Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Maurice Koskas

Les hypertas

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 16, nº 1 (1962-1963), exp. nº 10, p. 1-42

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1962-1963__16_1_A10_0>

LES HYPERTAS

par Maurice KOSKAS

Introduction.

La notion de tas a été étudiée par P. GRILLET, dont j'ai adopté la terminologie. J'ai retrouvé indépendamment cette notion que j'ai ensuite généralisée en introduisant des applications multivoques, c'est-à-dire la notion d'hypertas.

Les parties les plus importantes de cet exposé, sont d'une part celle consacrée à l'étude de la régularité, d'autre part celle dans laquelle j'introduis la notion d'hypertas inverse. Cette notion domine cet exposé, son emploi judicieux permet, d'une part d'unifier, donc de simplifier la théorie des demi-groupes, d'autre part d'obtenir des résultats nouveaux.

1. Définitions générales, exemples.

Définition. - On appelle tas la donnée d'un ensemble E, et d'un demi-groupe d'applications de E dans E, noté $\mathcal{Q}$.

On appelle hypertas, la donnée d'un ensemble E, et d'un demi-groupe d'applications de E dans $\mathcal{P}(E)$, noté $\mathcal{Q}$. Un hypertas sera noté $(E, \mathcal{Q})$, $(F, \mathcal{R})$, etc.

Un pseudo-tas est un hypertas $(E, \mathcal{Q})$ tel que $\Theta(x)$ ait au plus un seul élément, quel que soit $\Theta \in \mathcal{Q}$, $x \in E$.

Un hypertas $(E, \mathcal{Q})$ est plein si on a :

$$\Theta(x) \neq \emptyset \qquad \forall \ \Theta \in \mathcal{Q}, \ x \in E .$$

Exemples.

a. D étant un demi-groupe, soient $\mathcal{R}$ le demi-groupe des translations à droite de D, $\mathcal{L}$ le demi-groupe des translations à gauche, $\mathcal{M}$ le demi-groupe engendré par $\mathcal{R}$ et $\mathcal{L}$, $\mathcal{N}$ le demi-groupe engendré par les applications

$$x \to (ux, xv) \qquad (u, v \text{ éléments fixes de } D).$$

$(D, \mathcal{R})$, $(D, \mathcal{L})$, $(D, \mathcal{M})$, $(D, \mathcal{N})$ jouent un rôle fondamental dans différents travaux de la théorie des demi-groupes.

On peut également considérer le cas où G est un groupoïde, et généraliser ces exemples.

Il est clair que la notion d'espace homogène est un cas particulier de tas.

c. Soit H un demi-hypergroupe. Soit $\mathcal{R}$ le demi-groupe engendré par les translations $y \to y \star x$ ($x \in H$ fixé). On définit de même $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$. Les hypertas $(H, \mathcal{R})$, $(H, \mathcal{L})$, $(H, \mathcal{M})$, $(H, \mathcal{N})$ jouent un rôle important en théorie des demi-hypergroupes.

d. Soit E un ensemble, dont $\mathcal{R}$ est une équivalence. Soit Θ la fermeture associée à $\mathcal{R}$. (E, Θ) est un hypertas dont l'étude permet celle de $\mathcal{R}$. Cet exemple peut être généralisé au cas où $\mathcal{R}$ est une relation binaire transitive, en particulier $\mathcal{R}$ peut être une relation d'ordre.

e. Soit G un groupoïde, dont Θ est la fermeture associative ; soient $\mathcal{R}$ le demi-groupe engendré par les translations à droite, $\mathcal{L}$ le demi-groupe engendré par les translations à gauche, $\mathcal{M}$ le demi-groupe engendré par $\mathcal{R}$ et $\mathcal{L}$.

Soit $\mathcal{R}_1$ le demi-groupe engendré par $\mathcal{R}$ et Θ. On définit de même $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{M}_1$. Les hypertas $(G, \mathcal{R}_1)$, $(G, \mathcal{L}_1)$, $(G, \mathcal{M}_1)$ permettent d'interpréter certains résultats que nous avons obtenus dans la première partie de notre exposé précédent.

2. Etude catégorique.

A. Définition des morphismes, propriétés générales.

Définitions. - Soient $(E, \mathfrak{O})$ et $(E', \mathfrak{O}')$ deux hypertas. On appelle morphisme (ou homomorphisme) de $(E, \mathfrak{O})$ dans $(E', \mathfrak{O}')$ tout couple (f, φ) où f est une application de E dans E', φ est une application de $\mathfrak{O}$ dans $\mathfrak{O}'$, f et φ vérifient de plus les conditions suivantes :

- φ est un homomorphisme de $\mathfrak{O}$ dans $\mathfrak{O}'$.
- $\forall\ \Theta \in \mathfrak{O}$, $x \in E$, on a

$$f(\Theta x) = \varphi(\Theta)(f(x)) .$$

Remarques. - Si cette dernière condition est remplacée par $\forall\ \Theta \in \mathfrak{O}$, $x \in E$, on a :

$$f(\Theta x) \subseteq \varphi(\Theta)(f(x)) ,$$

le couple (f, φ) est appelé quasi-homomorphisme.

On vérifie d'autre part aisément que si f est un homomorphisme de D dans D' (D et D' sont des demi-groupes), on peut définir canoniquement un homomorphisme de l'hypertas $(D , \mathcal{R})$ (resp. $(D , \mathcal{L})$, $(D , \mathcal{M})$) dans l'hypertas $(D' , \mathcal{R}')$ (resp. $(D' , \mathcal{L}')$, $(D' , \mathcal{M}')$).

On définit facilement les notions d'isomorphisme, homomorphisme injectif, homomorphisme surjectif.

B. Sous-hypertas.

Définition. - Soit $(E , \mathcal{O})$ un hypertas. On dira qu'un hypertas $(E' , \mathcal{O}')$ est un sous-hypertas de $(E , \mathcal{O})$ si on a :

$$E' \subseteq E \; ; \quad \mathcal{O}' \subseteq \mathcal{O} \; ; \quad \Theta \in \mathcal{O}' \implies \Theta E' \subseteq E' .$$

Il est clair que dans ces conditions on peut définir un homomorphisme injectif de $(E , \mathcal{O})$ dans $(E' , \mathcal{O}')$.

Notons que la famille des sous-hypertas d'un hypertas $(E , \mathcal{O})$ est une $\cap$-famille de Moore, la fermeture de Moore pouvant être construite par un processus dénombrable.

C. Produits directs.

On peut définir très aisément le produit direct d'une famille quelconque d'hypertas $(E_\alpha , \mathcal{O}_\alpha)_{\alpha \in I}$. Ce produit vérifie les axiomes des produits directs tels qu'on les établit en théorie de la catégorie.

3. L'hypertas inverse d'un hypertas fixé.

La notion que nous allons définir a un caractère fondamental.

Définition de l'hypertas inverse. - Soit $(E , \mathcal{O})$ un hypertas. Soit $\Theta \in \mathcal{O}$. Nous allons définir une application ${}_\Theta\Gamma$ de E dans $\mathcal{P}(E)$ de la façon suivante : soit $x \in E$

$$y \in {}_\Theta\Gamma(x) \iff x \in \Theta(y) .$$

Nous poserons

$$\mathcal{O}' = \{{}_\Theta\Gamma\}_{\Theta \in \mathcal{O}} .$$

PROPOSITION 57. - $\mathcal{O}'$ est un demi-groupe anti-isomorphe à $\mathcal{O}$. L'application $\Theta \to {}_\Theta\Gamma$ est un anti-isomorphisme involutif.

L'hypertas (E , Ω') est appelé hypertas inverse de (E , Ω). Il est clair que l'hypertas inverse de (E , Ω') est (E , Ω). On considérera souvent, également l'hypertas (E , Ω'') où Ω'' est le demi-groupe engendré par Ω et Ω'. On vérifie aisément que (E , Ω'') coïncide avec son inverse ; (E , Ω'') est appelé hypertas stable associé à (E , Ω). On vérifiera aisément d'autre part que, si on prend pour morphismes, les quasi-homomorphismes définis plus haut, la correspondance $(E , \Omega) \to (E , \Omega')$ a un caractère fonctoriel.

Etant donnés un demi-groupe D, ou un groupoïde G, et les hypertas $(D , \mathcal{R})$, $(D , \mathcal{L})$, $(D , \mathcal{M})$, $(G , \mathcal{R})$, $(G , \mathcal{L})$, $(G , \mathcal{M})$, nous noterons les hypertas inverses $(D , \mathcal{R}')$, $(D , \mathcal{L}')$, etc. Un élément du demi-groupe des translations de D, sera noté τ_x, ${}_x\tau$, $\tau_{u,v}$ $(\tau_x(y) = yx$, ${}_x\tau y = xy$, $\tau_{u,v}(y) = uyv)$. Un élément du demi-groupe "inverse" sera noté i_x, ${}_xi$, i_{uv}. On a :

$$y \in i_x(a) \iff a = \tau_x(y) = yx$$

$$y \in {}_xi(a) \iff a = xy$$

$$y \in i_{u,v}(a) \iff a = uyv .$$

Nous considérerons également les hypertas stables, $(D\mathcal{R}'')$, $(D\mathcal{L}'')$, etc.

4. Les notions de résiduation dans un hypertas.

Soit (E , Ω) un hypertas ; nous noterons (E , Ω') l'hypertas inverse de (E , Ω). Soient A et B des complexes de E, Δ un complexe de Ω. Nous posons :

$$A \underset{\Omega}{{}^{\circ}\!\cdot_{\circ}} B = \{\theta \in \Omega : \theta(B) \between A\}$$

$$A \underset{\Omega}{{}^{\circ}\!\bullet} B = \{\theta \in \Omega : \theta(B) \subseteq A\}$$

$$A \underset{\Omega}{{}_{\bullet}\!\cdot^{\circ}} \Delta = \{x \in E : \theta x \between A , \ \forall \ \theta \in \Delta\}$$

$$A \underset{\Omega}{{}_{\bullet}{}^{\circ}} \Delta = \{x \in E : \theta x \subseteq A , \ \forall \ \theta \in \Delta\} .$$

On établit un certain nombre de propriétés élémentaires de ces résiduels. En voici quelques-unes :

- si $\theta(x) \neq \emptyset$, $\forall \ \theta \in \Omega$, $x \in E$, on a

$$A \underset{\Omega}{{}^{\bullet}{}_{\circ}} B \subseteq A \underset{\Omega}{{}^{\bullet}\!\circ_{\bullet}} B , \quad A \underset{\Omega}{{}^{\bullet}{}_{\bullet}} \Delta \subseteq A \underset{\Omega}{{}^{\bullet}\!\cdot_{\bullet}} \Delta .$$

- $A \underset{\Omega}{{}^{\bullet}{}_{\bullet}} (\bigcup_i B_i) = \bigcap_i (A \underset{\Omega}{{}^{\circ}{}_{\circ}} B_i)$; $A \underset{\Omega}{{}^{\bullet}\!\cdot_{\bullet}} (\bigcup_i B_i) = \bigcup_i (A \underset{\Omega}{{}^{\bullet}\!\cdot_{\bullet}} B_i)$.

- $(\bigcup_i A_i) \overset{\bullet}{\underset{\Omega}{\cdot}} B \supseteq \bigcup_i (A_i \overset{\bullet}{\underset{\Omega}{\cdot}} B)$; $(\bigcup_i A_i) \underset{\Omega}{\overset{\bullet}{\cdot}\cdot} B = \bigcup_i (A_i \underset{\Omega}{\overset{\bullet}{\cdot}\cdot} B)$.
- $(\bigcap_i A_i) \overset{\bullet}{\underset{\Omega}{\cdot}} B = \bigcap_i (A_i \overset{\bullet}{\underset{\Omega}{\cdot}} B)$; $(\bigcap_i A_i) \underset{\Omega}{\overset{\bullet}{\cdot}\cdot} B \subseteq \bigcap_i (A_i \underset{\Omega}{\overset{\bullet}{\cdot}\cdot} B)$.

etc.

Plus importante est la transformation par hypertas inverse de ces résidus.

Notons $\mathfrak{J}$ l'application canonique de $\Omega \to \Omega'$.

PROPOSITION 58. - On a :

$$\mathfrak{J}(A \underset{\Omega}{\overset{\circ}{\cdot}\cdot} B) = B \underset{\Omega'}{\overset{\bullet}{\cdot}\cdot} A \ ; \quad A \underset{\Omega}{\circ\cdot^{\bullet}} \Delta = \bigcap_{\theta' \in \mathfrak{J}(\Delta)} \theta'(A) ,$$

$$\mathfrak{J}(A \underset{\Omega}{\overset{\bullet}{\cdot}} B) = CB \underset{\Omega'}{\overset{\circ}{\cdot}} CA \ ; \quad A \underset{\Omega}{\bullet^{\bullet}} \Delta = E - \Delta'(CA) \qquad \text{avec } \Delta' = \mathfrak{J}(\Delta) .$$

($\Delta'(CA)$ est l'ensemble des $y \in E$ qui sont tels qu'il existe $\theta' \in \Delta'$, $x \in CA$ avec $y \in \theta' x$).

Ce théorème permet de simplifier les démonstrations des différentes formules que l'on peut établir, ainsi de la formule $A \underset{\Omega}{\overset{\bullet}{\cdot}\cdot} (\bigcup_i B_i) = \bigcup_i (A \underset{\Omega}{\overset{\bullet}{\cdot}\cdot} B_i)$, et de la relation $\mathfrak{J}(A \underset{\Omega}{\overset{\bullet}{\cdot}\cdot} B) = B \underset{\Omega'}{\overset{\bullet}{\cdot}\cdot} A$, il découle immédiatement que l'on a

$$(\bigcup_i A_i) \underset{\Omega}{\overset{\bullet}{\cdot}\cdot} B = \bigcup_i (A_i \underset{\Omega}{\overset{\bullet}{\cdot}\cdot} B) \ ;$$

de plus ce théorème fournit une interprétation "multiplicative" de certains résidus.

5. Equivalences dans un hypertas.

Ce paragraphe est fondamental dans l'exposé.

A. Equivalences régulières.

Définition. - Soit (E , Ω) un hypertas. Soit $\mathcal{R}$ une équivalence définie sur E . On dira que $\mathcal{R}$ est régulière si on a

$$x \,\mathcal{R}\, y , \quad \theta \in \Omega \implies \theta(x) \,\overline{\mathcal{R}}\, \theta(y) .$$

Remarque. - Soit O l'équivalence définie sur E de la façon suivante :

$$x \,O\, y \iff (\theta x \neq \emptyset \iff \theta y \neq \emptyset) .$$

Si $\mathcal{R}$ est régulière on a $\mathcal{R} \subseteq O$. Nous noterons $\mathfrak{F}_r$ la famille des équivalences régulières de (E , Ω) .

Exemples.

a. Soit E un ensemble dont ρ est une équivalence ; soit Θ la fermeture associée à ρ, soit $\mathcal{Q} = \{\Theta\}$, et soit l'hypertas $(E, \mathcal{Q})$.

Etant donnée une équivalence $\mathcal{R}$ définie sur E, $\mathcal{R}$ est régulière dans $(E, \mathcal{Q})$ si et seulement si elle permute avec ρ.

b. Soit D un demi-groupe, et soient les tas $(D, \mathcal{R})$, $(D, \mathcal{L})$ et $(D, \mathcal{M})$. Les équivalences régulières de $(D, \mathcal{R})$ sont les équivalences régulières à droite de D. On interprète de même les équivalences régulières de $(D, \mathcal{L})$ et $(D, \mathcal{M})$.

c. Soit H un demi-hypergroupe et soient les hypertas $(H, \mathcal{R})$, $(H, \mathcal{L})$, $(H, \mathcal{M})$. Les équivalences régulières de $(H, \mathcal{R})$ sont les équivalences régulières à droite de H.

d. Soit E un ensemble, soit Δ une famille d'applications de E dans $\mathcal{P}(E)$, soit $\mathcal{Q}$ le demi-groupe engendré par Δ. Soit $\mathcal{R}$ une équivalence sur E vérifiant la condition :

$$x \mathcal{R} y, \quad \Theta \in \Delta \implies \Theta x \overline{\mathcal{R}} \Theta y .$$

Alors $\mathcal{R}$ est une équivalence régulière de $(E, \mathcal{Q})$.

e. Soit $(E, \mathcal{Q})$ un hypertas ; soit ρ une relation symétrique, réflexive, définie sur E, vérifiant :

$$x \rho y, \quad \Theta \in \mathcal{Q} \implies \Theta x \overline{\rho} \Theta y .$$

La fermeture transitive de ρ est alors régulière dans $(E, \mathcal{Q})$.

f. Si (E, Σ) est un tas, les équivalences régulières de (E, Σ) sont les équivalences Σ compatibles au sens de P. GRILLET.

g. Les équivalences régulières d'un hypertas $(E, \mathcal{Q})$ sont les équivalences d'homomorphismes. Plus précisément :

THÉORÈME 59. - Soit $\mathcal{R}$ une équivalence régulière d'un hypertas $(E, \mathcal{Q})$. On peut définir sur $E/\mathcal{R}$ un demi-groupe d'applications en général multivoques, noté $\mathcal{Q}'$, de telle sorte que l'on ait un homomorphisme canonique de $(E, \mathcal{Q})$ sur $(E/\mathcal{R}, \mathcal{Q}')$. $(E/\mathcal{R}, \mathcal{Q}')$ est noté $(E, \mathcal{Q})/\mathcal{R}$.

Réciproquement si (f, φ) est un homomorphisme de $(E, \mathcal{Q})$ sur un hypertas $(E', \mathcal{Q}')$, l'équivalence $\mathcal{R}$ définie par $x \mathcal{R} y \iff f(x) = f(y)$ est régulière et on a

$$(E\mathcal{Q})/\mathcal{R} \approx (E', \mathcal{Q}') .$$

Deuxième théorème d'isomorphisme.

THÉORÈME 60. - Soit (f, φ) un homomorphisme d'un hypertas $(E, \mathfrak{O})$ dans un hypertas $(E', \mathfrak{O}')$. Soit $(E_1, \mathfrak{O}_1)$ un sous-hypertas de $(E, \mathfrak{O})$, dont $(E'_1, \mathfrak{O}'_1)$ est l'image par (f, φ). Soit $(E_2, \mathfrak{O}_2)$ l'image réciproque de $(E'_1, \mathfrak{O}'_1)$ (on a : $(E_1, \mathfrak{O}_1) \subseteq (E_2, \mathfrak{O}_2)$).

Soit ρ l'équivalence d'homomorphisme associée à (f, φ) ; soit ρ_i sa restriction à $(E_i, \mathfrak{O}_i)$ $(i = 1, 2)$. On a

$$(E_1, \mathfrak{O}_1)/\rho_1 \approx (E_2, \mathfrak{O}_2)/\rho_2 \approx (E'_1, \mathfrak{O}'_1) .$$

Si (f, φ) est surjectif, pour que $\Theta \in \mathfrak{O}$ laisse invariant E_2, il faut et il suffit que $\varphi(\Theta)$ laisse invariant E'_1.

Etude de l'ensemble $\mathfrak{F}_r$.

PROPOSITION 61. - Soit $(E, \mathfrak{O})$ un hypertas, soit $\mathfrak{F}_r$ la famille des équivalences régulières de $(E, \mathfrak{O})$.

$\mathfrak{F}_r$ est une $\cup$-famille de Moore, admettant l'égalité pour plus fin élément, et si $(E, \mathfrak{O})$ est plein, l'équivalence universelle pour plus grossier élément. $\mathfrak{F}_r$ est un treillis complet.

Etant donnée une équivalence ρ définie sur E, on peut se proposer de déterminer la plus grosse équivalence régulière contenue dans ρ. Nous avons pu le faire lorsque $\Theta(x)$ est toujours un ensemble fini.

PROPOSITION 62. - Soit ρ une équivalence définie sur E. Si $\Theta(x)$ est un ensemble fini quel que soit $\Theta \in \mathfrak{O}$, $x \in E$, la plus grosse équivalence contenue dans ρ est

$$\sigma = \bigcap_{n=1}^{\infty} \rho_n$$

où on a

$$\rho = \rho_1 \supseteq \rho_2 \supseteq \rho_3 \supseteq \dots \supseteq \rho_n \supseteq \dots$$

$$x \, \rho_{n+1} \, y \iff \Theta x \, \overline{\rho}_n \, \Theta y , \quad \forall \ \Theta \in \mathfrak{O}^*$$

($\mathfrak{O}^*$ est le demi-groupe $\mathfrak{O}$ auquel on adjoint la transformation identique de E).

Remarques. - Le procédé ainsi défini peut être appliqué au cas où ρ est l'équivalence universelle de E, et fournit l'élément le plus grossier du treillis $\mathfrak{F}_r$.

Lorsque $\Theta(x)$ est toujours fini, toute équivalence

$$\sigma = \bigcap_{n=1}^{\infty} \rho_n \quad \text{avec} \quad \rho_1 \supseteq \rho_2 \supseteq \cdots \supseteq \rho_n \supseteq \cdots , \quad \rho_n \in \mathfrak{F}_r , \quad \forall \; n$$

est régulière. Donc $\mathfrak{F}_r$ est $\cap$-inductif.

E étant un ensemble fini dont $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ sont des équivalences, on peut donc par un processus dénombrable déterminer la plus grossière équivalence qui permute avec $\mathcal{R}$ et qui est contenue dans $\mathcal{R}'$.

B. Equivalences fortement régulières.

Définition. - Soit $(E , \mathcal{O})$ un hypertas, et soit $\mathcal{R}$ une équivalence définie sur E . On dit que $\mathcal{R}$ est quasi fortement régulière si :

$$x \,\mathcal{R}\, y , \quad \theta \in \mathcal{O} \implies \theta x \,\overset{=}{\mathcal{R}}\, \theta y .$$

Nous poserons : $\mathfrak{F}'_r$ = famille des équivalences quasi fortement régulières.

Notons que l'on peut avoir si

$$\mathcal{R} \in \mathfrak{F}'_r : \quad x \,\mathcal{R}\, y , \quad \theta x = \emptyset , \quad \theta y \neq \emptyset \qquad \text{pour} \quad \theta \in \mathcal{O} .$$

Nous dirons d'autre part que $\mathcal{R}$ est fortement régulière si on a :

$$x \,\mathcal{R}\, y , \quad \theta \in \mathcal{O} \implies \theta x \,\overset{=}{\mathcal{R}}\, \theta y , \quad \theta x \,\overline{\mathcal{R}}\, \theta y .$$

Nous poserons $\mathfrak{F}''_r$ = famille des équivalences fortement régulières. Il est clair que l'on a $\mathfrak{F}''_r = \mathfrak{F}_r \cap \mathfrak{F}'_r$. Notons que $\mathfrak{F}''_r$ peut parfois être vide, et que lorsque $(E , \mathcal{O})$ est plein, $\mathfrak{F}''_r = \mathfrak{F}'_r$.

Exemples.

a. Soit E un ensemble dont ρ est une équivalence, soit θ la fermeture associée à ρ , soit $\mathcal{O} = \{\rho\}$. Soit $\mathcal{R}$ une équivalence définie sur E . Pour que $\mathcal{R}$ soit fortement régulière dans $(E , \mathcal{O})$, il faut et il suffit que l'on ait $\rho \subseteq \mathcal{R}$. Soit alors A un complexe de E , et soit θ_A l'application définie sur E ainsi

$$\theta_A(x) = x \quad \text{si} \quad x \notin A$$
$$= A \quad \text{si} \quad x \in A .$$

Soit $\mathcal{O} = \{\theta_A\}$. Pour que $\mathcal{R}$ soit fortement régulière dans $(E , \mathcal{O})$ il faut et il suffit que $\mathcal{R}$ laisse indivisible A .

Ce dernier exemple peut être généralisé au cas où l'on a une famille de complexes $(A_i)_{i \in I}$ de E .

Soit $\mathcal{Q}$ le demi-groupe engendré par les Θ_{A_i} . Pour que $\mathcal{R}$ soit fortement régulière dans $(E, \mathcal{Q})$, il faut et il suffit que $\mathcal{R}$ laisse indivisible chaque complexe A_i.

b. Si $(E, \mathcal{Q})$ est un tas, la régularité forte coïncide avec la régularité.

c. Soit H un demi-hypergroupe, et soit $\mathcal{R}$ le demi-groupe engendré par les translations à droite de H $(y \to y \star x)$. Pour qu'une équivalence $\mathcal{R}$ définie sur H soit fortement régulière dans $(H, \mathcal{R})$, il faut et il suffit qu'elle soit fortement régulière à droite dans H.

d. Soient E un ensemble, et Δ une famille d'applications de E dans $\mathcal{P}(E)$. Soit $\mathcal{Q}$ le demi-groupe engendré par Δ, soit $\mathcal{R}$ une équivalence définie sur E. Si $x \mathcal{R} y$, $\Theta \in \Delta \implies \Theta x \overline{\overline{\mathcal{R}}} \Theta y$, $\mathcal{R}$ est quasi fortement régulière dans $(E, \mathcal{Q})$. On a une propriété analogue pour la régularité forte de $\mathcal{R}$.

e. Soit $(E, \mathcal{Q})$ un hypertas dont (f, φ) est un homomorphisme à valeur dans un pseudo-tas $(E', \mathcal{Q}')$. Alors l'équivalence associée à (f, φ) est fortement régulière. Inversement si $(E, \mathcal{Q})$ est un hypertas dont $\mathcal{R}$ est une équivalence fortement régulière, $(E, \mathcal{Q})/\mathcal{R}$ est un pseudo-tas.

f. Cet exemple est important car il montre comment on peut ramener la simplifiabilité d'une équivalence, à la régularité.

<u>Définition</u>. - Soit $(E, \mathcal{Q})$ un hypertas dont $\mathcal{R}$ est une équivalence. On dira que $\mathcal{R}$ est <u>simplifiable</u> si

$$\forall\ x, y \in E,\ \Theta \in \mathcal{Q},\ u \in \Theta x,\ v \in \Theta y :\ u \mathcal{R} v \implies x \mathcal{R} y .$$

Il est clair que lorsque $(E, \mathcal{Q})$ est un tas, cette définition redonne la notion de simplifiabilité introduite par R. GRILLET dans l'étude des tas. De même cette définition permet d'étudier les équivalences simplifiables dans les demi-hypergroupes.

<u>Définition</u>. - Un hypertas $(E, \mathcal{Q})$ est <u>injectif</u> si $\Theta x \between \Theta y \implies x = y$.

On vérifie aisément que les équivalences régulières et simplifiables d'un hypertas, sont celles qui fournissent, par passage au quotient, un hypertas injectif.

THÉORÈME 63. - Soit $(E, \mathcal{Q})$ un hypertas, soient $(E, \mathcal{Q}')$ son inverse, et $(E, \mathcal{Q}'')$ l'hypertas stable associé à $(E, \mathcal{Q})$.

α. Les équivalences simplifiables de $(E, \mathcal{Q})$ sont les équivalences quasi fortement régulières de $(E, \mathcal{Q}')$.

β. Les équivalences quasi fortement régulières et simplifiables de $(E , \mathbb{Q})$ sont les équivalences quasi fortement régulières de $(E , \mathbb{Q}'')$.

COROLLAIRE 63.1. – Soit $(E , \mathbb{Q})$ un tas, dont $(E , \mathbb{Q}')$ est l'hypertas inverse, $(E , \mathbb{Q}'')$ l'hypertas stable associé.

Les équivalences simplifiables de $(E , \mathbb{Q})$ sont les équivalences quasi fortement régulières de $(E , \mathbb{Q}')$, les équivalences simplifiables et régulières de $(E , \mathbb{Q})$ sont les équivalences quasi fortement régulières de $(E , \mathbb{Q}'')$.

Soit E un demi-groupe, ou un groupoïde. Soit $\mathcal{R}$ le demi-groupe engendré par les translations à droite de E . On définit de même $\mathcal{L}$ (translations à gauche), et $\mathcal{M}$ lequel est engendré par $\mathcal{R}$ et $\mathcal{L}$, ce que nous notons $\mathcal{M} = \mathcal{R} \vee \mathcal{L}$. Soient $(E , \mathcal{R}')$ l'hypertas inverse de $(E , \mathcal{R})$, $(E , \mathcal{R}'')$ l'hypertas stable associé à $(E , \mathcal{R})$ $(\mathcal{R}'' = \mathcal{R} \vee \mathcal{R}')$. On définit de même $\mathcal{L}'$, $\mathcal{M}'$, $\mathcal{L}''$, $\mathcal{M}''$. Nous donnons un tableau qui fournit quel est le demi-groupe d'applications que l'on doit faire intervenir lorsque l'on veut ramener une certaine propriété, à une propriété de quasi régularité forte.

Ce tableau n'est pas complet, mais on peut le compléter aisément.

Propriété	Demi-groupe d'applications
Régularité à droite	$\mathcal{R}$
Simplifiabilité à droite	$\mathcal{L}'$
Régularité	$\mathcal{M}$
Simplifiabilité	$\mathcal{M}'$
Régularité à droite et simplifiabilité à droite	$\mathcal{R}'' = \mathcal{R} \vee \mathcal{R}'$
Régularité à gauche et simplifiabilité à droite	$\mathcal{L} \vee \mathcal{R}'$
Régularité et simplifiabilité	$\mathcal{M} \vee \mathcal{M}'$
etc.	

Remarque. – On peut aussi considérer le cas où E est un demi-hypergroupe et étudier les équivalences de E qui sont fortement régulières, ou simplifiables.

g. Soit $(E , \mathbb{Q})$ un hypertas et soit ρ une relation réflexive, symétrique définie sur E , dont $\mathcal{R}$ est la fermeture transitive. Si

$$x \rho y , \quad \Theta \in \mathbb{Q} \implies \Theta x \overset{=}{\rho} \Theta y , \quad \Theta x \overline{\rho} \Theta y ,$$

alors $\mathcal{R}$ est fortement régulière.

Par contre si $x \rho y$, $\Theta \in \Omega \implies \Theta x \,\bar{\bar{\rho}}\, \Theta y$, on ne peut conclure en général que $\mathcal{R}$ soit quasi fortement régulière (car Θx peut parfois être vide).

On peut se demander, si un hypertas (E, Ω) tel que la fermeture transitive de toute relation réflexive, symétrique, quasi fortement régulière, soit quasi fortement régulière, n'est pas plein, moyennant éventuellement certaines conditions supplémentaires.

A cette interrogation sont liées la proposition, et la conjecture suivantes.

PROPOSITION 64. - Soit D un semi-groupe abélien. Pour que D soit un groupe, il faut et il suffit que la fermeture transitive de toute relation réflexive symétrique et simplifiable de D, soit simplifiable.

<u>Démonstration</u>. - Dans un sens la démonstration est triviale. Supposons que D soit un semi-groupe abélien tel que la fermeture transitive de toute relation réflexive, symétrique, simplifiable, soit simplifiable. Supposons de plus que D ne soit pas un groupe.

Soient $u \in D$, $a \in D$ tels que $u \notin aD$. On a $a^2 \neq a$, car $a^2 = a \implies u = au$. Posons $x = a^2$, $y = a^3$. Nous définissons une relation ρ sur D de la façon suivante : ρ est réflexive, et de plus on a :

$$x \rho u, \quad u \rho x, \quad u \rho y, \quad y \rho u .$$

Soit $\bar{D}$ le demi-groupe auquel on adjoint l'unité. Soit ρ' la relation suivante

$$r \rho' t \iff \exists\, \alpha \in \bar{D} : \alpha s \rho \alpha t .$$

Il est clair que ρ' est réflexive, symétrique, simplifiable. Soit $\mathcal{R}$ la fermeture transitive de ρ'. $\mathcal{R}$ est simplifiable. On a $x \rho u$, $u \rho y$, donc $x \mathcal{R} y$, c'est-à-dire $a^2 \mathcal{R} a^3$. Donc on a $a \mathcal{R} a^2$. Ceci entraîne qu'il existe des éléments $c_1 \dots c_n$ tels que :

$$a \rho' c_1 , c_1 \rho' c_2 \dots c_{n-1} \rho' c_n , c_n \rho' a^2 .$$

Il existe alors $\alpha \in \bar{D}$: $\alpha a \rho \alpha c_1$. On a donc, soit $\alpha a = \alpha c_1$, soit $a = c_1$, soit l'une des possibilités suivantes $x = \alpha a$, $u = \alpha c_1$; $u = \alpha a$, $x = \alpha c_1$; $y = \alpha a$, $u = \alpha c_1$; $u = \alpha a$, $y = \alpha c_1$. Compte tenu que $u \notin aD$, ces possibilités sont à exclure, et on a nécessairement $c_1 = a$. En refaisant ce raisonnemet, on en conclut finalement que $a = a^2$, ce qui est absurde.

C. Q. F. D.

<u>Conjecture</u>. - Soit D un semi-groupe tel que la fermeture transitive de toute relation réflexive, symétrique simplifiable à gauche, soit simplifiable à gauche. Alors D est simple à droite.

<u>Ramarque</u>. - La réciproque de cette proposition est évidente.

<u>Famille des équivalences quasi fortement régulières, et fortement régulières</u>. - $(E, \mathfrak{Q})$ étant un hypertas fixé, nous allons étudier $\mathfrak{F}'_r$ et $\mathfrak{F}''_r$.

PROPOSITION 65. - $\mathfrak{F}'_r$ est une $\cap$-famille de Moore, dont le plus grossier élément est l'équivalence universelle. C'est un treillis complet.

La proposition suivante montre comment on obtient le plus fin élément de $\mathfrak{F}'_r$. Bien entendu la construction permet d'obtenir la plus fine équivalence simplifiable, ou régulière d'un demi-groupe D.

PROPOSITION 66. - Le plus fin élément de $\mathfrak{F}'_r$ est $\rho = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\rho_n)$, où ρ_n appartient à la suite $\rho_1 \subseteq \rho_2 \subseteq \rho_3 \subseteq \ldots \rho_n \subseteq \ldots$ définie par récurrence : ρ_1 est l'égalité ;

$$x \, \rho_{2n} \, y \iff x \in \Theta u \, , \quad y \in \Theta v \, , \quad \text{avec} \quad \Theta \in \overline{\mathfrak{Q}}$$

(demi-groupe $\mathfrak{Q}$ auquel on adjoint l'identité), et $u \, \rho_{2n-1} \, v$, ρ_{2n+1} est la fermeture transitive de ρ_{2n}. Si $(E, \mathfrak{Q})$ est plein, ρ est la fermeture transitive de ρ_2.

PROPOSITION 67. - Si $\mathfrak{F}''_r$ n'est pas vide, c'est une $\cap$-famille de Moore, et une $\cup$-famille de Moore.

<u>Rappel</u>. - Nous avons défini sur E une équivalence

$$0 : \; x \, 0 \, y \iff (\Theta x \neq \emptyset \iff \Theta y \neq \emptyset) \, .$$

PROPOSITION 68.

α. Soit $\mathcal{R}$ une équivalence définie sur E. Pour que $\mathcal{R} \in \mathfrak{F}''_r$, il faut et il suffit que $\mathcal{R} \subseteq 0$ et $\mathcal{R} \in \mathfrak{F}'_r$.

β.

$$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R} \, , \quad \mathcal{R} \in \mathfrak{F}''_r \, , \quad \mathcal{S} \in \mathfrak{F}'_r \implies \mathcal{S} \in \mathfrak{F}''_r \, .$$

$$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R} \, , \quad \mathcal{S} \in \mathfrak{F}'_r \, , \quad \mathcal{R} \in \mathfrak{F}_r \implies \mathcal{R} \in \mathfrak{F}''_r \, .$$

γ. Pour que $\mathfrak{F}''_r$ soit non vide, il faut et il suffit que le plus fin élément ρ de $\mathfrak{F}'_r$ appartienne à $\mathfrak{F}''_r$, c'est-à-dire que $\rho \subseteq 0$. Alors $\mathfrak{F}''_r$ et $\mathfrak{F}'_r$ ont même plus fin élément ; $\mathfrak{F}''_r$ a le même plus grossier élément que $\mathfrak{F}_r$.

δ.

$$\mathcal{R} \in \mathcal{F}_r \text{ , } \rho \in \mathcal{F}'_r \Longrightarrow \rho \cap \mathcal{R} \in \mathcal{F}_r \text{ .}$$

Remarque. - On peut à partir de cette dernière proposition, obtenir des résultats concernant les équivalences permutables obtenus par P. DUBREIL et M.-L. DUBREIL-JACOTIN dans leur mémoire intitulé "Théorie algébrique des équivalences".

PROPOSITION 69. - Une condition nécessaire pour que $\mathcal{F}''_r$ soit non vide est que l'on ait

$$x \in \Theta u \text{ , } y \in \Theta u \Longrightarrow x \,\Theta\, y \text{ .}$$

Lorsque $(E , \mathcal{Q})$ est l'hypertas $(D , \mathcal{R}')$ inverse du tas $(D , \mathcal{R})$ (D demi-groupe fixé, $\mathcal{R}$ famille des translations à droite de D), cette condition est de plus suffisante.

Démonstration. - Interprétons l'équivalence Θ lorsque $(E , \mathcal{Q}) = (D , \mathcal{R}')$. On a aisément

$$x \,\Theta\, y \Longleftrightarrow (u/x \Longleftrightarrow u/y \text{ , } \forall \; u \in D)$$

en posant

$$a/b \Longleftrightarrow \exists \; c \in D : \; b = ca \text{ .}$$

Quant à la condition $x \in \Theta u$, $y \in \Theta u \Longrightarrow x \,\Theta\, y$, elle s'écrit :

$$bca = da \Longrightarrow \exists \; b' \in D : \; d = b'c \text{ .}$$

Supposons cette condition réalisée, et démontrons que $\mathcal{F}''_r$ est non vide. Pour cela il faut établir que la plus fine équivalence simplifiable à droite ρ_1 appartient à $\mathcal{F}''_r$, c'est-à-dire vérifie $x \,\rho\, y$, $u/x \Longrightarrow u/y$.

On a $\rho = \bigcup_{n=1}^{\infty} \rho_n$; ρ_1 est l'égalité ; $x \,\rho_{2n}\, y \Longleftrightarrow \exists \; a : \; xa \,\rho_{2n-1}\, ya$, ρ_{2n+1} est la fermeture transitive de ρ_{2n} .

Supposons que l'on ait $x \,\rho_{2n+1}\, y$, $u/x \Longrightarrow u/y$; montrons que cette propriété est vérifiée pour $2n + 2$.

$$x \,\rho_{2n+2}\, y \text{ , } u/x \Longrightarrow \exists \; a , b : \; xa \,\rho_{2n+1}\, ya \text{ , } x = bu \text{ .}$$

On a donc

$$xa = bua \,\rho_{2n+1}\, ya \text{ ; } ua/bua \Longrightarrow ua/ya \text{ .}$$

On a $ya = cua$, et par suite $y \in Du$.

C. Q. F. D.

<u>Remarque</u>. - L'équivalence $u/x \iff u/y$ peut être interprétée grâce à l'équivalence de Green. Plus précisément :

Si pour tout $x \in D$, il existe $a \in D$ tel que $x = ax$, l'équivalence $x \, O \, y \iff (u/x \iff u/y, \; \forall \; u \in D)$ coïncide avec l'équivalence de Green à gauche $\mathcal{L}$.

On peut se proposer d'étudier les demi-groupes D vérifiant la condition : $xa = ya \implies x \, \mathcal{L} \, y$. Je n'ai pas fait cette étude.

Nous allons maintenant généraliser le problème de la recherche des plus fins ou plus grossiers éléments de $\mathcal{F}'_r$ où $\mathcal{F}''_r$.

Plus précisément étant donnés un hypertas $(E, \mathcal{O})$ et une équivalence ρ définie sur E, nous allons construire certains éléments de $\mathcal{F}'_r$ et $\mathcal{F}''_r$ astreints à être plus fins ou plus grossiers que ρ, et à une condition de maximalité ou minimalité.

PROPOSITION 70.

α. Soit ρ une équivalence définie sur E. Le plus fin élément de $\mathcal{F}'_r$ contenant ρ est égal à

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \rho_n, \quad \text{où} \quad \rho = \rho_1 \subseteq \rho_2 \subseteq \rho_3 \cdots \subseteq \rho_n \subseteq \cdots \; x \, \rho_{2n} \, y \iff \exists \; \theta \in \bar{\mathcal{O}}$$

(demi-groupe $\mathcal{O}$ auquel on adjoint la transformation identique de E), $u \in E$, $v \in E$ tels que

$$x \in \theta u, \quad y \in \theta v, \quad u \, \rho_{2n-1} \, v.$$

De plus ρ_{2n+1} est la fermeture transitive de ρ_{2n}.

β. Pour qu'il existe un plus fin élément de $\mathcal{F}''_r$ contenant ρ il faut et il suffit que $\bigcup_n \rho_n \subseteq O$. Alors le plus fin élément cherché est $\bigcup_n \rho_n$.

PROPOSITION 71. - Pour qu'il existe un plus grossier élément de $\mathcal{F}''_r$ contenu dans une équivalence ρ fixée, définie sur E, il faut et il suffit que ρ contienne le plus fin élément de $\mathcal{F}''_r$. Alors le plus grossier élément de $\mathcal{F}''_r$ contenu dans ρ est le plus grossier élément de $\mathcal{F}_r$ contenu dans ρ.

Ces propositions permettent de déterminer en particulier, étant donnés un demi-groupe D, et une équivalence ρ définie sur D, l'équivalence simplifiable, ou régulière engendrée par ρ.

C. Equivalences vérifiant des conditions de régularité et laissant indivisible une famille de complexes ; caractérisation des classes modulo une équivalence vérifiant des conditions de régularité.

Soit $(E , \mathbb{O})$ un hypertas, soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de complexes de E. Nous nous proposons d'étudier les équivalences de E, laissant chaque A_i indivisible, et vérifiant une condition de régularité

$$\forall\ i \in I,\ \text{soit}\ \Theta_{A_i} : E \to \mathcal{P}(E) \quad \text{définie ainsi :}\ \Theta_{A_i}(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \notin A_i \\ A_i & \text{si } x \in A_i \end{cases} .$$

Soit $\widetilde{\mathbb{O}}$ le demi-groupe engendré par $\mathbb{O}$ et par les Θ_{A_i}. On a la proposition suivante :

PROPOSITION 72. - Les équivalences de E quasi fortement régulières dans $(E , \mathbb{O})$ (resp. fortement régulières) qui laissent les complexes A_i indivisibles sont les équivalences quasi fortement régulières (resp. fortement régulières) de l'hypertas $(E , \widetilde{\mathbb{O}})$.

Remarque. - Il est fort possible qu'il existe des équivalences fortement régulières dans $(E , \mathbb{O})$, mais qu'il n'en existe pas dans $(E , \widetilde{\mathbb{O}})$. Une condition nécessaire pour qu'il en existe, est que toutes les parties $\Theta(A_i)$ $(\Theta \in \mathbb{O})$ soient indivisibles modulo l'équivalence 0 : $x\ 0\ y \iff (\Theta x \neq \emptyset \iff \Theta y \neq \emptyset,\ \forall\ \Theta \in \mathbb{O})$. Je ne pense pas que cette condition soit suffisante.

COROLLAIRE 72.1. - L'ensemble des équivalences de E, quasi fortement régulières dans $(E , \mathbb{O})$, laissant indivisibles les complexes A_i, est une $\cap$-famille de Moore, dont on peut déterminer par un processus dénombrable le plus fin élément, dont le plus grossier élément est l'équivalence universelle. C'est un treillis complet noté $\mathcal{F}_{r(\Phi)}$ (Φ désignant la famille des complexes A_i).

COROLLAIRE 72.2. - L'ensemble des équivalences de E, fortement régulières dans $(E , \mathbb{O})$, laissant indivisibles les complexes A_i de la famille Φ, s'il n'est pas vide, est une $\cap$-famille de Moore, et une $\cup$-famille de Moore. C'est un treillis complet noté $\mathcal{F}''_{r(\Phi)}$. $\mathcal{F}''_{r(\Phi)}$ admet pour plus fin élément, le plus fin élément de $\mathcal{F}'_{r(\Phi)}$.

Remarques. - Etant donnés un hypertas $(E , \mathbb{O})$, une famille Φ de complexes A_i de E, et une équivalence ρ définie sur E, on peut construire la plus fine équivalence de E, contenant ρ quasi fortement régulière, laissant indivisibles les complexes de la famille Φ.

Etant donnés un hypertas (E, Ω), et une famille Φ de complexes A_i de E, on peut étudier la famille des équivalences régulières de E, laissant Φ indivisible ; on vérifie aisément que ces équivalences sont régulières dans $(E, \widetilde{\Omega})$, mais que plus généralement les équivalences régulières de $(E, \widetilde{\Omega})$ sont celles qui laissent indivisibles ou saturent les complexes A_i, et qui sont régulières dans (E, Ω).

D'autre part, on peut noter que la famille des équivalences régulières de (E, Ω) laissant indivisibles les complexes (A_i) est une $\cup$-famille de Moore ; lorsque $\theta(x)$ est un ensemble fini quels que soient $\theta \in \Omega$, $x \in E$, cette famille possède des éléments minimaux.

La proposition 72, et ses corollaires s'applique immédiatement à l'étude du problème suivant :

E est un demi-groupe, ou un groupoïde, ou un demi-hypergroupe $(A_i)_{i \in I}$ est une famille de complexes de E. Détermination des équivalences de E laissant les complexes A_i indivisibles, et possédant des propriétés de régularité et de simplifiabilité.

Les problèmes de Marianne TEISSIER.

Soit (E, Ω) un hypertas dont A est un complexe. A quelles conditions existe-t-il une équivalence ρ de E, possédant des propriétés de régularité (le cas où ρ est quasi fortement régulière étant le cas le plus important), telles que A soit une classe modulo ρ ?

a. Cas des équivalences quasi fortement régulières. - Dans le cas où l'hypertas (E, Ω) est plein, on a la proposition suivante :

PROPOSITION 73. - Soit (E, Ω) un hypertas plein. Soit A un complexe de E. Pour que A soit une classe modulo une équivalence ρ, $\rho \in \mathcal{F}'_r$, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient réalisées :

$$\theta \in \Omega, \quad x \in E, \quad \theta x \between A \implies \theta x \subseteq A .$$

$$\theta \in \Omega, \quad \theta(A) \between A \implies \theta A \subseteq A .$$

Démonstration. - Si A est une classe modulo $\rho \in \mathcal{F}'_r$, il est clair que les conditions écrites sont réalisées. Réciproquement supposons ces conditions réalisées et soit $\mathcal{R}_A$ l'équivalence suivante :

$$x \mathcal{R}_A y \iff A \underset{\overline{\Omega}}{\therefore} x = A \underset{\overline{\Omega}}{\therefore} y .$$

($\overline{\mathfrak{O}}$ désigne le demi-groupe $\mathfrak{O}$ auquel on adjoint la transformation identique de E). Il est clair que A est une classe modulo $\mathcal{R}_A$

$x \, \mathcal{R}_A \, y$, $u \in \mathcal{O}x$, $v \in \mathcal{O}y$,

$$\mathcal{O}'u \between A \Longrightarrow \mathcal{O}'\mathcal{O}x \between A \Longrightarrow \mathcal{O}'\mathcal{O}y \between A \Longrightarrow \mathcal{O}'\mathcal{O}y \subseteq A \Longrightarrow \mathcal{O}'v \between A .$$

On a donc $u \, \mathcal{R}_A \, v$.

C. Q. F. D.

Cette proposition s'applique immédiatement aux cas suivants :

- D est un demi-groupe, dont A est un complexe. Détermination des conditions que doit vérifier le complexe A pour qu'il soit une classe modulo une équivalence régulière d'un côté, ou bilatèrement.

- H est un demi-hypergroupe, dont A est un complexe. Détermination des conditions que doit vérifier A pour qu'il soit une classe modulo une équivalence fortement régulière d'un côté ou des deux.

Ceci dit, dans le cas général où $(E , \mathfrak{O})$ n'est pas forcément plein, les conditions de la proposition 73 ne sont que nécessaires (mais pas suffisantes en général). Ainsi lorsque $(E , \mathfrak{O})$ coïncide avec un hypertas de la forme $(D , \mathcal{R}')$, ces conditions se traduisent pour un complexe A de D , ainsi :

$$xu = au , \quad a \in A \Longrightarrow x \in A ; \quad xu \in A , \quad au \in A , \quad a \in E \Longrightarrow x \in A .$$

Il est bien connu que ces conditions ne sont pas suffisantes, en général pour que A soit une classe modulo une équivalence simplifiable à droite.

Notations. - $(E , \mathfrak{O})$ étant un hypertas quelconque, dont A est un complexe, nous posons : ρ = plus fin élément de $\mathfrak{F}'_r$, ρ_A = plus fin élément de $\mathfrak{F}'_r$ laissant A indivisible. (Rappelons que ρ_A peut être obtenu par un processus dénombrable.)

PROPOSITION 74. - Une condition nécessaire pour que A soit une classe modulo une équivalence quasi fortement régulière de $(E , \mathfrak{O})$ est que l'on ait : A saturé modulo ρ ;

$$\mathcal{O}A \between A \Longrightarrow \mathcal{O}A \subseteq A , \; \forall \; \mathcal{O} \in \mathfrak{O} .$$

Cette condition n'est pas suffisante en général. Une condition nécessaire et suffisante pour que A soit une classe modulo une équivalence quasi fortement régulière de $(E , \mathfrak{O})$ est que A soit saturé modulo ρ_A .

Remarques. - Cette proposition s'applique aux cas d'équivalences régulières, simplifiables, définies dans un demi-groupe D , ou un groupoïde G , ou un demi-hypergroupe H (à condition de remplacer dans ce dernier cas la régularité par la régularité forte).

Malheureusement la condition nécessaire et suffisante de la proposition 74 n'est guère maniable.

P. GRILLET a donné une condition nécessaire et suffisante pour que dans un demi-groupe D , un complexe A soit une classe modulo une équivalence régulière et simplifiable.

J'ai moi-même donné une condition qui diffère d'une part de celle donnée par P. GRILLET, d'autre part de celle de la proposition 74 (qui englobe des cas plus généraux).

PROPOSITION 75. - Soit A un complexe de E , classe modulo une équivalence ρ quasi fortement régulière dans $(E , \mathfrak{O})$. L'ensemble des équivalences quasi fortement régulières de $(E , \mathfrak{O})$, dont A est une classe, est stable par intersection ; son plus fin élément est ρ_A .

b. Cas des équivalences fortement régulières. - Le problème se simplifie considérablement ici.

Soit $(E , \mathfrak{O})$ un hypertas ; nous supposons que $\mathfrak{F}''_r$ est non vide. Soit A un complexe de E . Nous désignons par ρ_A le plus fin élément de $\mathfrak{F}'_r$ qui laisse A indivisible.

PROPOSITION 76. - Les trois conditions suivantes sont équivalentes :

- A est une classe modulo une équivalence fortement régulière.
- A est une classe modulo une équivalence quasi fortement régulière ; il existe une équivalence fortement régulière qui sature A .
- ρ_A est fortement régulière, ρ_A sature A .

Lorsque l'une de ces conditions est réalisée, ρ_A est le plus fin élément de $\mathfrak{F}''_r$ qui admet A comme classe.

PROPOSITION 77. - Lorsque A est une classe modulo une équivalence fortement régulière, l'ensemble des équivalences fortement régulières qui admettent A comme classe est stable par les opérations $\cap$ et $\cup$.

Le théorème suivant permet de donner un critère assez maniable pour qu'un complexe A soit une classe modulo une équivalence fortement régulière, et de plus fournit l'élément le plus grossier de $\mathfrak{F}''_r$ qui admet A pour classe.

THÉORÈME 78. — Pour qu'un complexe A soit une classe modulo une équivalence fortement régulière, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient réalisées :

$$\Theta x \between A \Longrightarrow \Theta x \subseteq A \, , \quad \forall \; \Theta \in \mathcal{O} \, , \quad x \in E \, ,$$

$$\Theta A \between A \Longrightarrow \Theta A \subseteq A \, .$$

$$\forall \; a, b \in A \, , \quad \Theta \in \overline{\mathcal{O}} \quad (\overline{\mathcal{O}} = \mathcal{O} \cup 1_E) \, , \quad s \in \Theta a \, , \quad t \in \Theta b \, , \quad \Theta' \in \mathcal{O} \, ,$$

on a

$$\Theta' s = \emptyset \Longleftrightarrow \Theta' t = \emptyset \, .$$

Dans ce cas, soit $\mathcal{R}$ l'équivalence suivante :

$$x \,\mathcal{R}\, y \Longleftrightarrow \begin{cases} \Theta x \subseteq A \Longleftrightarrow \Theta y \subseteq A \quad \forall \; \Theta \in \overline{\mathcal{O}} \\ \Theta \in \overline{\mathcal{O}} \, , \quad s \in \Theta x \, , \quad t \in \Theta y \, , \quad \Theta' \in \mathcal{O} \Longrightarrow : \; \Theta' s = \emptyset \Longleftrightarrow \Theta' t = \emptyset \end{cases}$$

$\mathcal{R} \in \mathfrak{F}''_r$; A est une classe modulo $\mathcal{R}$. De plus $\mathcal{R}$ est le plus grossier élément de $\mathfrak{F}''_r$ dont A est une classe.

<u>Démonstration</u>. — Il est clair que les conditions sont nécessaires pour que A soit une classe modulo une équivalence fortement régulière. Supposons-les réalisées, et considérons l'équivalence $\mathcal{R}$ définie dans l'énoncé du théorème. Montrons que $\mathcal{R} \in \mathfrak{F}''_r$. On a d'abord $\mathcal{R} \subseteq 0$. D'autre part, montrons que $\mathcal{R} \in \mathfrak{F}'_r$. Supposons que l'on ait : $x \,\mathcal{R}\, y$, soient $u \in \Theta x$, $v \in \Theta y$ $(\Theta \in \mathcal{O})$. On a

$$\Theta' u = \emptyset \Longleftrightarrow \Theta' v = \emptyset \, , \quad \forall \; \Theta' \in \mathcal{O} \, .$$

En outre, $\Theta' u \subseteq A$ avec

$$\Theta' u \neq \emptyset \Longrightarrow \Theta' \Theta x \between A \Longrightarrow \Theta' \Theta x \subseteq A \Longrightarrow \Theta' \Theta y \subseteq A \Longrightarrow \Theta' v \subseteq A \, .$$

On a donc dans tous les cas

$$\Theta' u \subseteq A \Longleftrightarrow \Theta' v \subseteq A \, .$$

D'autre part soient $\Theta' \in \overline{\mathcal{O}}$, $s \in \Theta' u$, $t \in \Theta' v$, $\Theta'' \in \mathcal{O}$; supposons $\Theta'' s \neq \emptyset$. On a

$$s \in \Theta' \Theta x \, , \quad t \in \Theta' \Theta y \; ;$$

donc, puisque $x \,\mathcal{R}\, y$, on a : $\Theta'' t \neq \emptyset$. On a donc $\mathcal{R} \in \mathfrak{F}''_r$.

On vérifie aisément d'autre part que A est une classe modulo $\mathcal{R}$.

Enfin, soit $\Sigma \in \mathfrak{F}''_r$, avec A, classe modulo Σ. Montrons que $\Sigma \subseteq \mathcal{R}$.

$$x \Sigma y, \text{ et } \Theta x \subseteq A \implies \Theta y \subseteq A \qquad (\text{car } \Theta x \,\overline{\Sigma}\, \Theta y, \ \Theta x \,\Sigma\, \Theta y).$$

De plus

$$x \Sigma y, \ s \in \Theta x, \ t \in \Theta y \ (\Theta \in \overline{\mathbb{Q}}), \ \Theta' \in \mathbb{Q}, \ \Theta' s \neq \emptyset$$
$$\implies s \Sigma t \implies \Theta' t \neq \emptyset \qquad (\text{puisque } \Sigma \subseteq \mathrm{O}).$$

C. Q. F. D.

COROLLAIRE 78.1. - Soit D un demi-groupe avec unité à droite et dont $\mathcal{R}$ est l'équivalence de Green à droite. Soit A un complexe de D. Pour que A soit une classe modulo une équivalence simplifiable à gauche plus fine que $\mathcal{R}$, il faut et il suffit que l'on ait :

$ua = ub, \ a \in A \implies b \in A$

$ua \in A, \ ub \in A, \ a \in A \implies b \in A$

$\forall \ a, b \in A$ on a :

$$a = xs, \ b = xt, \ x \in D^* \text{ (demi-groupe } D \text{ auquel on adjoint une unité)}$$
$$\implies s \mathcal{R} t.$$

c. Equivalences régulières.

PROPOSITION 79. - Une condition nécessaire pour qu'un complexe A d'un hypertas $(E, \mathbb{Q})$ soit une classe modulo un élément de $\mathfrak{F}_r$ est que l'on ait :

$$\Theta a \between A, \ a \in A \implies \Theta b \between A, \ \forall \ b \in A$$

$$\Theta a \subseteq A, \ a \in A \implies \Theta A \subseteq A.$$

Remarquons que l'on peut appliquer cette proposition au cas où $\mathbb{Q} = \{\Theta\}$, où Θ est la fermeture associée à une équivalence $\mathcal{R}$ définie sur E. On a :

COROLLAIRE 79.1. - Soit E un ensemble, dont $\mathcal{R}$ est une équivalence, et A un complexe. Pour que A soit une classe modulo une équivalence qui permute avec $\mathcal{R}$ il faut et il suffit que chaque fois que A contient une classe modulo $\mathcal{R}$, A soit saturé modulo $\mathcal{R}$.

Démonstration. - Montrons le fait que la condition soit aussi suffisante. Tout d'abord supposons que A soit saturé modulo $\mathcal{R}$. Soit l'équivalence ρ définie par la partition A et CA. Je dis que ρ permute avec $\mathcal{R}$, car

$x \mathcal{R} u$, $u \rho y \implies$ si $u \in A$, $x \in A$, et si $u \in CA$, $x \in CA$.

Supposons maintenant que A ne contienne aucune classe modulo $\mathcal{R}$. Soit ρ l'équivalence admettant A pour classe définie ainsi : A en est une classe, $S(A) - A$ en est une classe ($S(A)$ désigne le saturé de A modulo $\mathcal{R}$), ρ coïncide avec $\mathcal{R}$ sur le complément de $S(A)$.

Montrons que ρ permute avec $\mathcal{R}$.

$x \mathcal{R} u$, $u \rho y$ entraîne qu'il existe x' avec $x \rho x'$, $x' \mathcal{R} y$, comme on le voit en examinant les différentes possibilités

$u \mathcal{R} y \implies x \mathcal{R} y$, etc.

$u \in A$, $y \in A$, $x \in A \implies x \rho y$, etc.

$u \in A$, $y \in A$, $x \notin A \implies \exists\ x' \notin A$, avec $x' \mathcal{R} y$. On a : $x \rho x'$, etc.

$u \in S(A) - A$, $y \in S(A) - A$, $x \in A \implies \exists\ a \in A$: $y \mathcal{R} a$, on a : $x \rho a$, $a \mathcal{R} y$, etc.

$u \in S(A) - A$, $y \in S(A) - A$, $x \in S(A) - A \implies x \rho y$, etc.

C. Q. F. D.

THÉORÈME 80. - Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un complexe A d'un hypertas $(E, \mathbb{O})$ soit une classe modulo un élément de $\mathfrak{F}_r$ est que A soit indivisible modulo le plus grossier élément de $\mathfrak{F}_r$ contenu dans l'équivalence définie par A et CA.

Dand ces conditions, l'ensemble des équivalences régulières ayant A pour classe est stable pour l'opération $\cup$, et a pour plus grossier élément, le plus grossier élément de $\mathfrak{F}_r$ contenu dans l'équivalence définie par A et CA.

Lorsque $\Theta(x)$ est fini quels que soient $\Theta \in \mathbb{O}$, $x \in E$, cette dernière équivalence est égale à $\bigcap\limits_n \mathcal{R}_n$ où $\mathcal{R}_1$ est l'équivalence définie par A et CA,

$$\mathcal{R}_1 \supseteq \mathcal{R}_2 \supseteq \dots \supseteq \mathcal{R}_n \supseteq \dots, \quad x \mathcal{R}_{n+1} y \implies \Theta x \overline{\mathcal{R}_n} \Theta y, \quad \forall\ \Theta \in \overline{\mathbb{O}} .$$

De plus l'ensemble des équivalences régulières de E, admettant A pour classe, possède des éléments minimaux.

La démonstration de ce théorème est évidente ; elle découle en partie de résultats déjà établis lors de l'étude des équivalences régulières d'un hypertas.

6. Complexes particuliers dans un hypertas $(E, \mathbb{O})$.

Dans ce paragraphe, $(E, \mathbb{O})$ désigne un hypertas, dont $(E, \mathbb{O}')$ est l'hypertas inverse.

Après une étude préliminaire d'une notion d'équivalence due à LJAPIN, applicable à plusieurs chapitres de notre étude, nous consacrons ce paragraphe à l'étude sommaire (car au fond déjà entreprise en théorie des demi-hypergroupes) des complexes particuliers d'un hypertas.

A. Equivalence de Ljapin.

Définition. - Soit E un ensemble abstrait, dont L est une famille complexe. On peut définir dans E une équivalence notée $\mathcal{R}_L$ ainsi :

$$x \mathcal{R}_L y \iff (\forall A \in L,\ x \in A \iff y \in A) .$$

On peut remarquer que $\mathcal{R}_L$ n'est pas modifiée si on remplace L par la $\cap$-famille de Moore engendrée par L. Donc on peut supposer que L est une $\cap$-famille de Moore. Nous noterons Θ la fermeture de Moore associée à L.

PROPOSITION 81.

$$x \mathcal{R}_L y \iff \Theta x = \Theta y \ ;$$

si X est une classe modulo $\mathcal{R}_L$, on a

$$X \subseteq \bigcap_{x \in X} \Theta x .$$

PROPOSITION 82. - Les conditions suivantes sont équivalentes :

a. la classe de x modulo $\mathcal{R}_L$ est Θx.

b. $x \in \Theta y \iff y \in \Theta x$.

De plus si $A \in L \implies CA \in L$, L vérifie les conditions (a) et (b), est $\cup$-stable, et on a

$$\Theta(A) = \bigcup_{x \in A} \Theta x ,\ \forall\ A \subseteq E .$$

De plus les éléments de L minimaux sont ceux de la forme $\Theta(x)$.

Définition. - Soient $A \in L$, $B \in L$. On dira que A et B sont des éléments de L voisins lorsque

$$A \subset B ;\ A \subseteq C \subset B,\ C \in L \implies A = C .$$

THÉORÈME 83 (LJAPIN). - Soit L une famille de complexes de E, $\cup$-stable, et $\cap$-stable. Les classes modulo $\mathcal{R}_L$ sont les éléments de L minimaux, et les différences ensemblistes $B - A$, où A et B sont des éléments de L voisins.

L'équivalence $\mathcal{R}_L$ intervient dans de nombreuses questions d'algèbre : Lorsque L est la famille des complexes associatifs d'un groupoïde, $\mathcal{R}_L$ est la plus fine équivalence associative de groupoïde. Lorsque L est la famille des idéaux à droite d'un demi-groupe D, $\mathcal{R}_L$ est l'équivalence de Green à droite, $\mathcal{R}$. (L étant alors $\cup$-stable et $\cap$-stable, le théorème 83 fournit les classes modulo $\mathcal{R}$. Ce dernier exemple peut être généralisé au cas où H est un demi-hypergroupe, et L est la famille des idéaux à droite de H.) Nous verrons dans la suite de cet exposé d'autres applications de cette notion.

B. Idéaux et parties consistantes d'un hypertas $(E, \mathcal{O})$.

Définitions. - Un complexe A de E est un idéal (respectivement un idéal de première espèce de E) si on a

$$\Theta A \subseteq A, \quad \forall \quad \Theta \in \mathcal{O} \qquad \text{(respectivement : } \Theta A \between A, \quad \forall \quad \Theta \in \mathcal{O}\text{)}.$$

Un complexe A de E est consistant (respectivement consistant de première espèce) si on a

$$\Theta x \between A \implies x \in A, \quad \forall \quad \Theta \in \mathcal{O}, \quad x \in E$$

$$\text{(respectivement : } \Theta x \subseteq A \implies x \in A, \quad \forall \quad \Theta \in \mathcal{O}, \quad x \in E\text{)}.$$

On vérifie aisément que pour qu'un complexe A de E, non égal à E, soit un idéal, (resp. un idéal de première espèce), il faut et il suffit que CA soit consistant (resp. consistant de première espèce).

D'autre part, on vérifie aisément que les familles des idéaux de $(E, \mathcal{O})$, et des complexes consistants de $(E, \mathcal{O})$ auxquelles on adjoint la partie vide $\emptyset$ sont $\cap$-stables, et $\cup$-stables.

PROPOSITION 84. - Soit $(E, \mathcal{O}')$ l'hypertas inverse de $(E, \mathcal{O})$. A est un idéal de $(E, \mathcal{O})$ si et seulement si A est consistant dans $(E, \mathcal{O}')$.

Remarques. - L'analogue de l'équivalence de Green est l'équivalence

$$x \mathcal{g} y \iff x \in \Theta y, \quad y \in \Theta x \quad \text{avec} \quad \Theta \in \mathcal{O}.$$

On a une construction unique de la fermeture de Moore pour les idéaux, et les complexes consistants.

C. Complexes nets, complexes générateurs.

Définition. - Soit A un complexe de E. On pose

$$W_A = \{x : A \overset{\circ}{\underset{\mathcal{O}}{\cdot\cdot}} x = \emptyset\}, \qquad W'_A = \{x : A \overset{\bullet}{\cdot\cdot} x = \emptyset\}.$$

On vérifie immédiatement que W_A est un idéal de $(E, \mathcal{O})$, appelé résidu de A.

D'autre part, on pose

$$\mathbb{Q}A = \bigcup_{\mathfrak{S}\in\mathbb{Q}} \mathfrak{S}A , \qquad V_A = \mathbb{Q} - \mathbb{Q}A .$$

V_A est une partie consistante de A.

A est dit net (respectivement net de première espèce) si on a : $W_A = \emptyset$ (respectivement $W'_A = \emptyset$).

A est dit un complexe générateur de $(E , \mathbb{Q})$ si $V_A = \emptyset$, autrement dit si $E = \mathbb{Q}A$ (une telle notion se traduit, si D est un demi-groupe, par des relations de la forme :

$$D = DA , \quad D = AD , \quad D = DAD ,$$

selon que l'on considère les hypertas $(D , \mathfrak{L})$, $(D , \mathfrak{R})$, $(D , \mathfrak{M})$) [7].

PROPOSITION 85. - Pour que A soit net dans $(E , \mathbb{Q})$, il faut et il suffit que A soit un complexe générateur de $(E , \mathbb{Q}')$.

Cette proposition permet donc d'insérer la question de la netteté dans la théorie de l'indépendance.

Il est à noter que la notion de netteté de première espèce peut être appliquée aux demi-groupes, comme le montre la proposition suivante :

PROPOSITION 86. - Soit D un demi-groupe dont A est un complexe. Soit $\mathfrak{N}$ le demi-groupe engendré par les applications multivoques de D de la forme : $x \to (ux , xv)$ (u et v sont deux éléments quelconques de D). Pour que A soit un complexe net de D , il faut et il suffit que A soit net de première espèce dans l'hypertas $(D , \mathfrak{N})$.

Démonstration. - Notons $\varphi_{u,v}$ l'application $x \to (ux , xv)$. Si A est net dans D , il existe $u \in D$, $v \in D$ tels que $ux \in A$, $xv \in A$, donc on a $\varphi_{u,v}(x) \subseteq A$.

Inversement si A est net de première espèce dans $(D , \mathfrak{N})$, il existe des applications φ_{u_1,v_1} , φ_{u_2,v_2} ... φ_{u_n,v_n} telles que :

$$\varphi_{u_1,v_1} \circ \dots \circ \varphi_{u_n,v_n}(x) \subseteq A .$$

On a alors :

$$u_1 \dots u_n x \in A , \quad xv_1 \dots v_n \in A ,$$

---

(7) On peut également introduire cette notion dans un demi-hypergroupe, ou dans un groupoïde.

donc A est net dans D. Ainsi les notions de netteté, et de netteté de première espèce dans un hypertas $(E\,,\,\Omega)$ expliquent la différence, et l'analogie, entre les notions de netteté d'un côté, et de netteté dans un demi-groupe. Bien entendu, on doit s'attendre à ce que la notion de netteté de première espèce soit malaisée à étudier dans un hypertas. Au contraire, comme nous le verrons, la notion de netteté peut facilement être étudiée.

C. Complexes forts complexes présents.

Définitions. – Un complexe A de E est dit fort si on a :

$$A \underset{\Omega}{{}^{\circ}\!\cdot_{\circ}} x \between A \underset{\Omega}{{}^{\bullet}\!\cdot_{\circ}} y \Longrightarrow A \underset{\Omega}{{}^{\circ}\!\cdot_{\bullet}} x = A \underset{\Omega}{{}^{\bullet}\!\cdot_{\bullet}} y \,.$$

Soit A un complexe de E. Nous posons :

$$x\,\rho_A\,y \Longleftrightarrow (x \in \Theta A \Longleftrightarrow y \in \Theta A\,,\ \forall\ \Theta \in \Omega) \Longleftrightarrow x \underset{\Omega}{{}^{\bullet}\!\cdot_{\bullet}} A = y \underset{\Omega}{{}^{\bullet}\!\cdot_{\bullet}} A \,.$$

Un complexe A de E est dit présent si, pour tout $\Theta \in \Omega$, $\Theta(A)$ est indivisible modulo ρ_A, autrement dit si on a :

$$x \underset{\Omega}{{}^{\circ}\!\cdot_{\circ}} A \between y \underset{\Omega}{{}^{\bullet}\!\cdot_{\bullet}} A \Longrightarrow x \underset{\Omega}{{}^{\bullet}\!\cdot_{\bullet}} A = y \underset{\Omega}{{}^{\bullet}\!\cdot_{\bullet}} A \,.$$

PROPOSITION 87. – Soit A un complexe de E, différent de E. Pour que A soit fort dans $(E\,,\,\Omega)$, il faut et il suffit que A soit présent dans $(E\,,\,\Omega')$.

La démonstration de cette proposition utilise le fait que l'on a
$x \underset{\Omega'}{{}^{\circ}\!\cdot_{\circ}} A = A \underset{\Omega}{{}^{\bullet}\!\cdot_{\bullet}} x$.

Complexes présents d'un demi-groupe ou d'un groupe. – Soit D un demi-groupe, dont A est un complexe. A est présent à droite si on a :

$$x \in uA \cap vA\,,\quad y \in uA \Longrightarrow y \in vA \,.$$

On vérifie aisément que si D est un groupe, A est présent à droite si et seulement si $AA^{-1}A \subseteq A$. En particulier les complexes d'un groupe, présents à droite contenant l'unité sont les sous-groupes du groupe (les complexes réduits à un point sont aussi présents à droite).

Définition. – Un complexe A de $(E\,,\,\Omega)$ est dit fort de première espèce si on a

$$A \underset{\Omega}{{}^{\bullet}\!\cdot} x \between A \underset{\Omega}{{}^{\bullet}\!\cdot} y \Longrightarrow A \underset{\Omega}{{}^{\bullet}\!\cdot} x = A \underset{\Omega}{{}^{\bullet}\!\cdot} y \,.$$

A est dit présent de première espèce, si $\forall\ \Theta \in \Omega$, $E - \Theta(A)$ est soit vide, soit indivisible modulo ρ_A.

On vérifie aisément que la famille des complexes forts de première espèce est une $\cap$-famille de Moore. Lorsque $\Theta(x)$ est fini $\forall\ \Theta \in \mathcal{Q}$, $x \in E$, on peut construire la fermeture de Moore associée à cette famille à l'aide d'un processus dénombrable.

PROPOSITION 88. - Pour qu'un complexe A de E , $\neq E$, soit fort de première espèce dans $(E , \mathcal{Q})$, il faut et il suffit que $E - A$ soit présent de première espèce dans $(E , \mathcal{Q}')$.

Complexes présents de première espèce d'un groupe G . - Soit G un groupe, et soit A un complexe. On dit que A est présent de première espèce, à droite, si on a

$$x \notin uA , \quad y \notin uA , \quad x \in vA \implies y \in vA .$$

On montre aisément que les complexes présents de première espèce, à droite, qui ne contiennent pas l'unité de G , sont les complémentaires des sous-groupes (à noter qu'il y a d'autres complexes présents de première espèce à droite, par exemple les ensembles qui sont complémentaires d'un point de G).

COROLLAIRE 88.1. - L'ensemble des complexes présents de première espèce de $(E , \mathcal{Q})$, auquel on ajoute E , est une famille $\cup$-stable.

D. Complexes complets.

Définitions. - Un complexe A de E est complet si on a

$$\Theta x \between A \implies \Theta x \subseteq A$$

(lorsque $(E , \mathcal{Q})$ est plein, ceci équivaut à dire que l'on a $A \underset{\mathcal{Q}}{\dot{\because}} x = A \underset{\mathcal{Q}}{\dot{\cdot}} x$, $\forall\ x \in E$). Un complexe A de E est dit simplifiant si

$$\Theta A \between \Theta(x) \implies x \in A .$$

PROPOSITION 89. - Pour qu'un complexe A de E , $\neq E$, soit complet dans $(E , \mathcal{Q})$ il faut et il suffit qu'il soit simplifiant dans $(E , \mathcal{Q}')$.

On vérifie aisément que la famille des complexes complets de $(E , \mathcal{Q})$, à laquelle on adjoint la partie vide $\emptyset$, est $\cap$-stable, $\cup$-stable, et stable par complémentarité.

Il en est bien entendu, de même de la famille des complexes simplifiants de A .

Remarques. - On déterminera facilement la fermeture de Moore associée à la $\cap$-famille de Moore des complexes complets, donc aussi à la $\cap$-famille de Moore des complexes simplifiants.

Nous avons rencontré la notion de complexes complets lors de l'étude des demi-hypergroupes.

Si $\mathcal{R}$ est une équivalence quasi fortement régulière de $(E , \mathbb{O})$, toute classe modulo $\mathcal{R}$ est un complexe complet. De même, si $\mathcal{R}$ est une équivalence simplifiable de $(E , \mathbb{O})$, toute classe modulo $\mathcal{R}$, est un complexe simplifiant.

Soit A un complexe complet de $(E , \mathbb{O})$. Supposons $(E , \mathbb{O})$ plein. Soit $\Delta \subseteq \mathbb{O}$. On a

$$A \underset{\mathbb{O}}{\overset{\bullet}{\cdot\!\cdot}} \Delta = A \underset{\mathbb{O}}{\overset{\bullet}{\cdot}} \Delta .$$

Si cette partie est non vide, c'est un complexe complet de $(E , \mathbb{O})$.

Une application de la théorie de Ljapin.

PROPOSITION 90. - Soit $(E , \mathbb{O})$ un hypertas, tel que $x \in \theta x$, $\forall\ \theta \in \mathbb{O}$. Soit $\mathcal{C}$ la famille des complexes complets de $(E , \mathbb{O})$. $\mathcal{R}_{\mathcal{C}}$ est la plus fine équivalence fortement régulière de $(E , \mathbb{O})$. De même si $\mathcal{S}$ est la famille des complexes simplifiants de $(E , \mathbb{O})$, $\mathcal{R}_{\mathcal{S}}$ est la plus fine équivalence simplifiable de $(E , \mathbb{O})$.

Ceci dit, nous allons généraliser le procédé utilisé dans la première partie de l'exposé, pour déterminer la plus fine équivalence associative d'un groupoïde.

Soit $(E , \mathbb{O})$ un hypertas plein ; soient $\mathbb{O}_1$ et $\mathbb{O}_2$ deux demi-groupes de $\mathbb{O}$ possédant les propriétés suivantes :

a. $\mathbb{O}$ est engendré par $\mathbb{O}_1 \cup \mathbb{O}_2$.

b. Les éléments de $\mathbb{O}_2$ sont univoques.

c. $\theta \in \mathbb{O}_1$, $x \in E \Longrightarrow x \in \theta x$.

d. $\forall\ \theta_1 \in \mathbb{O}_1$, $\theta_2 \in \mathbb{O}_2$, on a $\theta_2 \circ \theta_1 \subseteq \theta_1 \circ \theta_2$.

Nous poserons

$\mathcal{C}$ = famille des complexes complets de $(E , \mathbb{O}_1)$, et de la partie vide .

LEMME.

$$A \in \mathcal{C} ,\quad \theta \in \mathbb{O}_2 \Longrightarrow A \underset{\mathbb{O}}{\overset{\bullet}{\cdot}} \theta \in \mathcal{C} .$$

En effet soient $x \in E$, $\theta' \in \mathbb{O}_1$ tels que $\theta' x \between A \underset{\mathbb{O}}{\overset{\bullet}{\cdot}} \theta$. Soit $u \in \theta' x \cap A \underset{\mathbb{O}}{\overset{\bullet}{\cdot}} \theta$. On a $\theta u \in A$, donc $\theta\theta' x \between A$, donc $\theta'\theta x \between A$, puisque $\theta\theta' x \subseteq \theta'\theta x$. Posons $y = \theta x$. On a $\theta' y \between A$, donc $\theta' y \subseteq A$. Par suite on a

$$\Theta\Theta' x \subseteq A \,, \qquad \text{donc} \quad \Theta' x \subseteq A \underset{\mathcal{O}}{\stackrel{\bullet}{\cdot}} \Theta \,.$$

THÉORÈME 91. — La plus fine équivalence fortement régulière de $(E, \mathcal{O}_1)$ est égale à $\mathcal{R}_{\mathcal{C}}$. De plus $\mathcal{R}_{\mathcal{C}}$ est fortement régulière dans $(E, \mathcal{O})$.

Démonstration. — Il suffit d'établir que $\mathcal{R}_{\mathcal{C}}$ est fortement régulière dans $(E, \mathcal{O})$. Or $\mathcal{O}$ étant engendré par $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$, il suffit de montrer que :

$$x \mathcal{R}_{\mathcal{C}} y \,, \quad \Theta \in \mathcal{O}_2 \implies \Theta x \mathcal{R}_{\mathcal{C}} \Theta y \,.$$

Or $\Theta(x) \in A$, avec $A \in \mathcal{C} \implies x \in A \underset{\mathcal{O}}{\stackrel{\bullet}{\cdot}} \Theta$. Mais $A \underset{\mathcal{O}}{\stackrel{\bullet}{\cdot}} \Theta \in \mathcal{C}$. Donc on a

$$y \in A \underset{\mathcal{O}}{\stackrel{\bullet}{\cdot}} \Theta \,, \quad \text{soit} \quad \Theta y \in A \,, \quad \text{etc.}$$

Remarques. — Si G est un groupoïde dont Θ est la fermeture associative, et si on pose $\mathcal{O}_2$ = demi-groupe engendré par les translations à gauche et à droite de G, $\mathcal{O}_1 = \{\Theta\}$, $\mathcal{O}$ = demi-groupe engendré par $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$, l'hypertas $(G, \mathcal{O})$ vérifie bien les conditions imposées dans l'étude précédente. Bien entendu la famille $\mathcal{C}$, n'est autre que la famille des complexes associatifs du groupoïde G. La régularité forte dans $(G, \mathcal{O}_1)$ d'une équivalence définie sur G, se traduit par le fait qu'elle est associative. Nous retrouvons ainsi un théorème déjà établi.

On peut imposer que $(E, \mathcal{O})/\mathcal{R}_{\mathcal{C}}$ soit un tas vérifiant certaines propriétés, tout comme on l'a fait pour un groupoïde.

7. Equivalences principales.

A. Théorie générale.

Définition. — A étant un complexe fort d'un hypertas $(E, \mathcal{O})$, on pose

$$x \mathcal{R}_A y \iff A \underset{\mathcal{O}}{\stackrel{\bullet}{\cdot\cdot}} x = A \underset{\mathcal{O}}{\stackrel{\bullet}{\cdot\cdot}} y \,.$$

$\mathcal{R}_A$ s'appelle équivalence principale associée à A.

PROPOSITION 92. — W_A est une classe modulo $\mathcal{R}_A$; $\mathcal{R}_A$ est simplifiable sur $E - W_A$. De plus

$$x \mathcal{R}_A y \,, \quad \Theta \in \mathcal{O} \implies (\Theta x \cap CW_A) \, \overline{\mathcal{R}}_A \, (\Theta y \cap CW_A) \,.$$

En particulier quand $W_A = \emptyset$, $\mathcal{R}_A$ est régulière.

Remarque. — Si $(E, \mathcal{O})$ est plein, et W_A complet, $\mathcal{R}_A$ est régulière.

PROPOSITION 93. - Soit A un complexe fort. Soit X une classe modulo $\mathcal{R}_A$, $\neq W_A$. X est fort, $\mathcal{R}_A \subseteq \mathcal{R}_X$, $W_A \subseteq W_X$, $\mathcal{R}_A$ et $\mathcal{R}_X$ coïncident sur $E - W_X$. Si on a de plus, $A \subseteq X$, alors $W_A = W_X$, $\mathcal{R}_A = \mathcal{R}_X$.

<u>Définition</u>. - Un complexe A, fort, est dit parfait, si on a :

$$x \in A\ ,\quad y \in A \implies A \underset{\mathcal{D}}{\therefore\!\circ}\, x \between A \underset{\mathcal{D}}{\therefore\!\circ}\, y\ .$$

Si A est un complexe parfait, on peut le plonger dans une classe U_A modulo $\mathcal{R}_A$, $\neq W_A$. On peut alors appliquer la proposition 93 à cette situation. Nous ne citerons pas la proposition à laquelle on aboutit.

PROPOSITION 94. - Soit $\mathcal{R}$ une équivalence régulière de $(E\ , \mathcal{D})$, dont A est une classe on a $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}_A$. Si de plus $\mathcal{R}$ est simplifiable, A est fort, et $\mathcal{R}$ coïncide avec $\mathcal{R}_A$ sur $E - W_A$.

<u>Définition</u>. - Soit $(E\ , \mathcal{D})$ un hypertas. On dit que $(E\ , \mathcal{D})$ possède un noyau si E contient des éléments nets. Le noyau de $(E\ , \mathcal{D})$ est l'ensemble de ces éléments nets. On vérifie aisément que c'est un idéal minimum.

<u>Remarque</u>. - Par passage à l'hypertas inverse, la notion de noyau se transforme en une autre notion : nous dirons qu'un hypertas $(E\ , \mathcal{D})$ possède des éléments générateurs si il existe un élément $x \in E$ tel que $E = \mathcal{D}x$.

L'ensemble de ces x est une partie consistante minimum. Nous reviendrons plus loin à ces notions ; disons seulement qu'elles permettent l'étude des éléments zéroïdes d'un demi-groupe D, ainsi que des éléments inversibles au sens de LJAPIN.

PROPOSITION 95.

a. Soit A un complexe net, fort, parfait. $\mathcal{R}_A$ est simplifiable. L'hypertas $(E\ , \mathcal{D})/\mathcal{R}_A$ est injectif, et possède un noyau.

b. Soit $(E'\ , \mathcal{D}')$ un hypertas à noyau, injectif, image homomorphe de l'hypertas $(E\ , \mathcal{D})$. Soit $\mathcal{R}$ l'équivalence associée à l'homomorphisme en question. On a $\mathcal{R} = \mathcal{R}_A$, où A est un complexe fort, net, parfait de E.

<u>Définitions</u>. - Un hypertas $(E\ , \mathcal{D})$ est transitif si chacun de ses éléments est net.

Un complexe A de $(E\ , \mathcal{D})$ est dit fortement net si on a

$$\forall\ x, y \in E,\ \exists\ \Theta,\ \Theta_1 \in \mathcal{Q} \quad \text{tels que } \Theta x \between A,\ \Theta\Theta_1 y \between A\ (^8)\ .$$

Notons qu'un complexe A net, vérifiant la condition

$$\Theta \circ \Theta' x \between A \implies \Theta' \circ \Theta x \between A\ ,$$

est fortement net si $(E, \mathcal{Q})$ est plein.

PROPOSITION 96.

a. Soit A un complexe fort, fortement net d'un hypertas $(E, \mathcal{Q})$. Dans ces conditions, l'hypertas $(E, \mathcal{Q})/\mathcal{R}_A$ est transitif et injectif.

b. Soit $(E', \mathcal{Q}')$ un hypertas, image homomorphe de l'hypertas $(E, \mathcal{Q})$, injectif et transitif. Alors, toute classe A modulo l'équivalence d'homomorphisme $\mathcal{R}$ est fort et fortement net, et on a $\mathcal{R} = \mathcal{R}_A$.

Etudions maintenant la question des tas homomorphes.

PROPOSITION 97. - Soit $(E, \mathcal{Q})$ un hypertas plein. Soit A un complexe complet de E. $\mathcal{R}_A$ est une équivalence fortement régulière de $(E, \mathcal{Q})$.

PROPOSITION 98. - Soit $(E, \mathcal{Q})$ un hypertas plein.

a. Soit A un complexe de E, net, fort, parfait, complet. Alors $(E, \mathcal{Q})/\mathcal{R}_A$ est un tas injectif, avec noyau.

b. Soit $(E', \mathcal{Q}')$ un tas injectif avec noyau, image homomorphe de $(E, \mathcal{Q})$. L'équivalence d'homomorphisme $\mathcal{R}$ est égale à $\mathcal{R}_A$, où A est un complexe fort, net, parfait, complet.

PROPOSITION 99. - Soit $(E, \mathcal{Q})$ un hypertas plein.

a. Soit A un complexe de E, fort, complet, fortement net. Alors $(E, \mathcal{Q})/\mathcal{R}_A$ est un tas injectif et transitif.

b. Soit $(E', \mathcal{Q}')$ un tas injectif et transitif homomorphe à $(E, \mathcal{Q})$. Soit A une classe quelconque modulo l'équivalence d'homomorphisme $\mathcal{R}$. A est fort, complet, fortement net, et on a $\mathcal{R} = \mathcal{R}_A$.

B. Application de la théorie générale.

Nous allons appliquer les résultats établis en (A) au cas où $(E, \mathcal{Q})$ est l'hypertas inverse d'un hypertas $(D, \mathcal{L})$ (D demi-groupe quelconque), c'est-à-dire est égal à $(D, \mathcal{L}')$.

---

(8) Cette notion a été introduite par R. DESQ. P. GRILLET l'a appliquée le premier à l'étude des tas.

Bien entendu, on pourrait également étudier les cas où $(E , \mathcal{Q})$ est égal à $(D , \mathcal{R}')$ ou $(D , \mathcal{M}')$ ou $(H , \mathcal{R}')$ etc. (H demi-hypergroupe).

Les propositions que nous allons énoncer ne sont donc en aucune façon nouvelles: elles sont la traduction des propositions établies en (A), lorsque $(E , \mathcal{Q}) = (D , \mathcal{L}')$.

Définition. - Soit A un complexe d'un demi-groupe D, présent à droite. Nous définissons une équivalence ρ_A sur D, ainsi :

$$x \rho_A y \Longleftrightarrow (\forall \; u \in D , \; x \in uA \Longleftrightarrow y \in uA) .$$

Nous posons

$$V_A = D - DA .$$

PROPOSITION 100. - V_A est une classe modulo ρ_A ;

$$us \rho_A y , \quad s \in DA \Longrightarrow \exists \; t \in D , \; y = ut , \; s \rho_A t .$$

De plus

$$s \rho_A t , \; s \in DA , \; t \in DA \Longrightarrow us \rho_A ut , \; \forall \; u \in D .$$

En particulier, si $V_A = \emptyset$, ρ_A est régulière à gauche.

Cette proposition est une traduction de la proposition 92.

PROPOSITION 101. - Soit A présent à droite dans D, soit X une classe ρ_A, distincte de V_A. X est présent à droite dans D, $\rho_A \subseteq \rho_X$, $DX \subseteq DA$. ρ_A et ρ_X coïncident sur DX. Enfin si $A \subseteq X$, on a

$$\rho_A = \rho_X , \quad DA = DX .$$

Cette proposition est une traduction de la proposition 93.

Définition. - Soit A présent à droite dans D. Nous dirons que A est bien à droite si

$$\forall \; x \in A , \; y \in A , \; \exists \; u \in D , \; x \in uA , \; y \in uA$$

(cette condition est toujours réalisée lorsque D possède une unité à gauche).

Remarque. - Si A est bien à droite, on peut plonger A dans une classe modulo ρ_A qui est aussi bien à droite. On peut appliquer à cette situation la proposition 101.

PROPOSITION 102. - Soit $\mathcal{R}$ une équivalence définie sur D, telle que $us \mathcal{R} y \Longrightarrow \exists \; t \in D$, tel que $y = ut$, $s \mathcal{R} t$. Soit A une classe modulo $\mathcal{R}$. On a $\mathcal{R} \subseteq \rho_A$. Si $\mathcal{R}$ est régulière à gauche, A est présent à droite et on a $\mathcal{R} = \rho_A$ sur DA.

Cette proposition est la traduction de la proposition 94.

PROPOSITION 103.

a. Soit A un complexe de D. Si $Au = uA$, $\forall\ u \in D$, on a

$\rho_A = {}_A\rho$ (où $x\ {}_A\rho\ y \iff (x \in Au \iff y \in Au,\ \forall\ u \in D)$.

Si de plus D est un groupe G, et si $\rho_A = {}_A\rho$, on a $Au = uA$, $\forall\ u \in D$.

b. Soit A un complexe présent de D (c'est-à-dire présent à gauche et à droite). Pour que l'on ait $\rho_A = {}_A\rho$, il faut et il suffit que tout complexe Au soit contenu dans un complexe vA, que tout complexe uA soit contenu dans un complexe Av.

PROPOSITION 104.

a. Soit A un complexe de D possédant les propriétés suivantes :

- $\rho_A = {}_A\rho = \rho$.
- A est présent dans D.
- $D = DA = AD$.
- A est bien à droite.

Alors ρ est une équivalence régulière, et D/ρ possède un élément bilatèrement inversible au sens de LJAPIN (9). De plus l'homomorphisme canonique φ de D sur D/ρ vérifie les conditions suivantes :

$$\varphi us = \varphi x \implies \exists\ t \in D :\ x = ut,\ \varphi s = \varphi t.$$

$$\varphi su = \varphi x \implies \exists\ t' \in D :\ x = t'u,\ \varphi s = \varphi t'.$$

b. Réciproquement, soit φ un homomorphisme de D sur D', vérifiant les deux conditions énoncées plus haut. Supposons que D' possède un élément a' bilatèrement inversible au sens de LJAPIN. Soit $A = \varphi^{-1}(a')$. On a

$$\varphi(x) = \varphi(y) \iff x\ \rho_A\ y \iff x\ {}_A\rho\ y.$$

De plus A est présent, bien à droite, et on a $D = DA = AD$.

Cette proposition traduit la proposition 95.

PROPOSITION 105. - Soit D un demi-groupe possédant un complexe A ayant les propriétés suivantes :

(9) Si D est un demi-groupe, un élément a de D est bilatèrement inversible au sens de LJAPIN si $D = Da = aD$. a est inversible à droite au sens de LJAPIN si on a $D = aD$.

A est présent dans D ,

$$\rho_A = {}_A\rho = \rho \ .$$

$\forall\ x , y \in D , \ \exists\ u , v , u' , v' : \ x \in uA , \ y \in vuA , \ x \in Au' , \ y \in Au'v'$.

Dans ces conditions D est un groupe, A en est un sous-groupe distingué, ρ coïncide avec l'équivalence canoniquement associée à A .

Cette proposition découle de la proposition 96.

8. Caractérisation de certains hypertas, à l'aide de leurs complexes, ou de leurs équivalences.

Rappel des théorèmes de Thierrin. - THIERRIN a démontré dans sa thèse les deux théorèmes suivants :

THÉORÈME. - Soit S un semi-groupe dans lequel les équivalences régulières à droite sont simplifiables à droite. Alors S est un groupe.

THÉORÈME. - Soit S un semi-groupe dans lequel les équivalences simplifiables à droite sont régulières à droite. Alors S est un groupe.

Nous allons généraliser ces théorèmes aux tas, les faire découler d'un théorème plus général, lequel fournira un nouveau critère pour qu'un semi-groupe soit un groupe. D'autre part, la considération de l'hypertas inverse permettra d'interpréter ces résultats.

Notations et conventions. - Soit $(E , \mathcal{O})$ un pseudo-tas (rappelons que cela singifie que $\theta(x)$ a au plus un seul élément $\forall\ \theta \in \mathcal{O} , \ x \in E$). Nous poserons $\mathfrak{F}_s$ = ensemble des équivalences simplifiables. $\mathfrak{F}'_r$ = ensemble des équivalences quasi fortement régulières. Nous noterons $(E , \mathcal{O}')$ l'hypertas inverse de $(E , \mathcal{O})$.

Convention. - Lorsque nous dirons que $\mathcal{O}$ est un groupe, cela signifiera en fait que $\mathcal{O}$ est un groupe d'élément unité 1_E , 1_E étant l'application identique de E .

Définition. - Deux complexes d'un ensemble $\mathcal{E}$ sont dits comparables si l'un est contenu dans l'autre.

THÉORÈME 106. - Soit $(E , \mathcal{O})$ un quasi tas, tel que $\mathcal{O}$ soit un groupe.

Alors $(E , \mathcal{O})$ est un tas, et on a $\forall\ \theta \in \mathcal{O} , \ \theta^{-1} = {}_\theta\Gamma$.

On a $(E , \mathcal{O}) = (E , \mathcal{O}')$.

On a également $\mathfrak{F}'_r = \mathfrak{F}_s$, et il y a identité entre les idéaux et les parties consistantes de (E , Θ) , les complexes nets et les complexes générateurs de (E , Θ) , les complexes forts, et les complexes présents de (E , Θ) .

Nous allons donner différentes réciproques de ce théorème.

THÉORÈME 107. - Soit (E , Θ) un hypertas injectif, plein, vérifiant la condition suivante

$$\theta x \between \theta' x \implies \theta = \theta' , \quad \forall \ \theta \in \Theta , \quad \theta' \in \Theta .$$

Dans ces conditions pour que Θ soit un groupe, il suffit que l'une des conditions suivantes soit réalisée :

- Toute partie consistante de (E , Θ) est un idéal.
- Tout idéal de (E , Θ) est consistant.

Dans ce cas (E , Θ) est un tas.

Démonstration. - On vérifie aisément, compte tenu que le complémentaire d'une partie consistante de (E , Θ) est un idéal, que les deux conditions écrites sont équivalentes. Supposons-les vérifiées. Soit

$$\Lambda = \bigcup_{\substack{\theta \in \Theta \\ x \in E}} \theta(x)$$

Λ est un idéal de (E , Θ) , donc est consistant. Mais

$$x \in E \implies \theta x \subseteq \Lambda \implies x \in \Lambda .$$

On a $E = \Lambda$.

Soit alors $x \in E$, et soit W_x le résidu de x , supposé non vide ; c'est alors un idéal de (E , Θ) , donc une partie consistante. On peut supposer $x \subseteq \theta' y$. Je dis que $x \notin W_x$; en effet $x \in W_x \implies \theta' y \between W_x \implies y \in W_x$, ce qui est contradictoire avec la condition $x \subseteq \theta' y$.

Donc $\exists \ \theta \in \Theta$, vérifiant $\theta x \ni x$. On peut alors écrire $\theta \circ \theta x \supseteq \theta x$, par suite on a $\theta \circ \theta = \theta$ (en vertu des hypothèses faites sur (E , Θ)). Soit $y \in E$. On a : $\theta \circ \theta y = \theta y$. Par suite $\theta y = y$. Donc $\theta = 1_E$.

D'autre part on peut remarquer que l'on a

$$x \in W_y \implies y \in W_x , \qquad \text{car } y \notin W_x \implies \exists \ \theta' \in \Theta : \ \theta' y \ni x$$

ce qui entraîne $\theta' y \between W_y$, soit $y \in W_y$, ce qui est impossible comme nous venons de le voir.

Soit $\Theta_1 \in \mathfrak{Q}$, $u \in \Theta_1 x$. On a : $x \notin W_u$, et par suite $u \notin W_x$. Donc il existe $\Theta_2 \in \mathfrak{Q}$ tel que $\Theta_2 u \ni x$. On a $\Theta_2 \circ \Theta_1 x \ni x$, et il en résulte immédiatement que $\Theta_2 \circ \Theta_1 = 1_E$. On vérifie aisément que $\Theta_1 \circ \Theta_2 = 1_E$. Donc $\mathfrak{Q}$ est un groupe. Il en résulte que $(E , \mathfrak{Q})$ est un tas, car

$$u \in \Theta_1 x , \quad v \in \Theta_1 x \implies \Theta_2 u = \Theta_2 v = x \implies u = v .$$

Θ_1 est univoque.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE 107.1. - Soit $(E , \mathfrak{Q})$ un quasi tas vérifiant les conditions suivantes :

$\Theta x \between \Theta' x \implies \Theta = \Theta'$, $\forall\ \Theta \in \mathfrak{Q}$, $\Theta' \in \mathfrak{Q}'$.

$\forall\ \Theta \in \mathfrak{Q}$, $\Theta(E) = E$.

Toute partie consistante de $(E , \mathfrak{Q})$ est un idéal .

Alors $\mathfrak{Q}$ est un groupe, et $(E , \mathfrak{Q})$ un tas.

<u>Démonstration</u>. - Il n'y a qu'à considérer l'hypertas inverse de $(E , \mathfrak{Q})$, et appliquer le théorème 107.

COROLLAIRE 107.2. - Soit D un semi-groupe. Pour que D soit un groupe, il faut et il suffit que l'une des conditions suivantes soit réalisée :

- Tout idéal à droite de D , $\mathfrak{J}$, est consistant à gauche (c'est-à-dire vérifie $uv \in \mathfrak{J} \implies u \in \mathfrak{J}$).
- Toute partie consistante à gauche de D est un idéal à droite.

COROLLAIRE 107.3. - Soit D un demi-groupe, simple à droite, simplifiable à droite, et tel que tout idéal à gauche soit consistant à droite. D est alors un groupe.

COROLLAIRE 107.4. - Soit D un demi-groupe vérifiant les conditions suivantes :

$u\,x\,v = u'\,x\,v' \implies u\,y\,v = u'\,y\,v'$, $\forall\ y \in D$.

Toute partie A , telle que $DAD \subseteq A$, vérifie $uxv \in A \implies x \in A$.

L'une des deux conditions suivantes $\begin{cases} uxv = uyv \implies x = y . \\ uDv = D \end{cases}$

Alors il existe $a \in D$, $b \in D$ tels que $axb = x$, $\forall\ x \in D$. De plus, $\forall\, u \in D$, $v \in D$, il existe u' , v' tels que

$$uu'xv'v = u'uxvv' = x , \quad \forall\ x \in D .$$

Passons maintenant à des théorèmes généralisant ceux de THIERRIN.

THÉORÈME 108. - Soit $(E , \mathcal{Q})$ un hypertas plein vérifiant les conditions suivantes

$\theta x \between \theta' x \implies \theta = \theta'$

$\theta x \between \theta y \implies x = y$

$\mathfrak{F}_r \subseteq \mathfrak{F}_s$ (toute équivalence fortement régulière est simplifiable).

Alors $\mathcal{Q}$ est un groupe, et $(E , \mathcal{Q})$ est un tas.

<u>Démonstration</u>. - Montrons que tout idéal A de $(E , \mathcal{Q})$ est consistant. Soit A un idéal de $(E , \mathcal{Q})$. Nous définissons une équivalence $\mathcal{R}$ fortement régulière de la façon suivante :

$$x \mathcal{R} y \iff \begin{cases} x , y \in A \\ x \notin A , \ y \notin A ; x = y . \end{cases}$$

Il est clair que $\mathcal{R} \in \mathfrak{F}_r$, donc $\mathcal{R} \in \mathfrak{F}_s$.

Supposons alors que $a \in \theta x \cap A$. Soit $a' \in \theta a$, $a' \in A$. On a $a' \mathcal{R} a$, donc $x \mathcal{R} a$, donc $x \in A$. Donc A est consistant, etc.

THÉORÈME 109. - Soit $(E , \mathcal{Q})$ un hypertas plein vérifiant les conditions suivantes

$$\theta x \between \theta' x \implies \theta = \theta'$$

$$\theta x \between \theta y \implies x = y$$

$$\mathfrak{F}_s \subseteq \mathfrak{F}'_r .$$

Alors $(E , \mathcal{Q})$ est un tas, et $\mathcal{Q}$ est un groupe.

<u>Démonstration</u>. - Nous allons établir que tout complexe consistant de $(E , \mathcal{Q})$ est un idéal. Nous supposerons que $\mathcal{Q} \neq \{1_E\}$, car si $\mathcal{Q} = \{1_E\}$, il n'y a rien à démontrer.

Montrons d'abord que l'on a

$$E = \bigcup_{\substack{\theta \in \mathcal{Q} \\ \theta \neq 1_E \\ x \in E}} \theta(x) .$$

Pour cela nous raisonnons par l'absurde. Soit $u \notin \theta(x)$, $\forall \ \theta \neq 1_E$, $x \in E$. Soit $\theta \neq 1_E$, soit $v \in \theta u$. Nous définissons une équivalence $\mathcal{R}$, qui est l'égalité sur $E - \{u , v\}$ et qui vérifie $u \mathcal{R} v$. On vérifie aisément que $\mathcal{R} \in \mathfrak{F}_s$, donc que $\mathcal{R} \in \mathfrak{F}'_r$. On a donc

$$u \,\mathcal{R}\, v \implies \Theta u \,\overline{\overline{\mathcal{R}}}\, \Theta v \quad .$$

On vérifie aisément que cela est en contradiction avec l'hypothèse $u \notin \Theta x$, $\forall\ \Theta \neq 1_E$. Dès lors, on voit que $\forall\ x \in E$, $\exists\ y \neq x$, tel que $x \in \Theta y$. Il en résulte que tout complexe consistant possède au moins deux éléments distincts.

Soit A un complexe consistant. Nous définissons une équivalence $\mathcal{R}$ de la façon suivante :

$$x \,\mathcal{R}\, y \iff \begin{cases} x, y \in A \\ x \notin A,\quad y \notin A,\quad x = y . \end{cases}$$

On vérifie aisément que $\mathcal{R}$ est simplifiable, donc que $\mathcal{R} \in \mathfrak{F}'_r$. Ceci dit soient $x \in A$, $y \in A$ avec $x \neq y$. On a $x \,\mathcal{R}\, y$. Soit

$$u \in \Theta x, \quad v \in \Theta y \qquad (\Theta \in \mathbb{O}) . \quad .$$

On a $u \,\mathcal{R}\, v$. Mais $u \neq v$, car $u = v \implies x = y$. On a donc $u \in A$, $v \in A$. Par suite $\mathbb{O}A \subseteq A$. A est un idéal.

C. Q. F. D.

On déduit tout de suite de ces théorèmes ceux de THIERRIN. Bien entendu, on a également des applications évidentes de ces théorèmes aux demi-hypergroupes, ainsi qu'au cas où $(E, \mathbb{O}) = (D, \mathfrak{M})$, D demi-groupe, $\mathfrak{M}$ demi-groupe engendré par $\mathcal{R}$ et $\mathcal{L}$.

<u>Remarque</u>. - Il est peut être possible de donner d'autres critères pour qu'un demi-groupe soit un groupe, par exemple en identifiant les complexes nets, et les complexes générateurs, ou bien les complexes forts, et les complexes présents. Au fond, la notion d'hypertas inverse, et le théorème 106 constituent le fond de cette étude.

9. Complexes nets minimaux. Généralisation des théorèmes de LEFEBVRE.

Dans ce paragraphe, nous généralisons aux hypertas les théorèmes de LEFEBVRE concernant les complexes nets minimaux, puis en utilisant la notion d'hypertas inverse, nous donnons des résultats nouveaux applicables aux demi-groupes.

A. Complexes nets minimaux.

THÉORÈME 110.

a. Soit K un complexe net d'un hypertas $(E, \mathbb{O})$. Pour que K soit net minimal il faut et il suffit que l'on ait :

$$k \in K, \quad \Theta \in \mathbb{O}, \quad \Theta(k) \between K \implies \Theta(k) \cap K = \{k\} .$$

b. Soit K un complexe générateur d'un hypertas $(E, \mathbb{O})$. Pour que K soit un complexe générateur minimal, il faut et il suffit que l'on ait :

$$k \in K, \quad \Theta \in \mathbb{O}, \quad k' \in K, \quad k \in \Theta(k') \implies k = k'.$$

COROLLAIRE 110.1. - Soit K net minimal dans $(E, \mathbb{O})$.

$$\forall \; k \in K, \quad \exists \; \Theta \in \mathbb{O} \quad \text{tel que} \quad \Theta(k) \cap K = \{k\}.$$

COROLLAIRE 110.2. - Soit K net minimal dans $(E, \mathbb{O})$.

$$k \in K, \quad \Theta \in \mathbb{O}, \quad \Theta k \neq \emptyset \implies \exists \; \Theta' \in \mathbb{O} : \; \Theta' \Theta k \cap K = \{k\}.$$

COROLLAIRE 110.3. - Soit K net minimal dans $(E, \mathbb{O})$; soient

$$k_1 \in K, \quad k_2 \in K, \quad \Theta_1 \in \mathbb{O}, \quad \Theta_2 \in \mathbb{O}.$$

On a

$$\Theta_1 k_1 \between \Theta_2 k_2 \implies k_1 = k_2.$$

THÉORÈME 111.

a. Deux complexes nets minimaux d'un hypertas $(E, \mathbb{O})$ ont le même cardinal.

b. Deux complexes générateurs minimaux d'un hypertas $(E, \mathbb{O})$ ont le même cardinal.

COROLLAIRE 111.1. - Soit D un demi-groupe. Soient A et B deux complexes vérifiant $D = DA = DB$, minimaux pour cette condition (resp. $D = DAD = DBD$, minimaux pour cette condition). Alors A et B ont le même cardinal.

On a de même une application aux demi-hypergroupes.

<u>Remarques</u>. - La deuxième partie du théorème 111 fait penser aux résultats classiques de la théorie de l'indépendance. Néanmoins des résultats notables existent comme on le voit aisément.

Soient E un ensemble abstrait, et $\mathcal{R}$ une équivalence définie sur E (respectivement soit $\leqslant$ une relation d'ordre définie sur E). Posons

$$\Theta(x) = \{y \in E, \; x \,\mathcal{R}\, y\} \qquad (\text{respectivement } \Theta x = \{y \in E, \; x \leqslant y\}).$$

On a $\Theta^2 = \Theta$. Soit $(E, \mathbb{O})$ l'hypertas associé, $\mathbb{O} = \{\Theta\}$. On peut interpréter de façon triviale les résultats donnés dans tout ce paragraphe.

THÉORÈME 112.

a. Soit $(E, \mathbb{O})$ un hypertas possédant un complexe net minimal. Alors tout complexe net de $(E, \mathbb{O})$ contient un complexe net minimal.

b. Soit (E , Ω) un hypertas possédant un complexe générateur minimal. Alors tout complexe générateur contient un complexe générateur minimal.

Ce théorème fournit des applications intéressantes aux demi-groupes, demi-hypergroupes.

Nous considérons maintenant un hypertas (E , Ω) qui admet des complexes nets minimaux. Nous posons $\mathcal{K} =$ famille des complexes nets minimaux ; $R = \bigcup_{K \in \mathcal{K}} K$.

THÉORÈME 113. - Si $K \in \mathcal{K}$, on a $R = \Omega K$. Si $K \in \mathcal{K}$, $K' \in \mathcal{K}$, on a $\Omega K = \Omega K'$.

Démonstration. - On montrera la propriété d'échange suivante

$$K \in \mathcal{K} , \quad y \in K , \quad \theta \in \Omega , \quad x \in \theta y \implies (K - y) \cup x \in \mathcal{K} .$$

THÉORÈME 114.

a. Soit $K \in \mathcal{K}$, soit $k \in K$, soit $\mathfrak{J}_k$ l'idéal engendré par k. On a

$$\mathfrak{J}_k = \bigcup_{\theta \in \Omega} \theta(k) .$$

$\mathfrak{J}_k$ est un idéal minimal.

b. Si $\mathcal{K}$ est non vide, tout idéal de (E , Ω) contient un idéal minimal.

THÉORÈME 115 (Réciproque). - Soit (E , Ω) un hypertas vérifiant les conditions suivantes :

a. $\forall \ x \in E , \ \exists \ \theta \in \Omega : \ \theta x \neq \emptyset$.

b. Tout idéal de (E , Ω) contient un idéal minimal. Alors (E , Ω) possède des complexes nets minimaux. Le nombre d'idéaux minimaux de (E , Ω) est égal au cardinal de tout complexe net minimal.

THÉORÈME 116. - Soit Σ la réunion des idéaux minimaux de (E , Ω). Si $R = \bigcup_{K \in \mathcal{K}} K$ est non vide, on a $\Sigma = R$.

Nous allons maintenant traduire ces résultats grâce à un passage à l'hypertas inverse.

THÉORÈME 117. - Soit (E , Ω) un hypertas tel que

$$E = \bigcup_{\substack{\theta \in \Omega \\ x \in E}} \theta x .$$

Pour qu'il existe des complexes générateurs minimaux, il faut et il suffit que tout complexe consistant contienne un complexe consistant minimal.

Le nombre de complexes consistants minimaux est alors égal au cardinal de tout complexe générateur minimal. Enfin si on pose :

$\Sigma' =$ réunion des complexes consistants minimaux de $(E, \mathbb{Q})$.

$R' =$ réunion des complexes générateurs minimaux.

On a $\Sigma' = R'$.

Ceci dit, compte tenu que le complémentaire d'un complexe consistant, $\neq E$, est un idéal, on peut transformer l'énoncé du théorème 117.

Définition. - On appelle idéal maximal de $(E, \mathbb{Q})$, tout idéal $\mathfrak{J}$ égal à E quand E ne possède pas d'idéal propre, ou quand E possède des idéaux propres, tout idéal propre maximal.

THÉORÈME 118. - Soit $(E, \mathbb{Q})$ un hypertas tel que

$$E = \bigcup_{\substack{x \in E \\ \Theta \in \mathbb{Q}}} \Theta x .$$

Pour qu'il existe des complexes générateurs minimaux, il faut et il suffit que l'on puisse plonger tout idéal propre de $(E, \mathbb{Q})$ dans un idéal maximal. Alors le nombre d'éléments d'un complexe générateur quelconque est égal au nombre des idéaux maximaux. De plus on a $R' = E - \Sigma''$ où Σ'' désigne l'intersection des idéaux maximaux de $(E, \mathbb{Q})$ lorsque $(E, \mathbb{Q})$ possède des idéaux propres, où la partie vide dans le cas contraire.

THÉORÈME 119. - Soit $(E, \mathbb{Q})$ un hypertas. Pour qu'il existe $u \in E$, tel que $E = \mathbb{Q}u$, il faut et il suffit qu'il existe un seul idéal maximal, et que tout idéal de $(E, \mathbb{Q})$ propre soit contenu dans cet idéal maximal.

THÉORÈME 120. - Soit $D = D^2$. Pour qu'il existe $u \in D$ tel que $D = Du$ (resp. $D = DuD$), il faut et il suffit que D ne possède pas d'idéal à gauche propre, ou bien qu'il existe un idéal à gauche propre maximum (resp. que D ne possède pas de partie A propre vérifiant $DAD \subseteq A$, ou qu'il existe une partie propre vérifiant $DAD \subseteq A$, maximum pour cette propriété). De plus, l'ensemble des u tels que $D = Du$, est égal au complémentaire de l'idéal propre maximum, cu a E entier selon le cas.

Ce théorème permet de caractériser les demi-groupes qui possèdent des éléments inversibles d'un côté au sens de Ljapin. Bien entendu lorsque D possède une unité, ce théorème est trivial.

Remarque. - On a des énoncés analogues quand on considère des hypertas associés à un demi-hypergroupe, ou à une relation d'ordre.

B. Complexes W minimaux. - Nous ne ferons qu'esquisser l'exposé.

PROPOSITION 121. - Soit $(E , \mathbb{O})$ un hypertas, dont W est un idéal. Pour que W soit résidu d'un complexe de E, il faut et il suffit que l'on ait $\mathbb{O}W \underset{\mathbb{O}}{\cdot\!\!\cdot} \mathbb{O} = W$.

Pour que W soit résidu d'un complexe de E, disjoint de W, il faut et il suffit que $W \underset{\mathbb{O}}{\cdot\!\!\cdot} \mathbb{O} = W$. (W est dit fortement large.)

Par passage à l'hypertas inverse, on a la proposition :

PROPOSITION 122. - Soit $(E , \mathbb{O})$ un hypertas dont A est un complexe consistant.

Pour qu'il existe un complexe B de E tel que $E - \mathbb{O}B = A$ il faut et il suffit que l'on ait $E - A = \mathbb{O}W_A$. Pour qu'il existe un complexe B de E tel que $A = E - \mathbb{O}B$, $A \cap B = \emptyset$, il faut et il suffit que l'on ait $E - A = \mathbb{O}(E - A)$.

Soit W un idéal fortement large de $(E , \mathbb{O})$. Nous posons $\mathcal{H}_W = \{$complexes de résidu W, disjoint de W, minimaux pour ces conditions$\}$. Un complexe appartenant à $\mathcal{H}_W$ est dit W-minimal.

Définition. - Soit W un idéal fortement large de $(E , \mathbb{O})$. Soit $E_W = E - W$. Soit $\mathbb{O}_W$ l'ensemble des applications $\overline{\theta}$ de E_W dans $\mathcal{P}(E_W)$ définies ainsi :

$$\theta \in \mathbb{O}, \quad x \in E - W \qquad \overline{\theta}(x) = \theta x \cap (E - W).$$

On montre que $(E_W , \mathbb{O}_W)$ est un hypertas.

THÉORÈME 123. - Soit H un complexe de E ne rencontrant pas W. Pour que $W_H = W$, il faut et il suffit que H soit net dans $(E_W , \mathbb{O}_W)$.

Ce théorème ramène l'étude des complexes W minimaux à l'étude des complexes nets. On peut alors énoncer des théorèmes analogues à ceux de la partie (A). Nous ne le ferons pas.

BIBLIOGRAPHIE

A. Sur les demi-groupes.

[1] CLIFFORD (A. H.) and MILLER (D. D.). - Semigroups having zeroïd elements, Amer. J. of Math., t. 70, 1948, p. 117-125.

[2] CROISOT (Robert). - Equivalences principales bilatères définies dans un demi-groupe, J. Math. pures et appl., 9e série, t. 36, 1957, p. 373-417.

[3] DESQ (Roger). - Etude de quelques relations d'équivalence définies dans un demi-groupe D, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et Théorie des nombres, t. 15, 1961/62, n° 11, 13 p.

[4] DESQ (Roger). - Eléments inversibles dans un demi-groupe D, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et Théorie des nombres, t. 16, 1962/63, n° 4, 16 p.

[5] DUBREIL (Paul). - Contribution à la théorie des demi-groupes. - Paris, Gauthier-Villars, 1941 (Mém. Acad. Sc. Inst. France, 63, p. 1-52).

[6] DUBREIL (Paul). - Quelques problèmes d'algèbre liés à la théorie des demi-groupes, Colloque d'algèbre supérieure [1956. Bruxelles] ; p. 29-44. - Louvain, Ceuterick, 1957 (Centre belge de Recherches mathématiques).

[7] DUBREIL (P.) et DUBREIL-JACOTIN (M.-L.). - Théorie algébrique des relations d'équivalence, J. Math. pures et appl., 9e série, t. 18, 1939, p. 63-95.

[8] GRILLET (Pierre). - Equivalences compatibles, équivalences prépermises, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et théorie des nombres, t. 15, 1961/62, n° 2, 23 p.

[9] LEFEBVRE (Pierre). - Sur certaines conditions minimales en théorie des demi-groupes, Annali di Mat., 4e série, t. 59, 1962, p. 77-163 (Thèse Sc. math. Paris, 1962).

[10] LJAPIN (E. S.). - Polugrupp'. - Moscou, 1960.

[11] MATTENET (Gérard). - Sur les quasi-groupes, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et Théorie des nombres, t. 15, 1961/62, n° 12, 28 p.

[12] TEISSIER (Marianne). - Sur les équivalences régulières dans les demi-groupes, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 232, 1951, p. 1987-1989.

[13] THIERRIN (Gabriel). - Contribution à la théorie des équivalences dans les demi-groupes, Bull. Soc. math. France, t. 83, 1955, p. 103-159 (Thèse Sc. math. Paris. 1954).

B. Sur les hypergroupes.

[1] DRESHER (Melvin) and ORE (Oystein). - Theory of multigroups, Amer. J. of Math., t. 60, 1938, p. 705-733.

[2] KRASNER (Marc). - La loi de Jordan-Hölder dans les hypergroupes et les suites génératrices des corps de nombres p-adiques, Duke math. J., t. 6, 1940, p. 120-140.

[3] KUNTZMANN (J.). - Contribution à l'étude des systèmes multiformes, Ann. Fac. Sc. Univ. Toulouse, t. 3, 1939, p. 155-193 (Thèse Sc. math. Paris. 1942).