in Db,\ b \in Da,\ b \in cD,\ c \in bD$$
$$\implies a \in DcD,\ c \in DaD \implies a \,m\, c.$$

Dualement $r \circ \ell \subseteq m$. Montrons $\ell \circ m \subseteq m$:

$$a \,\ell\, b \text{ et } b \,m\, c \implies a \in Db,\ b \in Da,\ b \in DcD,\ c \in DbD$$
$$\implies a \in D^2 cD \subseteq DcD,\ c \in D^2 aD \subseteq DaD \implies a \,m\, c.$$

De même $m \circ \ell \subseteq m$. Dualement, $r \circ m \subseteq m$ et $m \circ r \subseteq m$.

3. Equivalences associées aux semi-équivalences canoniques.

D'après les propositions 2 et 3, les relations $\mathcal{L} = \ell \cup I$, $\mathcal{R} = r \cup I$, $\mathcal{M} = m \cup I$ sont des équivalences. Pour $\mathcal{L}$ et $\mathcal{R}$, on a la

PROPOSITION 5. - Si $a, b \in D$, $a \,\mathcal{L}\, b$ (resp. $a \,\mathcal{R}\, b$) si et seulement si a et b engendrent le même idéal à gauche (resp. à droite).

Ces énoncés étant duaux, il suffit de démontrer l'énoncé "à gauche". Notons $(a)_g$ l'idéal à gauche engendré par a. Si $a \,\mathcal{L}\, b$, on a, soit $a = b$; soit $a \,\ell\, b$, et alors $a \in (b)_g$ et $b \in (a)_g$; dans tous les cas $(a)_g = (b)_g$. Réciproquement, on sait que $(a)_g = a \cup Da$; donc si $(a)_g = (b)_g$ et $a \neq b$, on a $a \in Db$ et $b \in Da$, d'où $a \,\ell\, b$.

L'énoncé d'une proposition analogue pour $\mathcal{M}$ requiert des considérations supplémentaires.

4. Idéaux médians.

DÉFINITION 5. - Une partie A de D est dite un idéal médian de D si et seulement si $DAD \subseteq D$ [1].

PROPOSITION 6. - L'ensemble des idéaux médians est stable par réunion et intersection.

---

[1] Cette notion a été considérée indépendamment par R. DESQ au cours de ses travaux.

Soit $(A_\iota)_{\iota\in I}$ une famille d'idéaux médians.

$D(\bigcup_{\iota\in I} A_\iota)\, D = \bigcup_{\iota\in I} (DA_\iota D) \subseteq (\bigcup_{\iota\in I} A_\iota)$, donc $\bigcup_{\iota\in I} A_\iota$ est un idéal médian ;

$D(\bigcap_{\iota\in I} A_\iota)\, D \subseteq \bigcap_{\iota\in I} (DA_\iota D) \subseteq (\bigcap_{\iota\in I} A_\iota)$, donc $\bigcap_{\iota\in I} A_\iota$ est un idéal médian .

PROPOSITION 7. - Tout idéal bilatère est un idéal médian.

PROPOSITION 8. - Si $a \in D$, l'idéal médian engendré par a est $(a)_m = a \cup DaD$.

$a \cup DaD$ est clairement un idéal médian contenant a ; réciproquement, si A est un idéal médian contenant a, on a $DaD \subseteq DAD \subseteq A$, et $a \cup DaD \subseteq A$; donc $(a)_m = a \cup DaD$.

PROPOSITION 9. - Si $a , b \in D$, $a \mathcal{M} b$ si et seulement si $(a)_m = (b)_m$.

Si $a \mathcal{M} b$, on a, soit $a = b$, soit $a \, m \, b$, et alors $a \in (b)_m$ et $b \in (a)_m$; dans tous les cas, $(a)_m = (b)_m$. Réciproquement, si $(a)_m = (b)_m$, $a \cup DaD = b \cup DbD$ et, si $a \neq b$, $a \in DbD$ et $b \in DaD$, d'où $a \, m \, b$.

II. Structure de l'équivalence $\mathcal{J}$ de Green.

1. Equivalences de Green.

J. A. GREEN a introduit [5] les équivalences suivantes :

$$a \,\mathcal{L}\, b \iff (a)_g = (b)_g$$
$$a \,\mathcal{R}\, b \iff (a)_d = (b)_d$$
$$a \,\mathcal{J}\, b \iff (a)_b = (b)_b \;,$$

où $(a)_b$ désigne l'idéal bilatère engendré par a. Puis il a étudié les remarquables propriétés de $\mathcal{D} = \mathcal{L} \vee \mathcal{R}$ et $\mathcal{H} = \mathcal{L} \cap \mathcal{R}$. Les travaux postérieurs reflètent cette tendance (voir, par exemple, le livre de A. H. CLIFFORD et G. B. PRESTON [2]) ; $\mathcal{J}$ n'y figure guère que par sa définition.

Les notions introduites au début de cet exposé permettent au contraire de faire un pas dans l'étude de $\mathcal{J}$; on notera que les équivalences $\mathcal{L}$ et $\mathcal{R}$ de la première partie coïncident avec celles de J. A. GREEN (proposition 5).

2. Un théorème.

THÉORÈME 1. – $\mathcal{J} = \mathcal{L} \cup \mathcal{R} \cup \mathcal{M}$.

Montrons d'abord $\mathcal{L} \cup \mathcal{R} \cup \mathcal{M} \subseteq \mathcal{J}$. Tout idéal bilatère étant aussi idéal à droite, à gauche, et médian, on a, pour tout $a \in D$, $(a)_b = ((a)_g)_b = ((a)_d)_b = ((a)_m)_b$ (en désignant par $(A)_b$ l'idéal bilatère engendré par la partie A de D) ; par suite $a \mathcal{L} b \Longrightarrow a \mathcal{J} b$, $a \mathcal{R} b \Longrightarrow a \mathcal{J} b$ (proposition 5), $a \mathcal{M} b \Longrightarrow a \mathcal{J} b$ (proposition 9), et $\mathcal{L} \cup \mathcal{R} \cup \mathcal{M} \subseteq \mathcal{J}$.

Réciproquement, supposons $a \mathcal{J} b$; comme $(a)_b = a \cup aD \cup Da \cup DaD$, on a : $a \cup Da \cup aD \cup DaD = b \cup Db \cup bD \cup DbD$; si $a = b$, on a par exemple $a \mathcal{L} b$. Si $a \neq b$, il y a neuf cas à envisager.

(i) $a \in Db$ et $b \in Da \Longrightarrow a \ell b$ et $a \mathcal{L} b$.

(ii) $a \in Db$ et $b \in aD \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a \in DaD \subseteq D^2 bD \subseteq DbD \\ b \in DbD \subseteq DaD^2 \subseteq DaD \end{array} \right\} \Longrightarrow a \mathcal{M} b$.

(iii) $a \in Db$ et $b \in DaD \Longrightarrow a \in D^2 aD \subseteq D^3 bD \subseteq DbD \Longrightarrow a \mathcal{M} b$.

(iv), (v), (vi) $a \in bD$: ces cas sont duaux de (i), (ii), (iii) et conduisent par suite à $a \mathcal{R} b$ ou $a \mathcal{M} b$.

(vii) $a \in DbD$ et $b \in Da$: se ramène à (iii) par échange de a et b.

(viii) $a \in DbD$ et $b \in aD$: se ramène à (vi) par échange de a et b.

(ix) $a \in DbD$ et $b \in DaD \Longrightarrow a \mathcal{M} b$.

Par suite $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{L} \cup \mathcal{R} \cup \mathcal{M}$.

COROLLAIRE. – $\mathcal{J} = \mathcal{D} \vee \mathcal{M}$.

En effet $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{J}$ et $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{J}$; donc $\mathcal{D} \vee \mathcal{M} \subseteq \mathcal{J}$; or $\mathcal{J} = \mathcal{L} \cup \mathcal{R} \cup \mathcal{M} \subseteq \mathcal{D} \cup \mathcal{M} \subseteq \mathcal{D} \vee \mathcal{M}$.

3. Type d'un élément de D.

DÉFINITION 6. – Un élément $a \in D$ est dit :

de type m si et seulement si $a \in DaD$ ($\Longleftrightarrow a\, m\, a$)

de type d si et seulement si $a \in aD$ et $a \notin DaD$ ($\Longleftrightarrow a\, r\, a$, $a \not m\, a$)

de type g si et seulement si $a \in Da$ et $a \notin DaD$ ($\Longleftrightarrow a\, \ell\, a$, $a \not m\, a$)

de type z si et seulement si $a \notin aD \vee Da \vee DaD$ ($\Longleftrightarrow a \not\ell\, a$, $a \not r\, b$, $a \not m\, b$)

on appelle M (resp. R, L, Z) l'ensemble des éléments de type m (resp. d, g, z).

PROPOSITION 10. – Tout élément de D a un type et un seul.

Que tout élément ait un type est à peu près évident. Ce type est unique car le type m exclut tous les autres ; il en est de même du type z : d et g s'excluent, car $a\,r\,a$ et $a\,\ell\,a$ implique $a\,m\,a$ (proposition 4).

Les sous-ensembles M, L, R, Z ne possèdent guère de propriétés multiplicatives immédiates, sauf $LR \subseteq M$.

PROPOSITION 11. – Tout élément idempotent, tout élément inversible, tout élément régulier, est de type m. Tout élément de $D - D^2$ est de type z.

a est dit inversible si et seulement s'il existe a' tel que $aa'a = a$, $a'aa' = a'$; pour un tel élément, $a\,m\,a'$, donc $a\,m\,a$ (proposition 1). a est dit régulier si et seulement s'il existe x tel que $axa = a$; on sait qu'un élément régulier est inversible (prendre $a' = xax$). a est dit idempotent si et seulement si $a^2 = a$; tout idempotent est régulier. Enfin il est clair que $D - D^2 \subseteq Z$.

4. Étude des $\mathfrak{F}$-classes.

THÉORÈME 2. – Soit $a \in D$. Si a est de type m (resp. d, g, z), $\mathfrak{F}(a) = m(a)$ (resp. $r(a)$, $\ell(a)$, $\{a\}$).

On a $\mathfrak{F} = m \cup \ell \cup r \cup I$ (théorème 1). Par suite, pour tout $a \in D$, $m(a) \subseteq \mathfrak{F}(a)$, $\ell(a) \subseteq \mathfrak{F}(a)$, $r(a) \subseteq \mathfrak{F}(a)$, $\{a\} \subseteq \mathfrak{F}(a)$. Soit b un élément quelconque de $\mathfrak{F}(a)$.

Si a est de type m, $a\,m\,a$ et $a\,\mathfrak{F}\,b$; d'où $a\,m\,b$, car $m \circ \mathfrak{F} = m \circ (m \cup \ell \cup r \cup I) \subseteq m$ (proposition 4) ; et $\mathfrak{F}(a) = m(a)$. Si a est de type d, $a\,r\,a$ et $a\,\mathfrak{F}\,b$; d'où $a\,r\,b$ ou $a\,m\,b$ car $r \circ \mathfrak{F} = r \circ (m \cup \ell \cup r \cup I) \subseteq m \cup r$ (proposition 4) ; mais $a\,m\,b$ entraîne $a\,m\,a$ (proposition 1) et est impossible, puisque a est de type d ; par suite $a\,r\,b$; et $\mathfrak{F}(a) = r(a)$. Dualement, si a est de type g, $\mathfrak{F}(a) = \ell(a)$. Enfin, si a est de type z, on n'a ni $a\,\ell\,b$, ni $a\,r\,b$, ni $a\,m\,b$, qui entraîneraient soit $a\,\ell\,a$, soit $a\,r\,a$, soit $a\,m\,a$; donc $b = a$, et $\mathfrak{F}(a) = \{a\}$.

COROLLAIRE 1. – Tous les éléments d'une $\mathfrak{F}$-classe ont le même type.

Soit $a, b \in D$ tels que $a \mathcal{J} b$. a possède un type (proposition 10). Si a est de type m, $a\, m\, b$, d'où $b\, m\, b$ (proposition 1) et b est de type m. Si a est de type d, $a\, r\, b$, d'où $b\, r\, b$ (proposition 1) ; si on avait $b\, m\, b$, b serait de type m, et a aussi, d'après ce qui précède ; donc $b\, r\, b$, $b \not m\, b$ et b est de type d. Dualement, si a est de type g, b est de type g. Enfin si a est de type z, b est de type z, car s'il était d'un autre type il en serait de même de a, d'après ce qui précède.

Autrement dit, M, R, L, Z sont saturés pour $\mathcal{J}$.

Vu ce corollaire, on posera la

DÉFINITION 7. - On appelle type d'une $\mathcal{J}$-classe le type de chacun de ses éléments.

Toute $\mathcal{J}$-classe a un type, et un seulement.

COROLLAIRE 2. - Une $\mathcal{J}$-classe est une $\mathcal{M}$-classe, une $\mathcal{R}$-classe, une $\mathcal{L}$-classe, ou est réduite à un élément.

En effet c'est une m-classe, une r-classe, une ℓ-classe, ou un complexe d'un élément ; le corollaire résulte alors de la proposition 2.

III. Application aux idéaux bilatères maximaux.

1. Type d'un idéal bilatère maximal.

PROPOSITION 12. - Une partie A de D est un idéal bilatère maximal si et seulement si son complémentaire C est une $\mathcal{J}$-classe consistante.

Rappelons qu'une partie C de D est dite consistante (P. DUBREIL [3]) si et seulement si $xy \in C \Longrightarrow x \in C$ et $y \in C$; et que C est consistante si et seulement si $D - C$ est un idéal bilatère.

Si A est un idéal bilatère maximal, C est consistante ; C est indivisible pour $\mathcal{J}$, car si $a, b \in C$, $A \cup (a)_b = D$ puisque A est maximal, donc $b \in (a)_b$; de même $a \in (b)_b$ et $a \mathcal{J} b$. C est saturée pour $\mathcal{J}$, car si $a \in C$ et $a \mathcal{J} b$, $A \cup (a)_b = D$, donc $A \cup (b)_b = D$ et $b \notin A$, donc $b \in C$.

Si C est une $\mathcal{J}$-classe consistante, $A = D - C$ est un idéal bilatère. Soit B un idéal bilatère tel que $A \subset B$; si $a \in B - A$, $a \in C$, donc $C \subseteq (a)_b$; et $(a)_b \subseteq B$, d'où $D = A \cup C \subseteq B$ et A est maximal.

DÉFINITION 8. – On appelle type d'un idéal bilatère maximal le type de chaque élément de son complémentaire.

Tout idéal bilatère maximal a un type, et un seulement.

2. Propriétés des idéaux bilatères maximaux.

THÉORÈME 3a. – Un idéal bilatère maximal de type m est premier.

Premier est entendu au sens suivant (cf. N. H. McCOY [6]) :

$$aDb \subseteq A \implies a \in A \text{ ou } b \in A .$$

Soit A un idéal bilatère maximal de type m . Pour que A soit premier, il faut et il suffit que

$$a \notin A \text{ et } b \notin A \implies (\exists\ x \in D)\ axb \notin A ,$$

donc, en posant $C = D - A$, que

$$a \in C \text{ et } b \in C \implies (\exists\ x \in D)\ axb \in C .$$

Or C est une m-classe consistante ; puisque $a\, m\, b$, $(\exists\ y , z \in D)$ $b = yaz$; puisque C est consistante, $z \in C$ et $(\exists\ x , t \in D)$ $z = xbt$; d'où $yaxbt = b \in C$, et, puisque C est consistante, $axb \in C$.

THÉORÈME 3b. – Un idéal bilatère maximal de type d ou g est complètement premier.

Complètement premier est entendu au sens suivant (cf. FITTING [4]) :

$$ab \in A \implies a \in A \text{ ou } b \in A .$$

Il suffit de montrer que, si A est un idéal bilatère maximal de type g , $C = D - A$ est stable ; le cas du type d s'en déduira par dualité. Or C est une ℓ-classe consistante ; si $a , b \in C$, de $a\, \ell\, b$ on tire $(\exists\ x \in D)$ $a = xb$; puisque C est consistante, $x \in C$ et $(\exists\ y \in D)$ $x = ya$; d'où $a = yab \in C$, et, puisque C est consistante, $ab \in C$. On notera de plus que C est un sous-demi-groupe de D vérifiant l'axiome des quotients à gauche, donc simple à gauche.

THÉORÈME 3c. – Un idéal bilatère maximal de type z diffère de D par un élément, que l'on peut choisir arbitrairement dans $D - D^2$.

En effet son complémentaire est une $\mathcal{F}$-classe de type z , donc réduite à un élément (théorème 2). Soit u cet élément, qui est consistant et de type z ; si $u \in D^2$, $(\exists\ x , y \in D)\ u = xy$, et de $x = y = u$, on tire $u = u^2$, contrairement à l'hypothèse que u est de type z (proposition 11) ; donc $u \in D - D^2$. Réciproquement, si $u \in D - D^2$, u est de type z (proposition 11), et $D - u$ est un idéal bilatère maximal.

DÉFINITION 9. – On appelle idéal bilatère maximal trivial le complémentaire d'un élément de $D - D^2$.

En récapitulant :

THÉORÈME 3. – Un idéal bilatère maximal est soit de type m , et alors il est premier ; soit de type d ou g , et alors il est complètement premier ; soit de type z , et alors il est trivial, et réciproquement.

On notera qu'un idéal bilatère maximal trivial A n'est pas premier : si $u \notin A$, on a $uDu \subseteq D^2 \subseteq A$, et $u \notin A$. Par suite :

COROLLAIRE. – Pour que tout idéal bilatère maximal d'un demi-groupe D soit premier, il faut et il suffit que D soit globalement idempotent.

3. Idéaux d'un côté maximaux.

PROPOSITION 13. – Un idéal à gauche (resp. à droite, médian) est maximal si et seulement si son complémentaire est une $\mathcal{L}$-classe (resp. $\mathcal{R}$- , $\mathcal{M}$-).

Il suffit de remplacer, dans la démonstration de la proposition 12, $\mathcal{F}$ par $\mathcal{L}$ (resp. $\mathcal{R}$, $\mathcal{M}$) et b par g (resp. d , m) dans la notation $(a)_b$ (pour les idéaux médians, en s'appuyant sur la proposition 6).

PROPOSITION 14. – Un idéal bilatère maximal de type m (resp. d , g) est maximal dans la famille des idéaux médians (resp. à droite, à gauche).

Ceci résulte des propositions 12 et 13.

La démonstration du théorème 3 fait intervenir partout la consistance de C , c'est-à-dire le fait que A est idéal bilatère (avec les notations de cette démonstration) ; elle ne peut donc s'étendre aux idéaux d'un côté maximaux.

IV. Cas où D satisfait à des hypothèses supplémentaires.

Vu le rôle joué dans les parties II et III par la notion de type d'un élément, on va traduire les propriétés supplémentaires de D par la vacuité éventuelle des sous-ensembles M, R, L, Z. On notera que, de $LR \subseteq M$ (cf. § II. 3), résulte que, si M est vide, l'un des sous-ensembles R, L est vide.

PROPOSITION 15. - Si D a un élément unité à gauche, $R = Z = \emptyset$, $M \neq \emptyset$.

Si e est cet élément, $(\forall\ x \in D)$ $ex = x$; donc $Z = \emptyset$; et, si $x \in xD$, $x \in exD \subseteq DxD$, donc $R = \emptyset$. Au contraire $M \neq \emptyset$, car $e \in M$ (proposition 11).

PROPOSITION 16. - Si D a un élément unité, $M = D$.

PROPOSITION 17. - Si D est abélien, $L = R = \emptyset$.

En effet, par dualité, $L = R$, donc $L = R = L \cap R = \emptyset$.

PROPOSITION 18. - Si D est simplifiable à gauche, $R = \emptyset$.

Soit $a \in D$ tel que $a = au$; alors classiquement, $au = au^2$, $u = u^2$ et $(\forall\ x \in D)$ $ux = u^2 x$, d'où $x = ux$; donc D a un élément unité à gauche, et $R = \emptyset$ (proposition 15). Si on ne peut trouver $a \in D$ tel que $a = au$, $R = \emptyset$.

PROPOSITION 19. - Dans un semi-groupe, $L = R = \emptyset$.

PROPOSITION 20. - Si D est simple, $M = D$.

En effet, si $a \in D$, $DaD = D$, donc $a \in DaD$.

PROPOSITION 21. - Si D est régulier, $M = D$.

Ceci résulte de la proposition 11.

PROPOSITION 22. - Si D est un semi-groupe abélien sans élément unité, $Z = D$.

Il suffit de montrer que $M = \emptyset$; or si $a \in D$ est tel que $a = xay$, on a $a = xya$ et il en résulte, comme dans la proposition 18, que xy est élément unité.

Dans les mêmes circonstances, la notion d'idéal médian garde davantage son autonomie. Toutefois :

PROPOSITION 23. - Si D a un élément unité, il y a identité entre les idéaux médians et les idéaux bilatères.

Si A est un idéal médian, $DAD \subseteq A$ entraîne, si D a un élément unité, $AD \subseteq A$ et $DA \subseteq A$; la réciproque résulte de la proposition 7.

Si D est abélien, un idéal médian est une partie A de D telle que $D^2 A = DAD \subseteq A$; il n'y a pas en général identité entre les deux notions, mais il en sera ainsi, par exemple, dès que D est globalement idempotent.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BORŮVKA (Otakar). - Décompositions dans les ensembles et théorie des groupoïdes, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et Théorie des nombres, t. 14, 1960/61, n° 22 bis, 35 p.

[2] CLIFFORD (A. H.) and PRESTON (G. B.). - The algebraic theory of semigroups, Tome 1. - Providence, American mathematical Society, 1961 (Mathematical Surveys, 7).

[3] DUBREIL (Paul). - Contribution à la théorie des demi-groupes. - Paris, Gauthier-Villars, 1941 (Mémoires de l'Académie des Sciences de l'Institut de France, 2e série, t. 63, 52 pages).

[4] FITTING (Hans). - Primärkomponentenzerlegung in nichtkommutativen Ringen, Math. Annalen, t. 111, 1935, p. 19-41.

[5] GREEN (J. A.). - On the structure of semigroups, Annals of Math., Series 2, t. 54, 1951, p. 163-172.

[6] McCOY (Neal H.). - Prime ideals general rings, Amer. J. of Math., t. 71, 1949, p. 823-833.