Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Michel Ego

Structure des demi-groupes dont le treillis des sous-demi-groupes est semi-modulaire

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 15, n° 2 (1961-1962), exp. n° 19, p. 1-43
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1961-1962__15_2_A8_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
15e année, 1961/62, n° 19

14 mai 1962

STRUCTURE DES DEMI-GROUPES DONT LE TREILLIS DES SOUS-DEMI-GROUPES EST SEMI-MODULAIRE

par Michel EGO

L'ensemble $T(D)$ des sous-demi-groupes d'un demi-groupe D est un treillis pour la relation d'inclusion. Il possède un élément nul, $\emptyset$, $\wedge$ est l'intersection $\cap$ des ensembles, $\vee$ est différent de la réunion $\cup$ des ensembles.

Dans ce mémoire nous établissons quelques conditions nécessaires pour que le treillis $T(D)$ satisfasse, tantôt à l'une, tantôt à l'autre des conditions suivantes :

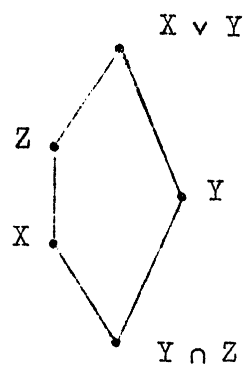
(1) les relations $X \succ X \cap Y$ et $X \cap Y \neq \emptyset$ impliquent : $X \vee Y \succ Y$

(2) la relation $X \succ X \cap Y$ implique : $X \vee Y \succ Y$.

Nous déterminons ensuite des systèmes de conditions nécessaires et suffisants pour que le treillis $T(D)$ soit respectivement semi-modulaire, modulaire et distributif.

Les conditions (1) et (2) sont respectivement équivalentes aux suivantes :

(1') l'existence d'un sous-treillis de $T(D)$, isomorphe au treillis $\mathcal{C}_0$ dont le diagramme est le suivant :



implique soit :

$$Y \not\succ Y \cap Z \quad ;$$

soit :

$$Y \cap Z = \emptyset \quad .$$

(2') l'existence d'un sous-treillis de $T(D)$, isomorphe à $\mathcal{T}_0$, implique :

$$Y \not> Y \cap Z \quad .$$

Rappelons qu'un treillis $\mathcal{T}$ est semi-modulaire affaibli s'il possède un élément nul, 0 , et si les relations

$$0 < y \wedge z < x < z < x \vee y \quad \text{(égalitées exclues)}$$

impliquent l'existence de t tel qu'on ait

$$y \wedge z < t < y \quad \text{et} \quad x = (x \vee t) \wedge z \quad .$$

Dans les treillis à élément nul, les relations existant entre les propriétés ci-dessus, la semi-modularité, la modularité affaiblie, la modularité et la distributivité (1) sont résumées dans le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & & \text{Distributivité} \arrow[d] & \\
 & & \text{Modularité} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
 & \text{Semi-modularité} \arrow[dl] \arrow[dr] & & \text{Modularité affaiblie} \arrow[dl] \\
\text{Condition (2) ou (2')} \arrow[dr] & & \text{Semi-modularité affaiblie} \arrow[dl] & \\
 & \text{Condition (1) ou (1')} & &
\end{tikzcd} \quad .$$

THÉORÈME 1. - <u>Si</u> $T(D)$ <u>satisfait à la condition</u> (1')

1° D <u>est périodique</u> ;

---

(1) Pour les définitions classiques de modularité et de semi-modularité, voir par exemple [2].

2° La période [2] de tout sous-demi-groupe cyclique commence à un rang inférieur ou égal à 5 .

Supposons qu'il existe dans D un élément a d'ordre infini, et considérons les trois éléments de T(D) définis par :

$$X = (a^2) \vee (a^9) \,, \quad Y = (a^3) \quad \text{et} \quad Z = (a^2) \vee (a^5) \quad .$$

Ils sont tels que :

$$Y \cap Z = (a^6) \vee (a^9) \quad \text{et} \quad X \vee Y = (a^2) \vee (a^3) \quad .$$

L'examen du diagramme suivant, représentant les différents sous-demi-groupes ci-dessus

$$\begin{array}{rcl} X \vee Y = & \{ & a^2 \; a^3 \; a^4 \; a^5 \; a^6 \; a^7 \; a^8 \; a^9 \; a^{10} \; a^{11} \; a^{12} \; \ldots \} \\ Z = & \{ & a^2 \quad\; a^4 \; a^5 \; a^6 \; a^7 \; a^8 \; a^9 \; a^{10} \; a^{11} \; a^{12} \; \ldots \} \\ X = & \{ & a^2 \quad\; a^4 \quad\; a^6 \quad\; a^8 \; a^9 \; a^{10} \; a^{11} \; a^{12} \; \ldots \} \\ Z \cap Y = & \{ & \qquad\qquad\; a^6 \qquad\; a^9 \qquad\qquad a^{12} \; \ldots \} \\ Y = & \{ & \quad\; a^3 \qquad\; a^6 \qquad\; a^9 \qquad\qquad a^{12} \; \ldots \} \end{array}$$

montre que

---

[2] Rappelons ici la proposition suivante due à REES :

Tout demi-groupe cyclique fini (a) satisfait à :

1° Il existe deux entiers m et n tels que $a^m = a^n$ $(m < n)$

2° n étant choisi minimum dans la relation précédente, on a

$$(a) = \{a \,, a^2 \,, \ldots \,, a^m \,, \ldots \,, a^{n-1}\}$$

et l'ensemble

$$[a] = \{a^m \,, \ldots \,, a^{n-1}\}$$

est un groupe cyclique appelé période de (a) .

$$(X \vee Y) - Z = \{a^3\}, \quad Z - X \supsetneq \{a^5\}, \quad X - (Z \cap Y) \supsetneq \{a^2\}$$
$$\text{et} \quad Y - (Z \cap Y) = \{a^3\} \quad .$$

Il en résulte

$$Y \cap Z \subset X \subset Z \subset X \vee Y \quad ,$$

ce qui équivaut à l'existence d'un sous-treillis de $T(D)$ isomorphe à $\mathcal{T}_0$; cependant on a

$$Y \succ Y \cap Z \quad \text{et} \quad Y \cap Z \neq \emptyset \quad ;$$

la condition (1') est mise en défaut.

Les éléments de D sont donc tous d'ordre fini : D est périodique.

Supposons maintenant qu'il existe dans D un élément a dont la période commence à un rang supérieur ou égal à 6. Les éléments a, a^2, a^3, a^4 et a^5 sont alors tous distincts entre eux et distincts des éléments a^n pour $n \geqslant 6$; le raisonnement précédent reste valable.

La période de tout sous-demi-groupe cyclique commence donc à un rang inférieur ou égal à 5.

Remarque. - Comme nous le verrons plus loin, un demi-groupe cyclique fini, dont la période commence à un rang inférieur ou égal à 5, a le treillis de ses sous-demi-groupes distributif. Pour un demi-groupe cyclique D, il y a donc équivalence entre les deux propositions :

$T(D)$ satisfait à la condition (1) et $T(D)$ est distributif .

Considérons alors un groupe G ; si $T(G)$ satisfait à la condition (1), G est périodique. Mais si G est périodique, ses sous-demi-groupes non vides sont ses sous-groupes ; appelant $\mathcal{T}(G)$ le treillis des sous-groupes de G, on a $T(G) = \mathcal{T}(G) \cup \{\emptyset\}$: on est ramené à l'étude des groupes périodiques G pour lesquels le treillis $\mathcal{T}(G)$ satisfait soit à la condition (2), soit à la semi-modularité, soit à la modularité, soit à la distributivité [6].

THÉORÈME 2. - Si $T(D)$ satisfait à la condition (2'), pour tout couple e, f d'idempotents de D, le produit ef est égal à e ou à f.

Supposons que e et f soient deux idempotents de D tels que le produit ef soit différent de e et de f.

Nous distinguerons deux cas :

1° e est élément de $(ef) \vee (f)$, et f est élément de $(ef) \vee (e)$.

Les éléments de $(ef) \vee (f)$ étant de l'un des types suivants : f, $(ef)^k$ et $f(ef)^h$, e étant différent de f, on a, soit $e = (ef)^k$, soit $e = f(ef)^h$; si c'est ce dernier cas qui se produit, une multiplication à gauche par e des deux membres de cette égalité montre que $e = (ef)^{h+1}$. L'hypothèse $e \in (ef) \vee (f)$ entraîne donc e puissance de ef. De même l'hypothèse $f \in (ef) \vee (e)$ entraîne f puissance de ef. Le sous-demi-groupe cyclique (ef) contenant un et un seul idempotent, il en résulte $e = f$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

2° Nous sommes donc nécessairement placés dans l'hypothèse $e \notin (ef) \vee (f)$ ou $f \notin (ef) \vee (e)$. Supposons par exemple que e ne soit pas élément de $(ef) \vee (f)$. Considérons alors les trois éléments X, Y et Z de $T(D)$ définis par

$$X = (f) , \quad Y = (e) \quad \text{et} \quad Z = (ef) \vee (f) \quad ;$$

il sont tels que

$$Y \cap Z = \emptyset \quad \text{et} \quad Z \subset X \vee Y \quad .$$

Il en résulte

$$Y \cap Z \subset X \subset Z \subset X \vee Y \quad ,$$

ce qui équivaut à l'existence d'un sous-treillis de $T(D)$ isomorphe à $\mathcal{T}_0$; cependant $Y \succ Y \cap Z$; la condition (2') est mise en défaut.

Remarque 1. - Si D est un demi-groupe idempotent dont la multiplication satisfait à $ef = e$ ou f pour tout couple e et f d'éléments de D, toute partie de D est stable et par suite $T(D) = \mathcal{P}(D)$. Pour un demi-groupe idempotent D il y a donc équivalence entre les deux propositions :

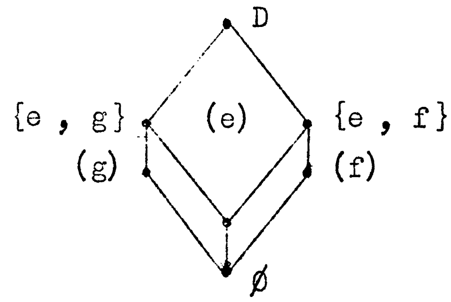
$$T(D) \text{ satisfait à la condition (2) et } T(D) \text{ est distributif} \quad .$$

Remarque 2. – La propriété précédente n'est pas vraie dans l'hypothèse $T(D)$ modulaire affaibli.

Exemple :

D	e	f	g
e	e	e	e
f	e	f	e
g	e	e	g

$T(D)$ a pour diagramme :



$T(D)$ est modulaire affaibli.

Introduisons dans D la relation $\mathcal{R}$ définie par $a \mathcal{R} b$ si et seulement s'il existe deux entiers m et n tels que $a^m = b^n$ [3]. $\mathcal{R}$ est réflexive et symétrique ; $\mathcal{R}$ est aussi transitive car $a^m = b^n$ et $a^{m'} = b^{n'}$ entraînent $a^{mm'} = b^{nm'}$; $\mathcal{R}$ est donc une équivalence. Dans un demi-groupe D périodique, notant e_a l'idempotent unique de (a) , $\mathcal{R}$ peut aussi être définie par $a \equiv b \ (\mathcal{R})$ si et seulement si $e_a = e_b$; en effet $e_{a^m} = e_a$ puisque (a) contient un seul idempotent donc $a \equiv b \ (\mathcal{R})$ entraîne $e_a = e_{a^m} = e_{b^n} = e_b$; d'autre part il existe k et ℓ tels que $e_a = a^k$ et $e_b = b^\ell$, donc $e_a = e_b$ entraîne $a^k = b^\ell$ c'est-à-dire $a \equiv b \ (\mathcal{R})$. Les classes de cette équivalence sont appelées fuseaux. Chaque fuseau contient un idempotent au moins puisque $a \equiv e_a \ (\mathcal{R})$ et un au plus car $e \equiv f \ (\mathcal{R})$ entraîne $e = e_e = e_f = f$. Le fuseau contenant l'idempotent e sera noté F_e . En général les fuseaux ne sont pas stables.

Dans un demi-groupe arbitraire D on peut associer à tout idempotent e un groupe Γ_e d'élément unité e qui est maximum parmi les groupes contenus dans D et d'élément unité e et maximal parmi tous les groupes contenus dans D . Si D est périodique tout élément a de Γ_e a une de ses puissances positives égale à e , donc est congrue à e modulo $\mathcal{R}$; on a donc $\Gamma_e \subsetneq F_e$: on retrouve le résultat d'ailleurs vrai dans tout demi-groupe selon lequel les groupes maximaux de D sont deux à deux disjoints. De plus Γ_e est idéal bilatère minimum de F_e . En effet, d'une part tout idéal de F_e contient e donc Γ_e , d'autre part si a est un élément de F_e , il existe k tel que $a^k = e$; a^k est dans la période $[a]$ de (a) , donc aussi $ea = ae = a^{k+1}$; Γ_e étant maximum parmi les sous-groupes de D d'élément unité e , $[a]$ est contenu dans Γ_e : ea et ae sont éléments de Γ_e . Dès lors, pour tout b élément de Γ_e , $ab = a(eb) = (ae)b$ est élément de Γ_e , et de même $ba = (be)a = b(ea)$ est élément de Γ_e .

Étudions maintenant dans l'hypothèse " $T(D)$ satisfait à la condition (1)" la multiplication de F_e par F_f quand les idempotents e et f sont tels que $\{e, f\}$ est soit un demi-treillis, soit un antisemigroupe. Compte tenu du théorème 2 ces cas sont les seuls si $T(D)$ satisfait à la condition (2).

Dans ce qui suit nous désignerons par $(a)_n$ l'ensemble des puissances de a supérieures ou égales à n ; c'est un sous-demi-groupe de (a) contenant $[a]$.

THÉORÈME 3. - Si e et f sont deux idempotents distincts de D tels que $\{e, f\}$ soit un demi-treillis avec par exemple $ef = fe = e$ (3) et si $T(D)$ satisfait à la condition (1') alors

$$\forall \ a \in F_e \ \text{et} \ \forall \ b \in F_f , \ ab \ \text{et} \ ba \ \text{sont éléments de} \ (a) .$$

La démonstration se fera en deux parties.

Montrons d'abord que $\forall \ a \in F_e$, af et fa sont éléments de (a).

Si a' est un élément quelconque de Γ_e, on a

$$a'f = (a'e)f = a'(ef) = a'e = a'$$

et de même

$$f(ea') = (fe)a' = ea' = a' .$$

Compte tenu de ce que la période de tout sous-demi-groupe cyclique commence à un rang inférieur ou égal à 5, nous avons donc

$$\forall \ a \in F_e \ \text{et} \ \forall \ k \geqslant 5 , \ fa^k \ \text{et} \ a^k f \ \text{sont éléments de} \ (a)_5 .$$

Supposons maintenant que $\forall \ k \geqslant n$, fa^k et $a^k f$ soient éléments de $(a)_n$, et montrons que l'hypothèse " $T(D)$ satisfait à la condition (1')" entraîne que fa^{n-1} et $a^{n-1} f$ sont éléments de $(a)_{n-1}$. La démonstration se fera par l'absurde; supposons donc par exemple : $fa^{n-1} \notin (a)_{n-1}$. La situation est alors telle que :

---

(3) Le cas $ef = fe = f$ n'est pas distinct ; il s'obtient à partir de celui-là par échange des lettres e et f.

1° $(a)_n \cup (f)$ est stable ;

2° $a^{n-1} \notin (a)_n$, car $a^{n-1} \in (a)_n$ entraîne

$$fa^{n-1} \in (a)_n \subseteq (a)_{n-1}$$

et par suite

$$(a)_{n-1} \succ (a)_n \qquad ;$$

3° $a^{n-1} \notin \{(a)_n \cup (f)\} \vee (fa^{n-1})$; en effet tout produit fini d'éléments de $(a)_n \cup (f) \cup (fa^{n-1})$ contenant un facteur de $(a)_n$ est dans $(a)_n$, puisque fa^k et $a^k f$ y sont pour k supérieur ou égal à n ; par suite

$$a^{n-1} \in \{(a)_n \cup (f)\} \vee (fa^{n-1}) \text{ entraîne } a^{n-1} \in (f) \vee (fa^{n-1})$$

donc

$$a^{n-1} = fy$$

pour un certain y de D ; multipliant à gauche par f les deux membres de cette égalité il vient

$$a^{n-1} = fa^{n-1}$$

ce qui est contraire à l'hypothèse. Il en résulte :

$$\{(a)_n \cup (f)\} \vee (fa^{n-1}) \subset (a)_{n-1} \vee (f)$$

et

$$(a)_{n-1} \cap \{\{(a)_n \cup (f)\} \vee (fa^{n-1})\} = (a)_n$$

4° $fa^{n-1} \neq f$; en effet il existe h tel que $(a^{n-1})^h = e$; $fa^{n-1} = f$ entraînerait

$$f = fa^{n-1} = f(a^{n-1})^h = fe = e$$

ce qui est contraire à l'hypothèse " e et f distincts". Il en résulte :

$$(a)_n \cup (f) \subset \{(a)_n \cup (f)\} \vee (fa^{n-1}) \quad .$$

Considérons alors les trois éléments X , Y et Z de T(D) définis par

$$X = (a)_n \cup (f) \;,\quad Y = (a)_{n-1} \quad \text{et} \quad Z = \{(a)_n \cup (f)\} \vee (fa^{n-1}) \quad ;$$

ils sont tels que

$$Y \cap Z = (a)_n \quad \text{et} \quad X \vee Y = (a)_{n-1} \vee (f) \quad .$$

Il en résulte :

$$Y \cap Z \subset X \subset Z \subset X \vee Y \quad ,$$

ce qui équivaut à l'existence d'un sous-treillis de T(D) isomorphe à $\mathcal{T}_0$; cependant on a

$$Y \succ Y \cap Z \quad \text{et} \quad Y \cap Z \neq \emptyset \quad ;$$

la condition (1') est mise en défaut.

fa^{n-1} et $a^{n-1}f$ sont donc éléments de $(a)_{n-1}$; la propriété, étant vraie pour $n = 5$, l'est aussi pour $n = 1$: fa et af sont éléments de (a) .

Considérons maintenant le cas général. Compte tenu de la première partie $\forall\ a \in F_e$, af et fa sont éléments de (a) . Soient b un élément de F_f , B_1 et B_2 deux sous-demi-groupes de (b) tels que $(f) \subseteq B_1 \prec B_2 \subseteq (b)$, supposons que, pour tout y élément de B_1 , ay et ya soient éléments de (a) , et montrons que l'hypothèse " T(D) satisfait à la condition (1')" entraîne que, pour tout x élément de $B_2 - B_1$, ax et xa sont éléments de (a) . La démonstration se fait à nouveau par l'absurde ; supposons donc qu'il existe x élément de $B_2 - B_1$ tel que par exemple : $ax \notin (a)$. La situation est alors telle que :

1° $(a) \cup B_1$ est stable ;

2° $x \notin \{(a) \cup B_1\} \vee (ax)$; en effet si x est élément de $\{(a) \cup B_1\} \vee (ax)$, son écriture comme produit fini d'éléments de $(a) \cup B_1 \cup (ax)$ contient au moins un facteur ax ; le premier facteur x intervenant à partir de la gauche dans cette écriture est précédée de a et éventuellement d'un élément de $(a) \cup B_1$; les hypothèses faites sur B_1 entraînent aB_1 et $B_1 a$ contenus dans (a) : x s'écrit donc sous l'une des formes $x = a^k x$ ou $x = a^k xy$ pour un certain y de D. Cependant il existe h, tel que $(a^k)^h = e$; des égalités précédentes, on déduit par multiplications successives des deux membres à gauche par a^k si $x = a^k x$, et à la fois à gauche par a^k et à droite par y si $x = a^k xy$: $x = ex$ ou $x = exy^h$; multipliant les deux membres de cette dernière égalité à gauche par e, on voit qu'on a toujours $x = ex$. Dès lors il existe $h' > 1$ tel que $x^{h'} = f$, multipliant cette fois à droite les deux membres de l'égalité $x = ex$ par $x^{h'-1}$, il vient $f = ef$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Il en résulte :

$$\{(a) \cup B_1\} \vee (ax) \subset (a) \vee B_2$$

et

$$B_2 \cap \{\{(a) \cup B_1\} \vee (ax)\} = B_1$$

3° $ax \notin (b)$; en effet x étant élément de (b), il existe k tel que $xb^k = f$; par suite $ax \in (b)$ entraîne $axb^k = af \in (b)$ ce qui est contraire aux conclusions de la première partie. Il en résulte :

$$(a) \cup B_1 \subset \{(a) \cup B_1\} \vee (ax) \quad .$$

Considérons alors les trois éléments X, Y et Z de $T(D)$ définis par

$$X = (a) \cup B_1 \,, \quad Y = B_2 \quad \text{et} \quad Z = \{(a) \cup B_1\} \vee (ax) \quad ;$$

ils sont tels que

$$Y \cap Z = B_1 \quad \text{et} \quad X \vee Y = (a) \vee B_2 \quad .$$

Il en résulte

$$Y \cap Z \subset X \subset Z \subset X \vee Y \quad ,$$

ce qui équivaut à l'existence d'un sous-treillis de $T(D)$ isomorphe à $\mathcal{T}_0$; cependant on a

$$Y \succ Y \cap Z \quad \text{et} \quad Y \cap Z \neq \emptyset \quad ;$$

la condition (1') est mise en défaut.

Pour tout élément x de B_2, ax et xa sont donc éléments de (a) ; la propriété étant vraie pour (f), et la hauteur du treillis $T(b)$ étant finie, elle le sera pour (b) ; en particulier on a donc : ab et ba sont éléments de (a).

Dans le cas où D contient un sous-demi-groupe S qui soit un antisemigroupe [5], on sait que les groupes maximaux relatifs aux idempotents de S sont tous isomorphes et que leur réunion est un sous-demi-groupe isomorphe au produit direct de l'un d'entre eux par l'antisemigroupe S. En effet, supposons par exemple que S soit un antisemigroupe à droite (4), et soient e et f deux éléments distincts de S. Les applications

$$a \in \Gamma_e \to fa \in f\Gamma_e$$

et

$$b \in \Gamma_f \to eb \in e\Gamma_f$$

sont des isomorphismes ; il en résulte que $f\Gamma_e$ et $e\Gamma_f$ sont des groupes d'éléments unité respectifs $fe = f$ et $ef = e$; on a donc $f\Gamma_e \subseteq \Gamma_f$ et $e\Gamma_f \subseteq \Gamma_e$, et par suite $f\Gamma_e = \Gamma_f$ et $e\Gamma_f = \Gamma_e$. De plus l'application $x \in \Gamma_g$ avec $g \in S \to \{ex , g\}$ est un isomorphisme de $\bigcup_{g\in S} \Gamma_g$ sur le produit direct $\Gamma_e \times S$. Il en résulte en particulier que si H est un sous-demi-groupe de Γ_e, A un sous-demi-groupe de S, $\bigcup_{g\in A} (gH)$ est un sous-demi-groupe de D isomorphe au produit direct $H \times A$.

THÉORÈME 4. - Si e et f sont deux idempotents distincts de D, tels que $\{e , f\}$ soit un antisemigroupe, avec, par exemple $ef = e$, $fe = f$ (5), et si $T(D)$ satisfait à la condition (1') alors $\forall \; a \in F_e$, $af = ae$.

(4) Si S est un antisemigroupe à gauche, les résultats sont analogues, et se déduisent de ceux ci-dessus par un anti-isomorphisme ; il suffit de permuter tous les produits.

(5) Le cas $ef = f$, $fe = e$ est distinct ; les démonstrations, les résultats et les conditions qui y sont relatifs sont analogues et se déduisent de ceux ci-dessus par permutation de tous les produits.

Si a' est un élément quelconque de Γ_e , on a

$$a'f = (a'e)f = a'(ef) = a'e \quad .$$

Compte tenu de ce que la période de tout sous-demi-groupe commence à un rang inférieur ou égal à 5 , nous avons donc :

$$\forall \ a \in F_e \ \text{ et } \ \forall \ k \geqslant 5 \ , \quad a^k f = a^k e \quad .$$

Supposons maintenant que, $\forall \ k \geqslant n$, $a^k f$ soit égal à $a^k e$, et montrons que l'hypothèse " $T(D)$ satisfait à la condition (1')" entraîne que $a^{n-1} f$ est égal à $a^{n-1} e$. La démonstration se fera par l'absurde ; supposons donc que : $a^{n-1} f \neq a^{n-1} e$. La situation est alors telle que :

1° $a^{n-1} \notin (a)_n$, car $a^{n-1} \in (a)_n$ entraîne

$$a^{n-1} f = a^{n-1} e \quad ,$$

et par suite

$$(a)_{n-1} \succ (a)_n \quad ;$$

2° $a^{n-1} f$ est élément d'un certain fuseau F_g , les trois idempotents e , f et g sont distincts, et $\{e , f , g\}$ est un antisemigroupe à droite.

En effet d'une part $a^{n-1} f \in F_e$ entraîne

$$a^{n-1} f = a^{n-1}(fe) = (a^{n-1} f)e = e(a^{n-1} f) = (ea^{n-1})f = (a^{n-1} e)f = a^{n-1} e$$

ce qui est contraire à l'hypothèse. D'autre part $a^{n-1} f \in F_f$ entraîne

$$a^{n-1} f = a^{n-1}(ff) = (a^{n-1} f)f = f(a^{n-1} f) = fa^{n-1} f \quad ;$$

par suite pour tout entier h , on a

$$(a^{n-1} f)^h = (a^{n-1})^h f \quad ;$$

il existe un entier k' tel qu'on ait à la fois

$$(a^{n-1}\ f)^{k'} = f \quad \text{et} \quad (a^{n-1})^{k'} = e \qquad ;$$

dès lors,

$$a^{n-1}\ f \in F_f \quad \text{entraîne} \quad f = ef$$

ce qui est contraire à l'hypothèse.

Soit alors g l'idempotent de $(a^{n-1}\ f)$; il existe un entier m tel qu'on ait à la fois

$$g = (a^{n-1}\ f)^m \quad \text{et} \quad e = (a^{n-1})^m \qquad ;$$

dès lors

$$g = (a^{n-1}\ f)^m = (a^{n-1}\ f)^m\, e = ge = (a^{n-1}\ f)^m\, f = gf \qquad ;$$

de plus les égalités

$$ea^{n-1} = a^{n-1}\, e \quad \text{et} \quad ef = e$$

montrent que

$$eg = e(a^{n-1}\ f)^m = e(a^{n-1})^m = e \qquad ;$$

enfin on a

$$fg = (fe)g = f(eg) = fe = f$$

$\{e\ ,\ f\ ,\ g\}$ est un antisemigroupe à droite.

Considérons alors le sous-groupe $[a]$ de Γ_e , $f[a]$ et $g[a]$ sont des sous-groupes respectivement de Γ_f et de Γ_g et $[a] \cup f[a] \cup g[a]$ est stable (isomorphe au produit direct $[a] \times \{e\ ,\ f\ ,\ g\}$). De plus les sous-ensembles $(a)_n \cup f[a]$ et $(a)_n \cup g[a]$ sont stables. En effet d'une part

$$(a)_n \circ f[a] = \{(a)_n \bullet f\}\ [a] = \{(a)_n \bullet e\}\ [a] = [a]^2 = [a]$$

et

$$f[a]\cdot(a)_n = f\{[a]e\}\cdot(a)_n = f[a]\{e\cdot(a)_n\} = f[a]^2 = f[a] \quad .$$

D'autre part, $\forall \ k \geqslant n$, on a :

$$a^k g = a^k(a^{n-1} f)^m = a^{n-1}(a^k f)(a^{n-1} f)^{m-1} = a^{n-1}(a^k e)(a^{n-1} f)^{m-1} \quad ;$$

les égalités

$$ea^{n-1} = a^{n-1} e \quad \text{et} \quad ef = e$$

montrent que

$$a^k g = a^k(a^{n-1})^m = a^k e$$

pour les mêmes raisons que $(a)_n \cup f[a]$, $(a)_n \cup g[a]$ est stable. Il en résulte

$$(a)_n \cup f[a] \cup g[a] \quad \text{stable}$$

donc

$$a^{n-1} \notin (a)_n \cup f[a] \cup g[a]$$

et par suite

$$(a)_n \cup f[a] \cup g[a] \subset (a)_{n-1} \vee (f)$$

et

$$(a)_{n-1} \cap \{(a)_n \cup f[a] \cup g[a]\} = (a)_n \quad .$$

Considérons alors les trois éléments X , Y et Z de $T(D)$ définis par

$$X = (a)_n \cup f[a] \ , \quad Y = (a)_{n-1} \quad \text{et} \quad Z = (a)_n \cup f[a] \cup g[a] \quad ;$$

ils sont tels que

$$Y \cap Z = (a)_n \quad \text{et} \quad X \vee Y = (a)_{n-1} \vee (f) \quad .$$

Il en résulte :

$$Y \cap Z \subset X \subset Z \subset X \vee Y \quad ,$$

ce qui équivaut à l'existence d'un sous-treillis de $T(D)$ isomorphe à $\mathcal{C}_0$; cependant on a

$$Y \succ Y \cap Z \quad \text{et} \quad Y \cap Z \neq \emptyset \quad ;$$

la condition (1') est mise en défaut.

$a^{n-1}f = a^{n-1}e$; la propriété étant vraie pour $n = 5$ l'est aussi pour $n = 1$: $af = ae$.

De même pour tout b élément de F_f le produit be est égal à bf. Il en résulte que le sous-demi-groupe $\Gamma_e \cup \Gamma_f$ est idéal du complexe $F_e \cup F_f$; en effet Γ_e est idéal de F_e, Γ_f est idéal de F_f ; de plus $\forall \ a' \in \Gamma_e$ et $\forall \ b \in F_f$, on a

$$a'b = (a'e) = a'(ef)b = a'\{e(fb)\} \in \Gamma_e.(e\Gamma_f) = \Gamma_e^2 = \Gamma_e$$

et

$$ba' = b(ea') = (be)a' = (bf)a' = bf(fa') \in \Gamma_f.f\Gamma_e = \Gamma_f^2 = \Gamma_f \quad .$$

THÉORÈME 5. - <u>Si</u> e <u>et</u> f <u>sont deux idempotents distincts ou non de</u> D <u>tels que</u> $\{e , f\}$ <u>soit un antisemigroupe et si</u> $T(D)$ <u>satisfait à la condition (1'), alors</u> $\forall \ a \in F_e$ <u>et</u> $\forall \ b \in F_f$, ab <u>est élément de</u> $(a) \cup (b) \cup \{[a] \vee [b]\}$.

Nous supposerons au cours de la démonstration que $ef = e$ et $fe = f$ [5].

Dans ce qui suit nous appellerons G le sous-demi-groupe de $\Gamma_e \cup \Gamma_f$ égal à $[a] \vee [b]$. G est idéal du complexe $G \cup (a) \cup (b)$; en effet G est contenu dans $\Gamma_e \cup \Gamma_f$ idéal de $F_e \cup F_f$, et les produits

$$af = ae \ , \ ae \ , \ fa = f(ea) \ , \ ea \ , \ bf \ , \ be = bf \ , \ fb \ , \ eb = e(fb)$$

sont tous éléments de $[a] \vee [b]$.

La démonstration se fera en quatre étapes et par l'absurde ; supposons donc que

$$ab \notin (a) \cup (b) \cup G \quad .$$

Cette hypothèse implique :

1° $a \notin \Gamma_e$, car $a \in \Gamma_e$ entraîne $a \in [a]$, donc $ab \in [a] \vee [b]$, de même $b \notin \Gamma_f$; on a donc $a \notin \Gamma_e \cup \Gamma_f$ et $b \notin \Gamma_e \cup \Gamma_f$, et ceci que e et f soient distincts ou non.

2° $a \notin (b)$, car $a \in (b)$ entraîne $ab \in (b)$; de même $b \notin (a)$.

3° $b \notin (a) \vee (b)_2 \vee (ab)$; en effet $b \in (a) \vee (b)_2 \vee (ab)$ et $b \notin (a)$ entraînent, selon que le premier facteur dans l'écriture de b comme produit fini d'éléments de $(a) \cup (b)_2 \cup (ab)$, est puissance de b ou puissance de a :

$$\text{soit } 1° \quad b = b^{k-1}\, b \quad \text{ou} \quad b = b^{k-1}\, bx \quad \text{avec} \quad k \geqslant 2 \qquad ;$$
$$\text{soit } 2° \quad b = a^{k'}\, b \quad \text{ou} \quad b = a^{k'}\, bx' \qquad ;$$

cependant il existe h et h' tels que $(b^{k-1})^h = f$ et $(a^{k'})^{h'} = e$; des égalités 1° résulte alors $b = fb$ ou $b = fb(x)^h$; multipliant à gauche par f les deux membres de cette dernière égalité, on voit que l'on a toujours $b = fb$; cependant $b = fb$ entraîne $b \in \Gamma_f$, ce qui est contraire à l'implication 1° ; des égalités 2° résulte de même $b = eb$; cependant $b = eb$ entraîne

$$b = (ef)b = e(fb) \in e\Gamma_f = \Gamma_e$$

ce qui est encore contraire à l'implication 1°.

4° $a \notin (a)_2 \vee (b) \vee (ab)$; en effet $a \in (a)_2 \vee (b) \vee (ab)$ et $a \notin (b)$ entraînent, selon que le dernier facteur dans l'écriture de a comme produit fini d'éléments de $(a)_2 \cup (b) \cup (ab)$ est puissance de b ou puissance de a :

$$\text{soit } 1° \quad a = ab^k \quad \text{ou} \quad a = yab^k \qquad ;$$
$$\text{soit } 2° \quad a = aa^{k'-1} \quad \text{ou} \quad a = y'aa^{k'-1} \quad \text{avec} \quad k' \geqslant 2 \qquad ;$$

cependant il existe h et h' tels que $(b^k)^h = f$ et $(a^{k'-1})^{h'} = e$; des égalités 1° résulte alors $a = af = ae \in \Gamma_e$ ce qui est contraire à l'implication 1° ; des égalités 2° résulte de même $a = ae \in \Gamma_e$ ce qui est encore contraire à l'implication 1°.

Première étape. - L'un des éléments a ou b a son carré dans $\Gamma_e \cup \Gamma_f$. G étant idéal de $G \cup (a)$, $G \cup (a)$ est un sous-demi-groupe égal à $(a) \vee [b]$; de même on a

$$G \cup (b) = [a] \vee (b) \quad .$$

Les implications précédentes permettent d'écrire :

$$G = [a] \vee [b] \subset [a] \vee (b) = G \cup (b) \subset (a)_2 \vee (b) \vee (ab) \subset (a) \vee (b)$$

et

$$G = [a] \vee [b] \subset (a) \vee [b] = G \cup (a) \subset (a) \vee (b)_2 \vee (ab) \subset (a) \vee (b) \quad .$$

Si par exemple a^2 est élément de Γ_e, on a $G \cup (a) = G \cup \{a\}$; il en résulte :

$$G \cup (a) \succ G \quad \text{et} \quad \{(a)_2 \vee (b) \vee (ab)\} \cap \{G \cup (a)\} = G \quad .$$

Considérons alors les trois éléments X, Y et Z de $T(D)$ définis par

$$X = G \cup (b) \; , \quad Y = G \cup (a) \quad \text{et} \quad Z = (a)_2 \vee (b) \vee (ab) \quad ;$$

ils sont tels que

$$Y \cap Z = G \quad \text{et} \quad X \vee Y = (a) \vee (b) \quad .$$

Il en résulte

$$Y \cap Z \subset X \subset Z \subset X \vee Y \quad ,$$

ce qui équivaut à l'existence d'un sous-treillis de $T(D)$ isomorphe à $\mathcal{T}_0$; cependant on a

$$Y \succ Y \cap Z \quad \text{et} \quad Y \cap Z \neq \emptyset \quad ;$$

la condition (1') est mise en défaut.

De même si b^2 est élément de Γ_f, la condition (1') est mise en défaut. Si l'un des éléments a ou b a son carré dans $\Gamma_e \cup \Gamma_f$, ab est élément de $G \cup (a) \cup (b)$.

Au cours des trois dernières étapes nous utiliserons les résultats suivants conséquences des implications 3° et 4° :

1° $$(a)_2 \vee (b)_2 \subset (a) \vee (b)_2 \subsetneq (a) \vee (b)_2 \vee (ab) \subset (a) \vee (b)$$

en effet

$$a \notin (a)_2 \vee (b) \vee (ab) \text{ entraîne } a \notin (a)_2 \vee (b)_2 \quad ;$$

2° $$(a)_2 \vee (b)_2 \subset (a)_2 \vee (b) \subseteq (a)_2 \vee (b) \vee (ab) \subset (a) \vee (b)$$

car de même

$$b \notin (a)_2 \vee (b)_2 \quad .$$

<u>Deuxième étape</u>. - Les éléments a et b ont leur cube dans $\Gamma_e \cup \Gamma_f$. Dans ces conditions les produits ab^2, $a^2 b$, $a^2 b^2$, $b^2 a$, ba^2 et $b^2 a^2$ satisfont aux conditions de la première étape puisque $(a^2)^2 = a^4$ est élément de Γ_e et $(b^2)^2 = b^4$ est élément de Γ_f. G étant idéal de $G \cup (a) \cup (b)$, les trois sous-ensembles

$$G \cup (a)_2 \cup (b)_2 , \quad G \cup (a)_2 \cup (b) \quad \text{et} \quad G \cup (a) \cup (b)_2$$

sont des sous-demi-groupes respectivement égaux à

$$(a)_2 \vee (b)_2 , \ (a)_2 \vee (b) \quad \text{et} \quad (a) \vee (b)_2 \quad .$$

Il en résulte :

1° $$ab \notin (a)_2 \vee (b) \quad \text{et} \quad ab \notin (a) \vee (b)_2 \quad ;$$

2° $$(a)_2 \vee (b) \succ (a)_2 \vee (b)_2 \quad \text{et} \quad (a) \vee (b)_2 \succ (a)_2 \vee (b)_2 \quad ;$$

3° $$\{(a)_2 \vee (b) \vee (ab)\} \cap \{(a) \vee (b)_2\} = (a)_2 \vee (b)_2$$

et

$$\{(a) \vee (b)_2 \vee (ab)\} \cap \{(a)_2 \vee (b)\} = (a)_2 \vee (b)_2 \quad .$$

Considérons alors les quatre éléments X, Y, Z et T de $T(D)$ définis par

$$X = (a)_2 \vee (b) \ , \quad Y = (a) \vee (b)_2 \ , \quad Z = (a)_2 \vee (b) \vee (ab) \quad \text{et} \quad T = (a) \vee (b)_2 \vee (ab);$$

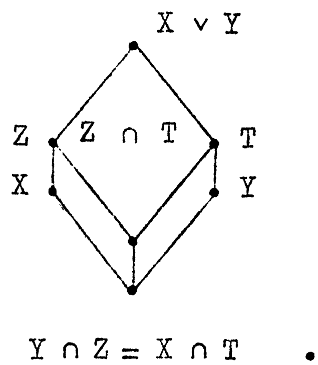
ils sont tels que

$$Y \cap Z = X \cap T = (a)_2 \vee (b)_2 \ , \quad X \vee Y = (a) \vee (b) \quad \text{et} \quad ab \in Z \cap T \quad .$$

Il en résulte

$$Y \cap Z \subset X \subset Z \subset X \vee Y \ , \quad X \cap T \subset Y \subset T \subset X \vee Y \quad \text{et} \quad Y \cap Z = X \cap T \subset Z \cap T \quad ,$$

ce qui équivaut à l'existence d'un sous-treillis de $T(D)$ isomorphe au treillis $\mathcal{T}_1$ dont le diagramme est le suivant :



Ce dernier contient lui-même deux sous-treillis isomorphes à $\mathcal{T}_0$; cependant on a $Y \succ Y \cap Z$, $X \succ X \cap T$ et $Y \cap Z = X \cap T \neq \emptyset$; la condition (1') est doublement mise en défaut.

Si les éléments a et b ont leur cube dans $\Gamma_e \cup \Gamma_f$, ab est élément de $G \cup (a) \cup (b)$.

Troisième étape. – L'un des éléments a ou b a son cube dans $\Gamma_e \cup \Gamma_f$. L'autre, compte tenu de ce que la période de tout sous-demi-groupe cyclique commence à un rang inférieur ou égal à 5 , a sa puissance cinquième dans $\Gamma_e \cup \Gamma_f$. On a donc soit

$$(\mathrm{I}) \quad a^3 \in \Gamma_e \, , \quad b^5 \in \Gamma_f \quad ;$$

$$(\mathrm{II}) \quad a^5 \in \Gamma_e \, , \quad b^3 \in \Gamma_f \quad .$$

Si (I) est réalisé, les produits ab^3, $b^3 a$, ab^4, $b^4 a$, $a^2 b$, ba^2, $a^2 b^2$, $b^2 a^2$, $a^2 b^3$, $b^3 a^2$, $a^2 b^4$ et $b^4 a^2$ satisfont aux conditions de la première étape, puisque $(b^3)^2$, $(b^4)^2$ et $(a^2)^2$ sont éléments de $\Gamma_e \cup \Gamma_f$; les produits ab^2 et $b^2 a$ satisfont aux conditions de la seconde étape, puisque a^3 est élément de Γ_e et $(b^2)^3$ est élément de Γ_f. Si (II) est réalisé les produits ab^2, $b^2 a$, $a^2 b$, ba^2, $a^2 b^2$, $b^2 a^2$, $a^3 b$, ba^3, $a^3 b^2$, $b^2 a^3$, $a^4 b$, ba^4, $a^4 b^2$ et $b^2 a^4$ satisfont de même aux conditions de l'une des deux premières étapes puisque $(a^3)^2$, $(a^4)^2$, $(b^2)^2$, b^3 et $(a^2)^3$ sont éléments de $\Gamma_e \cup \Gamma_f$.

On a donc comme précédemment

$$G \cup (a)_2 \cup (b)_2 \, , \quad G \cup (a) \cup (b)_2 \quad \text{et} \quad G \cup (a)_2 \cup (b)$$

stables, donc

$$(a)_2 \vee (b)_2 = G \cup (a)_2 \cup (b)_2 \, , \quad (a) \vee (b)_2 = G \cup (a) \cup (b)_2 \quad \text{et} \quad (a)_2 \vee (b) = G \cup (a)_2 \cup (b) \quad .$$

La démonstration se termine comme dans la seconde étape. Si l'un des éléments a ou b a son cube dans $\Gamma_e \cup \Gamma_f$, ab est élément de $G \cup (a) \cup (b)$.

<u>Dernière étape</u>. - Les éléments a et b sont quelconques. Toutefois, compte tenu de ce que la période de tout sous-demi-groupe cyclique commence à un rang inférieur ou égal à 5, leur puissance cinquième est dans $\Gamma_e \cup \Gamma_f$. Des hypothèses $(a^2)^3 \in \Gamma_e$ et $(b^2)^3 \in \Gamma_f$ résulte à nouveau, grâce à la troisième étape :

$$(a)_2 \vee (b)_2 = G \cup (a)_2 \cup (b)_2 \, , \quad (a) \vee (b)_2 = G \cup (a) \cup (b)_2 \quad \text{et} \quad (a)_2 \vee (b) = G \cup (a)_2 \cup (b) \quad .$$

La démonstration se termine comme dans la seconde étape. Quels que soient les éléments a de Γ_e et b de Γ_f, ab est donc élément de

$$(a) \cup (b) \cup \{[a] \vee [b]\} \quad .$$

COROLLAIRE 1. - Si $T(D)$ satisfait à la condition (1'), les fuseaux de D sont stables ; en effet $\forall$ a et $b \in F_e G$, (a) et (b) sont contenus dans F_e donc aussi le produit ab.

COROLLAIRE 2. - Si e et f sont deux idempotents distincts de D, tels que $\{e , f\}$ soit un antisemigroupe avec par exemple $ef = e$, $fe = f$ (5), et si $T(D)$ satisfait à la condition (1') alors, $\forall$ $a \in F_e$ et $\forall$ $b \in F_f$,

$$ab \text{ est élément de } (a) \cup \{[a] \vee (eb)\} .$$

A priori ab est élément de $G \cup (a) \cup (b)$ contenu dans $F_e \cup F_f$; cependant $ab \in F_f$ est imposible car entraîne $(ab)f \in \Gamma_f$; or

$$(ab)f = a(bf) = a(fb) = (af)b = (ae)b = a(eef)b = (ae)\{e(fb)\} \in \Gamma_e\{e\Gamma_f\} = \Gamma_e^2 = \Gamma_e .$$

On a donc

$$ab \in F_e \cap \{G \cup (a) \cup (b)\} = (a) \cup \{F_e \cap G\} .$$

Par ailleurs de

$$eb = (ef)b = e(fb) \in e\Gamma_f = \Gamma_e$$

résulte que $[a] \vee (eb)$ est un sous-groupe de Γ_e ; dès lors

$$f\{[a] \vee (eb)\} = f\{(ea) \vee (eb)\} = (fea) \vee (feb) = (fa) \vee (fb) = (fa) \vee [b]$$

est un sous-groupe de Γ_f et

$$\{[a] \vee (eb)\} \cup \{[b] \vee (fa)\}$$

est un sous-demi-groupe de $\Gamma_e \cup \Gamma_f$; les relations

$$eb = (ef)b = e(fb) \quad \text{et} \quad fa = (fe)a = f(ea)$$

entraînent les inclusions

$$[a] \cup [b] \subseteq \{[a] \vee (eb)\} \cup \{[b] \vee (fa)\} \subseteq [a] \vee [b]$$

on a donc

$$G = \{[a] \vee (eb)\} \cup \{[b] \vee (fa)\}$$

et par suite

$$F_e \cap G = [a] \vee (eb) \quad .$$

Les théorèmes précédents montrent que si $T(D)$ satisfait à la condition (2) alors, $\forall$ e et f idempotents distincts ou non de D, $\forall$ $a \in F_e$ et $\forall$ $b \in F_f$, ef est un idempotent de D et ab un élément de F_{ef} ; ceci peut encore s'écrire $\forall$ a et $b \in D$, $e_{ab} = e_a . e_b$: l'application $a \to e_a$ est donc un homomorphisme de D sur l'ensemble I de ses idempotents. Ce résultat s'énonce en utilisant le langage de CLIFFORD [1] : "si $T(D)$ satisfait à la condition (2), D est bande sur I de ses fuseaux".

D'autre part on sait [4] que si J est un demi-groupe idempotent arbitraire, il existe un demi-treillis Σ et une famille de sous-demi-groupes rectangulaires disjoints de J indexés par Σ, $\{R_\gamma ; \gamma \in \Sigma\}$, tels que :

$$J = \bigcup \{R_\gamma ; \gamma \in \Sigma\} \text{ et } R_\gamma R_\delta \subseteq R_{\gamma\delta} , \quad \forall \ \gamma , \delta \in \Sigma$$

ce qui s'énonce dans le langage de CLIFFORD : "tout demi-groupe idempotent est un demi-treillis de demi-groupes rectangulaires". Si $T(D)$ satisfait à la condition (2), I est un demi-groupe idempotent tel que, $\forall$ e et $f \in I$, le produit ef est égal à e ou à f ; le demi-treillis de structure est alors une chaîne C et les sous-demi-groupes rectangulaires des antisemigroupes S_i pour $i \in C$; de plus, dans ce cas particulier, la multiplication de S_i par S_j est déterminée par : $e \in S_i$, $f \in S_j$, et $ij = i$ entraînent $ef = e$.

Compte tenu des deux résultats, D est bande sur I de ses fuseaux et I est une chaîne sur C d'antisemigroupes S_i, on conclut que D est aussi un demi-treillis sur C de sous-demi-groupes qui sont les $\bigcup_{e \in S_i} F_e$ que nous noterons Φ_i ; de même nous poserons

$$\bigcup_{e \in S_i} \Gamma_e = P_i$$

et nous savons que P_i est une réunion de groupes isomorphes produit direct de l'un d'entre eux par l'antisemigroupe S_i.

Nous avons alors le théorème suivant :

THÉORÈME 6. - Si $T(D)$ satisfait à la condition (2), D satisfait à l'ensemble (I) de conditions suivant :

1° D est périodique ;

2° D est bande sur I de ses fuseaux ;

3° Pour tout couple e et f d'éléments de I le produit ef est égal à e ou à f ;

4° $\forall$ A et $B \in T(\Phi_i)$: $A \vee B = A \cup B \cup (A' \vee B')$ avec $A' = A \cap P_i$ et $B' = B \cap P_i$;

5° $\forall$ $A \in T(\Phi_i)$ et $\forall$ $B \in T(\Phi_j)$, avec $i \neq j$: $A \vee B = A \cup B$, d'où il résulte que le treillis $T(D)$ est le produit cardinal général des treillis $T(\Phi_i)$ pour $i \in C$ [2].

Les conditions 1, 2 et 3 ont déjà été démontrées nécessaires.

Soit A et B deux éléments de $T(\Phi_i)$; posons

$$A' = A \cap P_i \quad \text{et} \quad B' = B \cap P_i$$

et montrons que $A \cup B \cup (A' \vee B')$ est stable ; $A' \vee B'$ est un sous-demi-groupe de P_i ; soit

$$x \in A, \quad y \in B \quad \text{et} \quad z \in A' \vee B' \quad ,$$

compte tenu du théorème 5, on a

$$xy \in (x) \cup (y) \cup \{[x] \vee [y]\} \subseteq A \cup B \cup (A' \vee B') \quad ;$$

d'autre part, supposant par exemple que S_i est un antisemigroupe à droite on a

$$zx = (ze_z)x = z(e_z \cdot e_x)x = z(e_x\, x) \in A' \vee B'$$

et, compte tenu du théorème 4,

$$xz = x(e_z\ z) = (xe_z)z = (xe_x)z \in A' \vee B' \qquad ;$$

$A \cup B \cup (A' \vee B')$ étant stable, on a

$$A \vee B = A \cup B \cup (A' \vee B') \qquad .$$

Soit maintenant $A \in T(\Phi_i)$, $B \in T(\Phi_j)$ avec $i \neq j$, alors

$$A \vee B = A \cup B \qquad ;$$

en effet, soient $a \in A$ et $b \in B$, on a $a \in F_e$, $b \in F_f$ et $\{e , f\}$ est un demi-treillis avec par exemple $ef = fe = e$; dès lors, par application du théorème 3, on a ab et $ba \in (a)$, donc ab et $ba \in A \cup B$; $A \cup B$ étant stable, on a

$$A \vee B = A \cup B \qquad .$$

La correspondance

$$A \in T(D) \to \{A_i = A \cap \Phi_i\} , \quad i \in C \qquad ,$$

est injective car $A \neq B$ entraîne $A_i \neq B_i$ pour au moins un indice $i \in C$; elle est surjective car

$$\{A_i \in T(\Phi_i)\} , \quad i \in C$$

est l'image de

$$A = \bigcup_{i \in C} A_i$$

stable, donc élément de $T(D)$ d'après la propriété ci-dessus ; enfin à $A \cap B$ est associé

$$\{(A \cap B) \cap \Phi_i = A_i \cap B_i\} , \quad i \in C$$

et, compte tenu des inclusions,

$$A \cup B = \bigcup_{i \in C} (A_i \cup B_i) \subseteq \bigcup_{i \in C} (A_i \vee B_i) \subseteq A \vee B$$

et de la stabilité de

$$\bigcup_{i \in C} (A_i \vee B_i)$$

$A \vee B$ a pour image $\{A_i \vee B_i\}$, $i \in C$: $T(D)$ est isomorphe au produit cardinal général des treillis $T(\Phi_i)$ pour $i \in C$.

L'étude qui va suivre va permettre de donner une forme purement multiplicative des conditions 4 et 5 de l'ensemble (I).

Si D satisfait à l'ensemble de conditions (I), chaque fuseau est un demi-groupe unipotent et périodique satisfaisant à la condition : $\forall$ a et $b \in F_e$, ab est élément de $(a) \cup (b) \cup \{[a] \vee [b]\}$; ceci résulte de la condition 4 en posant $A = (a)$ et $B = (b)$. Étudions d'abord ces demi-groupes. Nous appellerons $(F_e)_n$ l'ensemble des éléments de F_e qui s'écrivent sous forme d'une puissance d'un élément de F_e supérieure ou égale à n :

$$(F_e)_n = \{x \in F_e \ ; \ \exists \ y \in F_e \text{ et } k \geqslant n \text{ avec } x = y^k\} \quad ,$$

et F_e^n l'ensemble des produits de n éléments de F_e

$$F_e^n = \{\prod_{i=1}^{n} a_i \ ; \ a_i \in F_e \ , \ \forall \ i\} \quad .$$

Il est clair que :

1° $$(F_e)_n \subseteq F_e^n \quad ;$$

2° $$F_e \supseteq (F_e)_2 \supseteq (F_e)_3 \supseteq \dots \supseteq (F_e)_n \supseteq \dots \supseteq \Gamma_e \quad ;$$

3° $$F_e \supseteq F_e^2 \supseteq F_e^3 \supseteq \dots \supseteq F_e^n \supseteq \dots \supseteq \Gamma_e \quad ;$$

en effet si k est supérieur ou égal à n, on a

$$y^k = y^{k-n+1} \, y^{n-1} \in (F_e)^n \quad ;$$

par ailleurs tout élément de Γ_e est d'une part puissance arbitrairement grande de lui-même et d'autre part produit de lui-même par $n-1$ facteurs égaux à e.

LEMME 1. — $(F_e)_5 = \Gamma_e$.

Cette relation n'est pas autre chose que la deuxième condition du théorème 1. Soit $c \in F_e$; posons $a = c^2$ et $b = c^3$, on a

$$ab = c^5 \in (c^2) \cup (c^3) \cup \{[c^2] \vee [c^3]\}$$

donc :

soit 1° $\quad c^5 \in [c^2] \vee [c^3] \subseteq [c]$;

soit 2° $\quad c^5 \in (c^2)$ donc $c^5 = c^{2k}$ pour un certain k et par suite $c^5 \in [c]$;

soit 3° $\quad c^5 \in (c^3)$ ce qui entraîne comme ci-dessus $c^5 \in [c]$.

Dès lors, $\forall\ c \in F_e$, $(c)_5 = [c]$, et par suite, $\forall\ x \in (F_e)_5$, $x = y^k$ est élément de $(y)_5 = [y]$ contenu dans Γ_e .

LEMME 2. — $(F_e)_2 = F_e^2$.

Il nous suffit de montrer que $F_e^2 \subseteq (F_e)_2$; soit donc ab un élément de F_e^2 ; par hypothèse ab est élément de $(a) \cup (b) \cup \{[a] \vee [b]\}$;

si ab est élément de Γ_e , ab est élément de $(F_e)_2$, puisque $\Gamma_e \subseteq (F_e)_2$;

si ab n'est pas élément de Γ_e , a et b sont éléments de $F_e - \Gamma_e$ puisque Γ_e est idéal de F_e ; ab est a priori élément de $(a) \cup (b)$; cependant " $ab = a$ ou b " est alors impossible car, par exemple, " $ab = a$ et $b^k = e$ " entraîne " $a = ab = ab^k = ae$ ", donc $a \in \Gamma_e$; par suite ab est élément de $(a)_2 \cup (b)_2 \subseteq (F_e)_2$.

LEMME 3. — Pour tout n , $(F_e)_n = F_e^n$.

La démonstration se fait par récurrence. Supposons donc que

$$(F_e)_{n-1} = F_e^{n-1} \qquad ,$$

et montrons l'inclusion $F_e^n \subseteq (F_e)_n$. Soit $\prod_{i=1}^{n} a_i$ un élément de F_e^n ; $\prod_{i=1}^{n-1} a_i$ est élément de F_e^{n-1} , donc de $(F_e)_{n-1}$, et par suite il existe $x \in F_e$ et $k \geqslant n-1$ tel que

$$\prod_{i=1}^{n-1} a_i = x^k \qquad ;$$

on a donc

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = x^{k-1}(xa_n) \qquad .$$

Compte tenu du lemme 2 on a $xa_n \in (x)_2 \cup (a_n)_2 \cup \{[x_n] \vee [a_n]\}$, donc

soit 1° $\quad xa_n \in \Gamma_e$ ce qui entraîne $\prod_{i=1}^{n} a_i \in \Gamma_e \subseteq (F_e)_n$;

soit 2° $\quad xa_n \in (x)_2$, c'est-à-dire $xa_n = x^m$ avec $m \geq 2$;

il en résulte

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = x^{k-1+m} \in (F_e)_n \qquad ;$$

soit 3° $\quad xa_n \in (a_n)_2$, c'est-à-dire $xa_n = a_n^m$ avec $m \geq 2$;

chaque facteur x se comporte alors à gauche de a_n comme le facteur a_n^{m-1} ; il en résulte

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = x^k\, a_n = a_n^{k(m-1)+1} \in (F_e)_n \qquad .$$

La propriété étant vraie pour $n = 2$ l'est pour tout n ; en particulier

$$(F_e)_5 = F_e^5 \qquad ,$$

donc

$$F_e^5 = \Gamma_e \qquad .$$

LEMME 4. - Tout élément de $F_e - \Gamma_e$ est puissance d'un élément de $F_e - F_e^2$.

Soit en effet a un élément de $F_e - \Gamma_e$; ou bien a est élément de $F_e - F_e^2$ et le lemme est démontré, ou bien a est élément de $F_e^2 = (F_e)_2$; il existe alors $b \in F_e$ et $k \geq 2$ tel que $a = b^k$; si b est élément de $F_e - F_e^2$, le lemme est démontré, sinon il existe $c \in F_e$ et $k' \geq 2$ tel que $b = c^{k'}$; dès lors

c est élément de $F_e - F_e^2$; en effet s'il n'en n'est pas ainsi il existe $d \in F_e$ et $k'' \geqslant 2$ tel que $c = d^{k''}$, donc tel que $a = d^{kk'k''}$, et ceci est impossible puisque $kk'k'' \geqslant 8$ et $(F_e)_5 = \Gamma_e$ entraîne $d^{kk'k''} = a \in \Gamma_e$.

LEMME 5. – Pour tout couple $a, b \in F_e - F_e^2$ tel que $ab \in F_e - \Gamma_e$, α désignant l'un des éléments a ou b, β l'autre, on a :

soit 1° $\quad ab = \alpha^2 \; ; \; \alpha^3 \in \Gamma_e$;

soit 2° $\quad ab = \alpha^2$ et, $\forall\ n \geqslant 3$, $a^n = b^n$;

soit 3° $\quad ab = \alpha^2 \; ; \; \alpha^3 = \beta^4 \; ; \; \alpha^4 = \alpha^5 = e = \beta^5 = \beta^6$;

soit 4° $\quad ab = a^3, b^3, a^4$ ou b^4.

Compte tenu du lemme 2 on a, a priori, $ab \in (a)_2 \cup (b)_2 \cup (F_e - \Gamma_e)$, et par suite $ab \in \{a^2, a^3, a^4, b^2, b^3, b^4\}$. On a donc :

soit le 4° : $\quad ab = a^3, b^3, a^4$ ou b^4 ;

soit le 1° : $\quad ab = \alpha^2 \; ; \; \alpha^3 \in \Gamma_e$;

soit enfin : $\quad ab = \alpha^2 \; ; \; \alpha^3 \notin \Gamma_e$.

Supposons par exemple qu'on ait " $ab = a^2 \; ; \; a^3 \notin \Gamma_e$ " ; il en résulte

$$a^3 = a^2 b \in (a^2)_2 \cup (b)_2 \cup \{[a^2] \vee [b]\} .$$

Or $a^3 \in (a^2)_2$ et $a^3 \in [a^2] \vee [b]$ entraînant $a^3 \in \Gamma_e$ on a nécessairement

$$a^3 \in \{b^2, b^3, b^4\} ;$$

$a^3 = b^2$ et $a^2 = ab$ entraînent $a^3 = ab^2 = a^4$, donc $a^3 \in \Gamma_e$. Il ne reste donc que deux cas possibles :

– le 2° : $a^3 = b^3$, d'où il résulte pour tout $n' \geqslant 0$

$$b^{3+n'} = a^2\, ab^{n'} = a^2\, a^{1+n'} = a^{3+n'}$$

c'est-à-dire, $\forall \quad n \geqslant 3$,

$$a^n = b^n \quad ;$$

- le 3° : $a^3 = b^4$, d'où il résulte

$$b^6 = (b^4)b^2 = a^3\, b^2 = a^5 = a(b^4) = a^4 = e$$

et

$$b^5 = (b^4)b = a^3\, b = a^4 = e$$

soit on résumé :

$$a^4 = a^5 = e = b^5 = b^6 \quad .$$

THÉORÈME 7. - Un demi-groupe unipotent et périodique F_e satisfait à la condition : $\forall$ a et $b \in F_e$, ab est élément de $(a) \cup (b) \cup \{[a] \vee [b]\}$, si et seulement si Γ_e désignant le groupe maximal de F_e ;

1° $$F_e^5 = \Gamma_e \quad ;$$

2° F_e satisfait à la condition du lemme 4 ;

3° F_e satisfait à la condition du lemme 5 .

Ces conditions sont nécessaires.

Soient maintenant x et y deux éléments de F_e ; si xy est élément de Γ_e , on a

$$xy = e(xy) = (ex)y = (exe)y = ex.ey \in [x] \vee [y] \quad ;$$

si xy est élément de $F_e - \Gamma_e$, x et y sont aussi éléments de $F_e - \Gamma_e$, puisque Γ_e est idéal bilatère de F_e ; il existe donc, d'après 2°, deux éléments a et b de $F_e - F_e^2$ tels que $x = a^k$ et $y = b^h$; de plus, compte tenu de 1°, k + h est inférieur ou égal à 4 ; il reste à examiner les diverses éventualités du 3°.

Si $ab = \alpha^2$ avec par exemple $\alpha = a$, on a $xy = a^{k+h}$, donc $xy = x^{h+1}$ si $k = 1$, et $xy = x^2$ si $k = h = 2$; il reste le cas $k = 3$, $h = 1$; il ne se produit ni dans le cas 1°, ni dans le cas 3°, car alors a^4 est élément de Γ_e ; dans le cas 2°, $a^4 = b^4$, donc $xy = y^4$.

Si $ab = \alpha^3$ avec par exemple $\alpha = a$, on a $xy = a^{k+2h}$, donc $xy = x^3$ si $k = h = 1$ et $xy = x^2$ si $k = 2$, $h = 1$; ce sont les deux seuls cas possibles.

Si $ab = a^4$ ou b^4 il n'y a qu'un seul cas possible $k = h = 1$ et par suite $xy = x^4$ ou y^4.

Ces conditions sont donc bien suffisantes.

Si D satisfait à l'ensemble de conditions (I) et si e et f sont deux idempotents distincts de D tels que $\{e, f\}$ soit un demi-treillis avec par exemple $ef = fe = e$ alors $\forall\ a \in F_e$ et $\forall\ b \in F_f$, ab est élément de (a) ; en effet la condition 5 montre que ab et ba sont éléments de $(a) \cup (b)$ et la condition 2 que ab et ba sont éléments de F_e.

LEMME 6. - Dans un demi-groupe périodique, si e et f sont deux idempotents distincts, tels que $ef = e$, et si F_e est stable et satisfait aux conditions 1 et 2 du théorème 7, la condition " $\forall\ a \in F_e$ et $\forall\ b \in F_f$ ", ab est élément de (a)' est équivalente à l'ensemble de conditions suivant :

1° $F_e . F_f \subseteq F_e$;

2° $\forall\ b \in F_f$: $eb = e$;

3° $\forall\ a \in F_e - F_e^2$ et $\forall\ b \in F_f$, tels que $ab \in F_e - \Gamma_e$, on a :

soit 1° $\qquad ab = a^2$; $a^3 \in \Gamma_e$;

soit 2° $\qquad ab = a$, a^3 ou a^4.

Ces conditions sont nécessaires : la première et la seconde car (a) est contenu dans F_e et (e) est égal à $\{e\}$; la troisième résulte de ce que a^5 est élément de Γ_e et de ce que $ab = a^2$, $a^3 \notin \Gamma_e$ entraîne $a^2 b = a^3 \notin (a^2)$ et est donc impossible.

Ces conditions sont suffisantes ; soit en effet $x \in F_e$ et $y \in F_f$. Si xy est élément de Γ_e, on a

$$xy = e(xy) = (ex)y = (xe)y = x(ey) = xe \in (x) .$$

Si xy est élément de $F_e - \Gamma_e$, x est aussi élément de $F_e - \Gamma_e$; en effet $x \in \Gamma_e$ entraîne

$$xy = (xe)y = x(ey) = xe \in \Gamma_e \quad ;$$

il existe donc un élément a de $F_e - F_e^2$ tel que $x = a^k$ avec d'ailleurs $k \leq 4$; il reste à examiner les diverses éventualités du 3° :

si $ay = a$, on a

$$xy = x \in (x) \quad ;$$

si $ay = a^2$; $a^3 \in \Gamma_e$, il n'y a qu'un seul cas possible

$$k = 1 , \quad \text{d'où} \quad xy = x^2 \quad ;$$

si $ay = a^3$, on a

soit $$k = 1 , \quad xy = x^3 \quad ;$$

soit $$k = 2 , \quad xy = x^2 \quad ;$$

si $ay = a^4$, il n'y a qu'un seul cas possible

$$k = 1 , \quad \text{d'où} \quad xy = x^4 \quad .$$

Un lemme évidemment analogue est relatif au cas $ef = f$, $ab \in (b)$.

Si D satisfait à l'ensemble de conditions (I), et si e et f sont deux idempotents distincts de D tels que $\{e , f\}$ soit un antisemigroupe avec par exemple $ef = e$, $fe = f$, alors $\forall$ $a \in F_e$ et $\forall$ $b \in F_f$,

$$ab \text{ est élément de } (a) \cup \{[a] \vee (eb)\} \quad ;$$

en effet la condition 4 montre que

$$ab \text{ est élément de } (a) \cup (b) \cup \{[a] \vee [b]\} \quad ,$$

la condition 2 montre que

$$ab \text{ est élément de } F_e$$

et

$$\{[a] \vee [b]\} \cap F_e \text{ est égal à } [a] \vee (eb) \quad .$$

LEMME 7. – Dans un demi-groupe périodique, si e et f sont deux idempotents distincts tels que $\{e , f\}$ soit un antisemigroupe avec, par exemple $ef = e$, $fe = f$ (5), et si F_e et F_f sont stables et satisfont aux conditions 1 et 2 du théorème 7, la condition

$$\forall \; a \in F_e \text{ et } \forall \; b \in F_f , \quad ab \text{ est élément de } (a) \cup \{[a] \vee (eb)\}$$

est équivalente à l'ensemble de conditions suivant :

1° $F_e . F_f \subseteq F_e$;

2° $\forall \; a \in F_e - F_e^2$ et $\forall \; b \in F_f - F_f^2$ tels que $ab \in F_e - \Gamma_e$, on a :

soit 1° $\qquad ab = a^2 \; ; \; a^3 \in \Gamma_e \quad ;$

soit 2° $\qquad ab = a^3$ ou $a^4 \quad .$

Ces conditions sont nécessaires : la première car $(a) \cup \{[a] \vee (eb)\}$ est contenu dans F_e , la seconde est conséquence des trois remarques suivantes :

1° a^5 est élément de Γ_e ;

2° $ab = a^2 \; ; \; a^3 \notin \Gamma_e$ est impossible, car entraîne

$$a^2 b = a^3 \notin (a^2) \cup \{[a^2] \vee (eb)\} \quad ;$$

3° $ab = a$ est également impossible, car il existe k tel que $b^k = f$ et par suite $ab = a$ entraîne

$$a = ab = ab^k = af = a(fe) = (af)e = e(af) = (ea)f = (ae)f = a(ef) = ae \in \Gamma_e \quad .$$

Ces conditions sont suffisantes ; soit en effet $x \in F_e$ et $y \in F_f$. Si xy est élément de Γ_e , on a :

$$xy = e(xy) = (ex)y = (xe)y = x(ee)y = (xe)(ey) \in [x] \vee (ey) \quad .$$

Si xy est élément de $F_e - \Gamma_e$, x est élément de $F_e - \Gamma_e$ et y est élément de $F_f - \Gamma_f$; en effet $x \in \Gamma_e$ entraîne

$$xy = (ex)y = e(xy) \in \Gamma_e$$

et $y \in \Gamma_f$ entraîne

$$xy = x(yf) = xy(fe) = x(yf)e = (xy)e \in \Gamma_e \quad ;$$

il existe donc un élément a de $F_e - F_e^2$ et un élément b de $F_f - F_f^2$ tels que $x = a^k$ et $y = b^h$ avec d'ailleurs k et h inférieurs ou égaux à 4 ; il reste à examiner les diverses éventualités du 2° :

si $ab = a^2$; $a^3 \in \Gamma_e$, il n'y a qu'un seul cas possible

$$k = h = 1 \text{ , d'où } xy = x^2 \quad ;$$

si $ab = a^3$, on a

soit $$k = h = 1 \text{ , } xy = x^3 \quad ;$$

soit $$k = 2 \text{ , } h = 1 \text{ , } xy = x^2 \quad ;$$

si $ab = a^4$, il n'y a qu'un seul cas possible

$$k = h = 1 \text{ , d'où } xy = x^4 \quad .$$

THÉORÈME 8. - <u>L'ensemble de condition (I) est équivalent à l'ensemble (II) suivant</u> :

1° D <u>est périodique</u> ;

2° D <u>est bande sur</u> I <u>de ses fuseaux</u> ;

3° <u>Pour tout couple</u> e <u>et</u> f <u>d'éléments de</u> I <u>le produit</u> ef <u>est égal à</u> e <u>ou à</u> f ;

4° <u>Chaque fuseau</u> F_e <u>satisfait à</u> :

a. <u>Tout élément de</u> $F_e - \Gamma_e$ <u>est puissance d'un élément de</u> $F_e - F_e^2$;

b. $F_e^5 = \Gamma_e$;

c. Pour tout couple $a, b \in F_e - F_e^2$, tel que $ab \in F_e - \Gamma_e$, α désignant l'un des éléments a ou b, β l'autre, on a :

soit : $ab = \alpha^2$; $\alpha^3 \in \Gamma_e$;

soit : $ab = \alpha^2$ et $\forall\ n \geqslant 3$: $a^n = b^n$;

soit : $ab = \alpha^2$; $\alpha^3 = \beta^4$; $\alpha^4 = \alpha^5 = e = \beta^5 = \beta^6$;

soit : $ab = a^3$, b^3, a^4 ou b^4.

5° Si e et f sont deux éléments distincts de I tels que $\{e, f\}$ soit un demi-treillis avec par exemple $ef = fe = e$ (6), la multiplication de F_e par F_f satisfait à :

a. $\forall\ b \in F_f$: $eb = e$;

b. $\forall\ a \in F_e - F_e^2$ et $\forall\ b \in F_f$, tels que $ab \in F_e - \Gamma_e$, on a :

soit 1° $ab = a^2$; $a^3 \in \Gamma_e$;

soit 2° $ab = a$, a^3 ou a^4.

6° Si e et f sont deux éléments distincts de I tels que $\{e, f\}$ soit un antisemigroupe avec par exemple $ef = e$, $fe = f$ (5), la multiplication de F_e par F_f satisfait à :

$\forall\ a \in F_e - F_e^2$ et $\forall\ b \in F_f - F_f^2$, tels que $ab \in F_e - \Gamma_e$, on a :

soit 1° $ab = a^2$; $a^3 \in \Gamma_e$;

soit 2° $ab = a^3$ ou a^4.

On a déjà vu que (I) entraîne (II).

Réciproquement (II) permet d'utiliser les réciproques des lemmes 6 et 7, puisque la deuxième condition de (II) entraîne $F_e . F_f \subseteq F_{ef} = F_e$; dès lors on a

$$ab \in (a) \cup (b) \cup \{[a] \vee [b]\}, \quad \forall\ a \text{ et } b \in F_e ,$$

$$ab \in (a), \quad \forall\ a \in F_e \text{ et } \forall\ b \in F_f \text{ avec } e \neq f \text{ et } ef = fe = e$$

et

$$ab \in (a) \cup \{[a] \vee (eb)\}, \quad \forall\ a \in F_e \text{ et } \forall\ b \in F_f \text{ avec } e \neq f, \ ef = e \text{ et } fe = f.$$

---

(6) Les conditions relatives au cas $ef = fe = f$ s'en déduisent aisément.

Ces conditions, ainsi que celles relatives au cas $ef = fe = f$ et $ef = f$, $fe = e$, jointes aux conditions 1 et 3 de (II) ont déjà permis d'établir l'ensemble de conditions (I).

THÉORÈME 9. - Si P est le produit direct d'un antisemigroupe S et d'un groupe périodique Γ, il y a équivalence entre

1° $T(P)$ satisfait à la condition (2) et $\mathcal{T}(\Gamma)$ satisfait à la condition (2) ;

2° $T(P)$ est semi-modulaire et $\mathcal{T}(\Gamma)$ est semi-modulaire ;

3° Dans le cas où S contient plus d'un élément entre :

$T(P)$ est modulaire, $T(P)$ est distributif et Γ est réduit à son élément unité.

Tout d'abord e désignant un élément arbitraire de S, (e, Γ) est un sous-demi-groupe de $P = (S, \Gamma)$ isomorphe à Γ ; il en résulte que $\mathcal{T}(\Gamma)$ est isomorphe à un segment du treillis $T(P)$; tout segment d'un treillis satisfaisant à la condition (2) (resp. à la semi-modularité) satisfaisant lui-même à la condition (2) (resp. à la semi-modularité) il en résulte les implications de gauche à droite des équivalences 1° et 2°.

Considérons maintenant $T(P)$; tout sous-demi-groupe de P est une réunion de groupes dont l'ensemble des éléments unités forme un antisemigroupe ; tout sous-demi-groupe de P est donc produit direct d'un certain sous-demi-groupe A de S par un certain sous-demi-groupe H de Γ. Cette représentation est alors nécessairement unique si le sous-demi-groupe est non vide, l'ensemble vide ayant pour représentation $\emptyset \times H$, $\forall\ H \in T(\Gamma)$ et $A \times \emptyset$, $\forall\ A \in T(S)$. Si U et V sont deux éléments non vides de $T(P)$, $U = A_U \times H_U$ et $V = A_V \times H_V$, on a alors trivialement

$$(1) \qquad U \cap V = (A_U \cap A_V) \times (H_U \cap H_V)$$

$$(2) \qquad U \vee V = (A_U \cup A_V) \times (H_U \vee H_V)$$

et $U \subset V$ si et seulement si

soit 1° $A_U \subseteq A_V$; $H_U \subset H_V$;

soit 2° $A_U \subset A_V$; $H_U \subseteq H_V$.

La formule (1) donne la représentation unique de $U \cap V$ si $U \cap V \neq \emptyset$ mais reste valable quels que soient U et V éléments de $T(P)$.

Supposons alors qu'il existe un sous-treillis de $T(P)$ isomorphe à $\mathcal{T}_0$; il en résulte que X, Y et Z sont non vides. Nous distinguerons deux cas :

1° $Y \cap Z \neq \emptyset$; on a alors :

$$A_Y \cap A_Z \subseteq A_X \subseteq A_Z \subseteq A_X \cup A_Y \quad ,$$

d'où, $T(S)$ étant distributif

$$A_X = A_X \cup (A_Y \cap A_Z) = (A_X \cup A_Y) \cap (A_X \cup A_Z) = (A_X \cup A_Y) \cap A_Z = A_Z \quad ;$$

dès lors on a

$$H_Y \cap H_Z \subseteq H_X \subset H_Z \subseteq H_X \vee H_Y \quad ;$$

on en déduit

$$H_Y \cap H_Z \neq H_X$$

car de l'égalité $H_Y \cap H_Z = H_X$ résulterait $H_X \subseteq H_Y$, d'où

$$H_X \vee H_Y = H_Y$$

et finalement

$$H_Z \subseteq H_Y \quad ,$$

en contradiction avec $H_Y \cap H_Z = H_X$; par dualité on voit qu'on a de même

$$H_Z \neq H_X \vee H_Y$$

d'où la relation

$$\emptyset \subset H_Y \cap H_Z \subset H_X \subset H_Z \subset H_X \vee H_Y \quad .$$

Il en résulte l'existence d'un sous-treillis de $\mathcal{T}(\Gamma)$ isomorphe à $\mathcal{T}_0$. Si $\mathcal{T}(\Gamma)$ satisfait à la condition (2), il existe $K \in \mathcal{T}(\Gamma)$ tel que $H_Y \cap H_Z \subset K \subset H_Y$. Dès lors l'élément $T = (A_Y \cap A_Z) \times K$ de $T(P)$ satisfait à $Y \cap Z \subset T \subset Y$, ce qui démontre, dans ce premier cas, l'implication de droite à gauche de l'équivalence 1°. Si $\mathcal{T}(\Gamma)$ est semi-modulaire, il existe $K \in \mathcal{T}(\Gamma)$ tel que

$$H_Y \cap H_Z \subset K \subset H_Y$$

et tel que

$$H_X = (H_X \vee K) \cap H_Z \quad .$$

Dès lors l'élément

$$T = (A_Y \cap A_Z) \times K$$

de $T(P)$ satisfait à

$$Y \cap Z \subset T \subset Y$$

et à

$$(X \vee T) \cap Z = \{(A_X \cup (A_Y \cap A_Z)) \cap A_Z\} \times \{(H_X \vee K) \cap H_Z\} = A_X \times H_X = X$$

ce qui démontre dans ce premier cas l'implication de droite à gauche de l'équivalence 2°.

2° $Y \cap Z = \emptyset$; Y et Z étant non vides, H_Y et H_Z sont non vides, donc aussi $H_Y \cap H_Z$; dès lors $Y \cap Z = \emptyset$ entraîne $A_Y \cap A_Z = \emptyset$; en en déduit

$$A_Y \cap A_Z \subseteq A_X \subseteq A_Z \subseteq A_X \cup A_Y$$

donc

$$A_X = A_Z$$

et par suite

$$H_X \subset H_Z \subseteq H_X \vee H_Y \quad ;$$

il en résulte

$$H_Z \subseteq H_Z \vee H_Y$$

donc

$$H_Z \subseteq H_Y$$

et enfin

$$H_X \subset H_Y \quad .$$

Posant alors $T = A_Y \times H_X$, on a

$$Y \cap Z \subset T \subset Y$$

et

$$(X \vee T) \cap Z = \{(A_X \cup A_Y) \cap A_Z\} \times \{(H_X \vee H_X) \cap H_Z\} = A_Z \times H_X = A_X \times H_X = X \quad .$$

Sans faire aucune hypothèse sur $\mathcal{C}(\Gamma)$ on établit dans ce second cas l'implication de droite à gauche des équivalences 1° et 2°.

Démontrons la troisième équivalence. D'une part $T(P)$ distributif entraîne $T(P)$ modulaire et Γ réduit à son élément unité entraînant P isomorphe à S implique $T(P)$ distributif. D'autre part si Γ n'est pas réduit à son élément unité $T(P)$ n'est pas modulaire ; soient en effet e et f deux idempotents distincts de S , E le sous-demi-groupe de Γ constitué par l'élément unité de Γ ; considérons alors les trois éléments X , Y et Z de $T(P)$ définis par

$$X = \{e\} \times E \, , \quad Y = \{f\} \times \Gamma \quad \text{et} \quad Z = \{e\} \times \Gamma \quad ;$$

ils sont tels que

$$Y \cap Z = \emptyset \quad \text{et} \quad X \vee Y = \{e , f\} \times \Gamma \quad ;$$

il en résulte

$$Y \cap Z \subset X \subset Z \subset X \vee Y$$

ce qui équivaut à l'existence d'un sous-treillis de $T(P)$ isomorphe à $\mathfrak{T}_0$: $T(P)$ n'est pas modulaire.

Nous avons alors les théorèmes fondamentaux :

THÉORÈME 10. - Un demi-groupe D a le treillis $T(D)$ de ses sous-demi-groupes satisfaisant à la condition (2) (resp. à la semi-modularité) si et seulement si :

1° D satisfait aux ensembles de conditions équivalents (I) ou (II) ;

2° Chaque groupe maximal Γ_e a le treillis $\mathfrak{T}(\Gamma_e)$ de ses sous-groupes satisfaisant à la condition (2) (resp. à la semi-modularité).

Ces conditions sont nécessaires : la seconde car $T(P_i)$ satisfait pour tout i à la condition (2) (resp. à la semi-modularité).

Montrons qu'elles sont suffisantes. Soient X , Y et Z trois éléments de $T(\Phi_i)$ satisfaisant à $Y \cap Z \subset X \subset Z \subset X \vee Y$; posant

$$X' = X \cap P_i \quad ,$$

$$Y' = Y \cap P_i \quad ,$$

$$Z' = Z \cap P_i \quad ,$$

$$X'' = X - X' = X \cap (\Phi_i - P_i) \quad ,$$

$$Y'' = Y - Y'$$

et

$$Z'' = Z - Z'$$

il vient :

$$(Y \cap Z)' = Y' \cap Z' \quad ,$$

$$(Y \cap Z)'' = Y'' \cap Z'' \quad ,$$

$$(X \vee Y)' = \{X \cup Y \cup (X' \vee Y')\} \cap P_i = X' \vee Y'$$

et

$$(X \vee Y)'' = \{X \cup Y \cup (X' \vee Y')\} \cap (\Phi_i - P_i) = X'' \cup Y'' \quad .$$

On a alors

$$Y'' \cap Z'' \subseteq X'' \subseteq Z'' \subseteq X'' \cup Y''$$

d'où il résulte, compte tenu de la distributivité de $\mathcal{P}(\Phi_i - P_i)$ et selon un raisonnement déjà utilisé au théorème 9,

$$X'' = Z''$$

puis

$$Y' \cap Z' \subset X' \subset Z' \subset X' \vee Y' \quad .$$

Compte tenu de la condition 2°, $T(P_i)$ satisfait pour tout i à la condition (2) (resp. à la semi-modularité). Dans le premier cas on en déduit l'existence d'un élément T_1' de $T(P_i)$ tel que $Y' \cap Z' \subset T_1' \subset Y'$; posant alors :

$$T = T_1' \vee (Y \cap Z) = T_1' \cup (Y \cap Z) \cup \{T_1' \vee (Y' \cap Z')\} = T_1' \cup (Y \cap Z)$$

il vient

$$T' = \{T_1' \cup (Y \cap Z)\} \cap P_i = T_1' \cup (Y' \cap Z') = T_1' \text{ , } T'' = Y'' = Y'' \cap Z''$$

d'où

$$Y' \cap Z' \subset T' \subset Y' \quad \text{et} \quad Y'' \cap Z'' = T'' \subseteq Y''$$

et par suite

$$Y \cap Z \subset T \subset Y$$

$T(\Phi_i)$ satisfait à la condition (2).

Dans le second cas il existe un élément T_1' qui satisfait de plus à : $X' = (X' \vee T_1') \cap Z'$; il en résulte

$$(X \vee T) \cap Z = \{X \cup T \cup (X' \vee T')\} \cap Z = (X \cap Z) \cup (T \cap Z) \cup \{(X' \vee T') \cap Z\}$$

$$= X \cup (T \cap Z) \cup \{(X' \vee T') \cap Z'\} = X \cup (T \cap Z) \cup X' \quad ;$$

cependant on a

$$T \cap Z \subseteq Y \cap Z \subseteq X \quad \text{et} \quad X' \subseteq X$$

et par suite

$$(X \vee T) \cap Z = X$$

$T(\Phi_i)$ est semi-modulaire.

Le produit cardinal général de treillis satisfaisant à la condition (2) (resp. à la semi-modularité) satisfaisant lui-même à la condition (2) (resp. à la semi-modularité), compte tenu de la condition 5 de (I), $T(D)$ satisfait à la condition (2) (resp. à la semi-modularité).

THÉORÈME 11. - Un demi-groupe D a le treillis $T(D)$ de ses sous-demi-groupes modulaire (resp. distributif) si et seulement si :

1° D satisfait aux ensembles de conditions équivalents (I) ou (II) ;

2° Chaque groupe maximal Γ_e est de l'un des deux types suivants :

a. Γ_e a le treillis $\mathfrak{T}(\Gamma_e)$ de ses sous-groupes modulaire (resp. distributif) si e constitue à lui seul un antisemigroupe S_i de la décomposition de I ;

b. $\Gamma_e = \{e\}$ dans le cas contraire.

Ces conditions sont nécessaires : la seconde car $T(P_i)$ est pour tout i modulaire (resp. distributif).

Ces conditions sont suffisantes. Compte tenu de la condition 2°, $T(P_i)$ est, pour tout i, modulaire (resp. distributif).

Plaçons-nous d'abord dans l'hypothèse $T(P_i)$ distributif. Considérons alors trois éléments X, Y et Z de $T(\Phi_i)$ et leur intersection X', Y' et Z' avec P_i. $T(P_i)$ étant distributif, on a

$$Z' \cap (Y' \vee X') = (Z' \cap Y') \vee (Z' \cap X')$$

et par suite :

$$Z \cap (Y \vee X) = Z \cap \{Y \cup X \cup (Y' \vee X')\} = (Z \cap Y) \cup (Z \cap X) \cup \{Z \cap (Y' \vee X')\}$$

$$= (Z \cap Y) \cup (Z \cap X) \cup \{Z' \cap (Y' \vee X')\} = (Z \cap Y) \cup (Z \cap X) \cup \{(Z' \cap Y') \vee (Z' \cap X')\}$$

$$= (Z \cap Y \cup (Z \cap X) \cup \{(Z \cap Y)' \vee (Z \cap X)'\} = (Z \cap Y) \vee (Z \cap X) \quad .$$

$T(\Phi_i)$ est distributif.

Plaçons-nous maintenant dans l'hypothèse $T(P_i)$ modulaire et considérons trois éléments X , Y et Z de $T(\Phi_i)$ tels que $Z \supseteq X$. Leurs intersections X' , Y' et Z' avec P_i sont telles que, $Z' \supseteq X'$; $T(P_i)$ étant modulaire, on a :

$$Z' \cap (Y' \vee X') = (Z' \cap Y') \vee (Z' \cap X') \quad ;$$

un raisonnement analogue à celui fait dans le cas distributif montre que

$$Z \cap (Y \vee X) = (Z \cap Y) \vee (Z \cap X) \quad .$$

$T(\Phi_i)$ est modulaire.

Le produit cardinal général de treillis modulaires (resp. distributifs) étant modulaire (resp. distributif), $T(D)$ est modulaire (resp. distributif).

Remarque 1. - Dans le cas modulaire et, par conséquent, dans le cas distributif, $T(D)$ est aussi le produit cardinal général des treillis $T(F_e)$ pour $e \in I$.

Soit en effet $a \in F_e$, $b \in F_f$ avec $e \neq f$. Si $\{e , f\}$ est un demi-treillis, on a $ab \in (a) \cup (b)$; si $\{e , f\}$ est un antisemigroupe, compte tenu du deuxième cas de la condition 2°, on a

$$\Gamma_e = \{e\} \quad \text{et} \quad \Gamma_f = \{f\}$$

donc

$$[a] \vee [b] = \{e , f\}$$

et par suite

$$ab \in (a) \cup (b) \cup \{[a] \vee [b]\} = (a) \cup (b) \quad .$$

Dès lors $\forall\ A \in T(F_e)$ et $\forall\ B \in T(F_f)$ avec $e \neq f$, on a

$$A \vee B = A \cup B$$

d'où il résulte, par une démonstration analogue à celle faite au théorème 6, que $T(D)$ est le produit cardinal général des treillis $T(F_e)$ pour $e \in I$.

Remarque 2. - La condition nécessaire et suffisante, pour qu'un groupe G ait le treillis $\mathcal{T}(G)$ de ses sous-groupes distributif, étant qu'il soit localement cyclique, tout demi-groupe cyclique fini, dont la période commence à un rang inférieur ou égal à 5, a le treillis de ses sous-demi-groupes distributif : nous complétons ainsi la remarque consécutive au théorème 1.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CLIFFORD (A. H.). - Bands of semigroups, Proc. Amer. math. Soc., t. 5, 1954, p. 499-504.

[2] DUBREIL-JACOTIN (M.-L.), LESIEUR (L.) et CROISOT (R.). - Leçons sur la théorie des treillis, des structures algébriques ordonnées et des treillis géométriques. - Paris, Gauthier-Villars, 1953 (Cahiers scientifiques, 21).

[3] DUBREIL (Paul). - Demi-groupes d'endomorphismes, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et théorie des nombres, t. 14, 1960/61, n° 16.

[4] McLEAN (David). - Idempotent semigroups, Amer. math. Monthly, t. 61, 1954, p. 110-113.

[5] MILLER (D. D.) and CLIFFORD (A. H.). - Regular $\mathcal{D}$-classes in semigroups, Trans. Amer. math. Soc., T. 82, 1956, p. 270-280.

[6] SUZUKI (Michio). - Structure of a group and the structure of its lattice of subgroups. - Berlin, Springer-Verlag, 1956 (Ergebnisse der Mathematik ..., Neue Folge, 10, Reihe : Gruppentheorie).