Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Guy Renault

Sur les anneaux non commutatifs. IV. Modules isotypiques

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 15, n° 2 (1961-1962), exp. n° 16, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1961-1962__15_2_A5_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
15e année, 1961/62, n° 16

26 mars 1962

SUR LES ANNEAUX NON COMMUTATIFS
IV. MODULES ISOTYPIQUES.

par Guy RENAULT

1. Modules injectifs indécomposables.

DÉFINITION 1. - Un A-module M est indécomposable si ses seuls facteurs directs sont 0 et M.

PROPOSITION 1. - Soit M un A-module ; les propriétés suivantes sont équivalentes :

a. 0 est $\cap$-irréductible dans M ;

b. L'enveloppe injective $E(M)$ est indécomposable ;

c. $E(M)$ est l'enveloppe injective de tout sous-module non nul de M.

(a) $\Longrightarrow$ (b). - Soit $E(M) = M_1 \oplus M_2$; posons $X_1 = M \cap M_1$ et $X_2 = M \cap M_2$; $E(M)$ est une extension essentielle de M ; par suite, X_1 et X_2 sont différents de (0) et l'on a $X_1 \cap X_2 = 0$.

(b) $\Longrightarrow$ (c). - Soit P sous-module de M ; $E(P)$ est facteur direct de $E(M)$ et, par suite, $E(P) = E(M)$.

(c) $\Longrightarrow$ (a). - Soient X_1 et X_2 deux sous-modules de M tels que $X_1 \cap X_2 = 0$, $E(M)$ non extension essentielle de X_1.

Exemple. - Soit E un A-module injectif indécomposable, alors $E = E(A/J)$ où J est un idéal irréductible. D'après la proposition 1, si J est un idéal irréductible, alors $E(A/J)$ est injectif et indécomposable.

Réciproquement, soit $x \in E$, alors $E = E(Ax)$; soit J annulateur de x :

$$Ax \cong A/J \ , \qquad E = E(A/J)$$

avec J irréductible.

PROPOSITION 2. - Soit E un A-module injectif et indécomposable, alors $\mathrm{Hom}_A(E , E)$ est un anneau local.

Soit $u \in \mathrm{Hom}_\Lambda(E , E)$, u est un automorphisme de $E \iff u$ est injectif. En effet, dans ce cas $u(E)$ est un Λ-module injectif et, par suite, est facteur direct de E .

Soient $u , v \in \mathrm{Hom}_\Lambda(E , E)$, $\mathrm{Ker}\, u \neq 0$, $\mathrm{Ker}\, v \neq 0$,

$$\mathrm{Ker}(u + v) > \mathrm{Ker}\, u \cap \mathrm{Ker}\, v \neq 0 \implies \mathrm{Ker}(u + v) \neq 0 \quad .$$

PROPOSITION 3. - Soient $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ des sous-modules irréductibles d'un Λ-module M tels que $0 = X_1 \cap \dots \cap X_n$ et 0 n'étant intersection d'aucune sous-famille des X_i . Alors

a. $E(M/X_i)$ est un Λ-module injectif indécomposable ;

b. $E(M) = E(M/X_1) \otimes \dots \otimes E(M/X_n)$.

La propriété (a) résulte immédiatement de la proposition 1. Soient φ_i l'application canonique $M \to M/X_i$ et $\varphi = (\varphi_i)_{1 \leq i \leq n}$,

$$\varphi_i : m \to [\varphi_1(m) \dots \varphi_n(m)] \quad .$$

φ est une application injective de M dans $E = E(M/X_1) \otimes \dots \otimes E(M/X_n)$. Il nous suffit d'établir que E est une extension essentielle de $\varphi(M)$. Par hypothèse, il existe

$$m \in \bigwedge_{j \neq i} X_j \quad \text{avec} \quad m \notin X_i \quad ;$$

par suite,

$$\varphi(M) \cap M/X_i \neq 0 \quad .$$

D'après la proposition 1, on sait que $E(M/X_i)$ est l'enveloppe injective de $\varphi(M) \cap M/X_i$. Soit $x = (x_1 , \dots , x_n) \in E$. Pour toute composante non nulle x_i , il existe $a_i \in A$ tel que $a_i\, x_i \in \varphi(M) \cap M/X_i$ avec $a_i\, x_i \neq 0$, et, par suite, il existe $s \in \Lambda$ tel que $sx \neq 0$ et avec $sx \in \varphi(M)$. E est une extension essentielle de $\varphi(M)$.

Avec des hypothèses analogues, si $X = X_1 \cap \dots \cap X_n$, alors

$$E(M/X) = E(M/X_1) \otimes \dots \otimes E(M/X_n) \quad .$$

Remarque. - Si M est un Λ-module noethérien, 0 est intersection d'un nombre fini de sous-modules irréductibles.

PROPOSITION 4. - Soit Λ un anneau noethérien à gauche ; tout Λ-module injectif M est somme directe de sous-modules injectifs indécomposables.

Soit C un sous-module maximal, somme directe de sous-modules injectifs indécomposables. Alors $C = M$; sinon, il existe $x \in P$, $x \notin C$; soit $O(X)$ annulateur de x , Λ noethérien, par suite, $O(x) = X_1 \cap \ldots \cap X_n$, où les X_i sont des idéaux irréductibles de Λ , $O(X)$ n'étant intersection d'aucune sous-famille des X_i .

$$E(\Lambda/O(X)) = E(\Lambda x) = E(\Lambda/X_1) \otimes \ldots \otimes E(\Lambda/X_n)$$

le sous-module de M , $C \otimes E(\Lambda/X_1) \otimes \ldots \otimes E(\Lambda/X_n)$ est somme directe de modules injectifs indécomposables, ce qui contredit le caractère maximal de C .

2. Le théorème d'Azumaya.

THÉORÈME. - La décomposition d'un module M en somme directe de sous-modules injectifs et indécomposables est unique à un automorphisme près de M .

Soit

$$M = \bigotimes_{i \in I} M_i$$

une telle décomposition ; on va prouver que tout sous-module N injectif indécomposable est isomorphe à un M_i ,

$$M = N \otimes P \quad .$$

Soient f et f' les applications canoniques de M dans N et P . On a

$$1 = f + f' \ , \quad f \circ f' = f' \circ f = 0 \quad .$$

Il existe $i_1 , \ldots , i_s \in I$ tel que

$$N \cap M_{i_1} \otimes \ldots \otimes M_{i_s} \neq 0 \quad .$$

LEMME. - Soit A un anneau des endomorphismes de M , f , $f' \in A$ tels que $f + f' = 1$. Alors, pour tout système d'indices fini $i_1 , \ldots , i_s$, il existe des sous-modules $P_1 , \ldots , P_s$ tels que :

a. Pour tout k , f ou f' induise un isomorphisme de $M_k \to P_k$.

b. $M = P_1 \otimes \dots \otimes P_s \otimes (\bigotimes_{i \neq i_k} M_i)$.

Soit $\ell i_1 : M \to M_{i_1}$ la projection de M sur M_{i_1} parallèlement aux autres facteurs.

$$\ell i_1 = \ell i_1 \circ f + \ell i_1 \circ f' \quad ,$$

et, par suite,

$$\ell i_1 \circ f \text{ ou } \ell i_1 \circ f'$$

induit un isomorphisme sur M_{i_1} . Supposons que $\ell i_1 \circ f$ induit cet isomorphisme

$$P_1 = f(M_{i_1}) \cong M_{i_1}$$

et ℓi_1 induit un isomorphisme de P_1 sur M_i

$$\operatorname{Ker} \ell i_1 = \bigotimes_{i \neq i_1} M_i \quad ,$$

par suite,

$$M = P_1 \otimes (\bigotimes_{i \neq i_1} M_{i_1}) \quad ;$$

en itérant le procédé, on obtient le résultat.

Appliquons le lemme à la situation précédente. f' annule $N \cap M_{i_1} \otimes \dots \otimes M_{i_s}$ et, par suite, ne peut définir un isomorphisme de $M_{i_1} \otimes \dots \otimes M_{i_s}$ sur $P_{i_1} \otimes \dots \otimes P_{i_s}$; on en conclut que, pour au moins un k , f est un isomorphisme. $M_{i_k} \to P_k$; N étant un module injectif indécomposable, il s'en suit $P_k = N$.

Montrons l'unicité de cette décomposition à un automorphisme près de M . Soit $M = \bigotimes_{j \in J} N_j$ une autre décomposition de M en somme directe de sous-modules injectifs et indécomposables, d'après ce qui précéde, tout N_j est isomorphe à un M_i , et réciproquement tout M_i est isomorphe à un N_j .

Deux indices de I (resp. J) seront dits équivalents s'ils définissent des sous-modules isomorphes. Les classes de I et de J se correspondent biunivoquement, et on notera K, l'ensemble de ces classes ; tout $k \in K$ définit une classe $[I(k), J(k)]$, tout revient à prouver que $\mathrm{card}\, I(k) = \mathrm{card}[J(k)]$.

α. $\mathrm{card}[I(k)]$ fini. - Soient $j_1 \in J(k)$ et f_1 la projection de M sur N_{j_1} ; en utilisant ce qui précède, il existe $i_1 \in I$ tel que f_1 soit un isomorphisme de M_{i_1} sur N_{j_1} et on a

$$M = M_{i_1} \oplus \left(\bigotimes_{j \neq j_1} N_j\right) \qquad (1)$$

Si j_1 est le seul élément de $j(k)$, on a

$$\mathrm{card}[I(k)] \geqslant \mathrm{card}[J(k)]$$

d'où l'égalité ; sinon, on recommence l'opération. D'où, finalement,

$$\mathrm{card}[I(k)] \geqslant \mathrm{card}[J(k)]$$

et, par suite,

$$\mathrm{card}[I(k)] = \mathrm{card}[J(k)] \quad .$$

β. $\mathrm{card}[I(k)]$ infini. - Soit f_j la projection de M sur N_j, parallèlement aux autres facteurs.

$$M_i = \sup_J \left(M_i \cap \bigotimes_{j \in L} N_j\right)$$

où L parcourt les familles finies de J. Par suite, $M_i \cap \mathrm{Ker}\, f_j = 0$ pour un nombre fini de j ; pour tout i, il existe un nombre fini de j tel que f_j soit un isomorphisme de M_i sur N_j ; soit $j(i) = \{j\}$ cet ensemble. Quand i parcourt $i(k)$, les $j(i)$ recouvrent $j(k)$. $\mathrm{card}[I(k)]$ infini, par suite,

$$\mathrm{card}[I(k)] \geqslant \mathrm{card}[J(k)] \quad .$$

3. Modules isotypiques.

DÉFINITION 2. - On dit que X est un sous-module isotypique de M, si $E(M/X)$ est somme directe de sous-modules injectifs indécomposables tous isomorphes.

Remarque. - $E(M/X)$ est isotypique au sens de N. BOURBAKI.

Soit I un sous-module isotypique "dont les composantes" sont isomorphes à π, module injectif indécomposable. π est le type de I, on dit que I est π-isotypique.

PROPOSITION 5. - L'intersection de deux sous-modules π-isotypiques est un sous-module π-isotypique.

$X = X_1 \cap X_2$, $E(M/X) \subset E(M/X_1) \otimes E(M/X_2)$ et $E(M/X)$ est facteur direct de $E(M/X_1) \otimes E(M/X_2)$; le théorème d'Azumaya entraîne la propriété.

Cette propriété permet, dans une décomposition comme intersection de sous-modules isotypiques, de rassembler les sous-modules de même type. On obtient ainsi une décomposition réduite, c'est-à-dire une décomposition comme intersection de sous-modules isotypiques de types tous différents sans élément superflu.

PROPOSITION 6. - Tout sous-module d'un module artinien ou noethérien admet une décomposition réduite comme intersection de sous-modules isotypiques. Soient deux décompositions de X

$$X = I_1 \cap \cdots \cap I_n = I'_1 \cap \cdots \cap I'_{n'} \quad ,$$

alors $n = n'$ et les types des I_i sont les mêmes que ceux des I'_j .

Ces propriétés sont les conséquences des théorèmes précédents.

4. Applications aux anneaux commutatifs.

THÉORÈME 2. - Soit A un anneau commutatif noethérien, il y a correspondance biunivoque entre les idéaux primaires de A et les modules injectifs indécomposables. $P \leftrightarrow E(A/P)$ si Q est un idéal irréductible P-primaire, alors

$$E(R/Q) \simeq E(R/P) \quad .$$

Soit P un idéal premier de A ; alors P est irréductible et, par suite, $E(A/P)$ est un A-module injectif et indécomposable. Soient P_1 et P_2 deux idéaux premiers tels que $E(A/P_1) \simeq E(A/P_2) = E$. On plonge A/P_1 et A/P_2 dans E , et on a $A/P_1 \cap A/P_2 \neq 0$; c'est un sous-module qui a pour annulateur P_1 et P_2 ; par suite $P_1 = P_2$.

Soit Q un idéal irréductible P-primaire ; il existe n tel que $P^n \subset Q$, n étant le plus petit entier tel que P^n a la propriété. Il existe $b \in P^{n-1}$, $b \notin Q$; soit $\overline{b}$ l'image de b dans A/Q . Soit $O(\overline{b})$ l'annulateur de $\overline{b}$; il est clair que $O(\overline{b}) \supset P$. D'autre part, $a \in O(\overline{b})$. Alors $ab \in Q$ et, par suite, $a \in P$; d'où finalement

$$O(\overline{b}) = P \quad .$$

$$E(A/Q) \simeq E(A/P) \quad .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] CARTAN (H.) and EILENBERG (S.). - Homological algebra. - Princeton, University Press, 1956 (Princeton mathematical Series, 19).

[2] ECKMANN (B.) und SCHOPF (A.). - Über injektive Moduln, Archiv der Math., t. 4, 1953, p. 75-78.

[3] GABRIEL (Pierre). - Objets injectifs dans les catégories abéliennes, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et théorie des nombres, t. 12, 1958/59, n° 17, 32 p.

[4] GABRIEL (Pierre). - Des catégories abéliennes, Bull. Soc. math. France, t. 90, 1962 [à paraître] (Thèse Sc. math. Paris. 1961).

[5] MATLIS (Eben). - Injective modules over noetherian rings, Pacific J. Math., t. 8, 1958, p. 511-528.