Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres

GÉRARD MATTENET

Sur les quasi-groupes

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 15, n° 2 (1961-1962), exp. n° 12, p. 1-28

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1961-1962__15_2_A1_0>

SUR LES QUASI-GROUPES

par Gérard MATTENET

Introduction. - Dans la littérature publiée à présent, l'étude des relations d'équivalence régulières et simplifiables dans les groupes, boucles, quasi-groupes, a un aspect disparate. Elle est surtout liée à la propriété d'équivalences d'homomorphismes.

Or, ces équivalences sont également des équivalences d'imprimitivité pour un groupe de bijections convenable du quasi-groupe (groupe associé). La définition du groupe associé est liée de façon directe aux axiomes de définition du quasi-groupe de sorte que les propriétés des équivalences considérées sont en fait des propriétés de théorie des ensembles. Ce point de vue met en évidence le caractère fortuit de la présence d'un élément-unité dans un quasi-groupe (bien qu'en réalité on puisse définir sur un quasi-groupe des lois qui font du même ensemble une boucle admettant pour élément-unité un élément quelconque). Les propriétés, obtenues pour les boucles, se généralisent sans difficulté aux quasi-groupes à idempotents. Le point de vue adopté permet d'introduire naturellement ceux-ci, et montre qu'on ne peut généraliser au-delà.

Un second aspect des équivalences considérées est d'être des équivalences de transitivité du quasi-groupe définies par les sous-groupes distingués du groupe associé. Cet aspect a été signalé par ALBERT dans [1]. En réalité, il permet de munir naturellement l'ensemble des sous-quasi-groupes normaux de sa structure de treillis complet. Ici, également, les propriétés principales sont des propriétés ensemblistes.

I. Relations d'équivalence régulières et simplifiables dans un quasi-groupe en tant qu'équivalences d'imprimitivité pour le groupe associé.

1. Espaces homogènes. Relations d'imprimitivité.

Les notions de théorie des ensembles, rassemblées ici, se trouvent dans [2].

DÉFINITION 1. - On appelle espace homogène un ensemble E muni d'un groupe d'opérateurs G qui opère transitivement dans E .

Les groupes d'opérateurs qui interviendront seront, en général, des groupes transitifs de bijections de E. La structure d'espace homogène est définie par la loi externe :

$$G \times E \to E \quad ,$$
$$(\sigma , x) \to \sigma(x) \quad .$$

Un groupe quelconque G est muni d'une structure d'espace homogène canonique, dont G est lui-même le groupe d'opérateurs, le groupe transitif de bijections de G étant le groupe de ses translations à gauche.

DÉFINITION 2. - <u>On appelle équivalence d'imprimitivité d'un espace homogène</u> E, <u>les relations d'équivalence compatibles avec la structure homogène de</u> E.

Ce sont donc les relations d'équivalences R sur E, telles que :

$$x , y \in E \; ; \quad x R y \; ; \quad \sigma \in G \implies \sigma(x) \, R \, \sigma(y) \quad .$$

Si A est la classe d'imprimitivité de $a \in A$, la classe d'imprimitivité de $\sigma(a)$ est alors σA.

Les relations d'imprimitivité de l'espace homogène G sont les relations d'équivalence sur G, régulières à gauche.

Par suite, si H est un sous-groupe de G, l'ensemble des classes à gauche modulo H est un espace homogène G/H pour la loi-quotient par la relation d'équivalence $\beta \in \alpha H$ de la loi externe canonique de G,

$$G \times \frac{G}{H} \to \frac{G}{H}$$
$$(\beta , u) \to \beta\alpha H \qquad \forall \; \alpha \in u \quad .$$

THÉORÈME 1. - <u>Soient</u> E <u>un espace homogène,</u> G <u>le groupe des opérateurs de</u> E, a <u>un élément de</u> E, H_a <u>le sous-groupe de</u> G <u>formé des opérateurs</u> α <u>de</u> G <u>laissant invariant</u> a.

<u>Alors, l'espace homogène</u> E <u>est isomorphe à l'espace homogène</u> G/H_a <u>défini par le sous-groupe</u> H_a <u>de</u> G.

En effet, soit φ_a l'application de G sur E, définie par :

$$\varphi_a(\alpha) = \alpha(a) \qquad \forall \; \alpha \in G \quad .$$

φ_a est un homomorphisme de l'espace homogène G sur l'espace homogène E dont le noyau est H_a.

Remarque. - Soient a, $b \in E$; il existe alors $\beta \in G$ tel que $b = \beta a$. H_b est alors image de H_a par l'automorphisme intérieur de G défini par β :

$$H_b = \beta H_a \beta^{-1} \quad .$$

PROPOSITION 1. - Toute structure-quotient d'un espace homogène G/H défini par un sous-groupe H d'un groupe G est isomorphe à celle d'un espace homogène G/K où K est un sous-groupe de G contenant H.

Réciproquement, tout sous-groupe K contenant H définit une structure-quotient de G/H.

Cette proposition, démontrée dans [1], § 7, signifie que φ_a établit une correspondance bijective entre les relations d'équivalence de G régulière à gauche, contenant l'équivalence d'application φ_a (équivalence régulière à gauche de G de classe unité H_a) et les équivalences d'imprimitivité de l'espace homogène E.

Pour ce qui suit, nous en retiendrons l'aspect suivant.

PROPOSITION 1'. - Pour tout $a \in E$, φ_a établit une bijection de l'ensemble $\mathcal{H}_a$ des sous-groupes de G contenant H_a et l'ensemble $\mathcal{U}_a$ des classes d'imprimitivité de E contenant a. Si $U_a \in \mathcal{U}_a$, $\varphi_a^{-1}(U_a)$ est l'ensemble des bijections de G qui laissent invariantes U_a.

Remarque. - Dans cet exposé, la propriété : un complexe E d'un ensemble F est stable par une bijection α de B, signifie $\alpha(E) = E$. On dira aussi invariant.

2. Groupes associés à un quasi-groupe.

Ce paragraphe est destiné à l'étude des relations d'équivalence régulières et simplifiables d'un quasi-groupe en tant qu'équivalences d'imprimitivité pour une structure homogène convenable d'un quasi-groupe. On retrouve alors, comme conséquences naturelles du paragraphe 1, les résultats classiques tels qu'ils figurent dans [3] pour les boucles. Simultanément, s'introduit, de façon assez naturelle, le groupe des bijections intérieures de la boucle (voir également [3]).

En outre, comme P. DUBREIL l'a fait dans son cours d'Algèbre (1961/1962) pour les boucles, on étudie les relations d'équivalence régulières et simplifiables d'un côté dans un quasi-groupe, par les mêmes méthodes.

DÉFINITION 3.

1° On appelle quasi-groupe B, un ensemble muni d'une loi de composition interne satisfaisant à l'axiome suivant :

(i) Les translations de B sont des bijections de B.

2° On appelle boucle B, un quasi-groupe possédant un élément unité (noté e); (i) est équivalent à l'axiome suivant :

(ii) $\forall\ x , y \in B$, il existe un quotient à gauche et un seul z et un quotient à droite et un seul t de y par x :

$$y = zx = xt \quad .$$

PROPOSITION 2. - Soient B un quasi-groupe, $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence dans B. Alors les propriétés (i) et (ii) sont équivalentes pour $i \in \{1 , 2 , 3 , 4\}$.

(1) $\mathcal{R}$ régulière à gauche (1') L_x compatible avec $\mathcal{R}$, $\forall\ x \in B$;

(2) $\mathcal{R}$ régulière à droite (2') R_x compatible avec $\mathcal{R}$, $\forall\ x \in B$;

(3) $\mathcal{R}$ simplifiable à gauche (3') $(L_x)^{-1}$ compatible avec $\mathcal{R}$, $\forall\ x \in B$;

(4) $\mathcal{R}$ simplifiable à droite (4') $(R_x)^{-1}$ compatible avec $\mathcal{R}$, $\forall\ x \in B$.

L_x désigne la translation à gauche définie par $x \in B$.

$$L_x(y) = xy \qquad \forall\ y \in B \quad .$$

R_x désigne la translation à droite définie par $x \in B$,

$$R_x(y) = yx \qquad \forall\ y \in B \quad .$$

(i) $\Leftrightarrow$ (ii), pour $i = 1 , 2$, est immédiate.

Bornons-nous à montrer l'équivalence entre (4) et (4').

Supposons que (4) ait lieu. Soient $y \mathcal{R} z$ et $x \in B$. On a

$$y = (R_x R_x^{-1})(y) = R_x^{-1}(y).x \quad ;$$

donc

$$R_x^{-1}(y).x \,\mathcal{R}\, R_x^{-1}(z).x \quad ;$$

et, d'après (4),

$$R_x^{-1}(y) \,\mathcal{R}\, R_x^{-1}(z) \qquad \forall\ x \in B \quad ,$$

d'où (4').

Supposons que (4') ait lieu. Soit $xz \mathcal{R} yz$. On a donc aussi :

$$R_z^{-1}(xz) \mathcal{R} R_z^{-1}(yz) \quad ;$$

or

$$R_z^{-1}(xz) = R_z^{-1}(R_z(x)) = x \quad ,$$

d'où $x \mathcal{R} y$, et $\mathcal{R}$ est donc simplifiable à droite.

DÉFINITION 4. - *On appelle groupe associé à droite* G_ρ *(resp. à gauche* G_λ *) d'un quasi-groupe* B *, le groupe de bijections de* B *engendré par les translations à droite (resp. à gauche) de* B .

On appelle groupe associé G *de* B *, le groupe de bijections de* B *engendré par les translations de* B .

THÉORÈME 2. - *Soit* B *un quasi-groupe.*

Les relations d'équivalence RS *à droite (resp. à gauche) de* B *sont les équivalences d'imprimitivité de* B *pour la structure homogène défini par son groupe associé à droite* G_ρ *(resp. à gauche* G_λ *).*

Les relations d'équivalence RS *d'un quasi-groupe* B *sont les équivalences d'imprimitivité de la structure homogène de* B *défini par son groupe associé* G.

D'après la proposition 2, il suffit de vérifier que G_ρ et G_λ opèrent transitivement sur B ; or, si x et $y \in B$, il existe z et $t \in B$ tels que

$$x = yz = ty \quad .$$

Soient

$$x = R_z(y) = L_t(y) \quad \text{et} \quad R_z \in G_\rho \, , \quad L_t \in G_\lambda \quad .$$

PROPOSITION 3. - *Soit* B *un quasi-groupe.*

Soient $a \in B$ *et* $(\mathfrak{J}_a)_\rho$ *(resp.* $(\mathfrak{J}_a)_\lambda$ *) le sous-groupe de* G_ρ *(resp.* G_λ *) composé des bijections droites (resp. gauches) laissant invariant* a .

Tout élément α *de* G_ρ *(resp.* G_λ *) se représente de façon unique sous la forme :*

$$\alpha = R_{u_a} \theta_a \quad \underline{\text{où}} \quad \theta_a \in (\mathfrak{J}_a)_\rho \quad \underline{\text{et}} \quad u_a = L_a^{-1} \alpha(a)$$

$$(\underline{\text{resp.}} \quad \alpha = L_{u_a} \theta_a \quad \underline{\text{où}} \quad \theta_a \in (\mathfrak{J}_a)_\lambda \quad \underline{\text{et}} \quad u_a = R_a^{-1} \alpha(a) \;) \quad .$$

Tout élément α de G se représente de façon unique sous ses deux formes

$$\alpha = R_{u_a}\,\theta_a = L_{v_a}\,\theta'_a \quad \text{avec} \quad u_a = L_a^{-1}\alpha(a)\ ,\quad v_a = R_a^{-1}\alpha(a)\ ,\quad \theta_a\ ,\ \theta'_a \in \mathfrak{J}_a \quad .$$

$\mathfrak{J}_a$ étant le sous-groupe de G laissant invariant a.

Démonstration. – Soit φ_a l'application de G sur B définie par :

$$\varphi_a(\alpha) = \alpha(a) \quad .$$

La classe de $\alpha \in G_\rho$ modulo l'équivalence d'application $\varphi_a | G_\rho$ de G_ρ sur B est :

$$\{\beta \in G_\rho \ :\ \beta(a) = \alpha(a)\} \quad .$$

La translation à droite R_u appartient donc à cette classe si et seulement si

$$au = R_u(a) = \alpha(a) \quad ;$$

d'où

$$u = L_a^{-1}\alpha(a) = u_a \quad .$$

L'équivalence considérée est, d'autre part, régulière à gauche, et a pour classe unité le sous-groupe $(\mathfrak{J}_a)_\rho$. La classe de α est donc :

$$R_{u_a}(\mathfrak{J}_a)_\rho \quad ;$$

d'où l'existence de la représentation, son unicité résultant de ce que toute classe à gauche de G_ρ modulo $(\mathfrak{J}_a)_\rho$ contient une seule translation à droite.

Démonstration analogue pour G_λ, d'où le résultat pour G.

PROPOSITION 4. – Soit B un quasi-groupe.

a. Pour qu'un complexe E_ρ (resp. E_λ) de B soit une classe d'imprimitivité de la structure homogène droite de B pour G_ρ (resp. gauche de B pour G_λ), il faut et il suffit qu'il existe $a \in E_\rho$ (resp. E_λ) tel que E_ρ (resp. E_λ) soit stable par les translations à droite (resp. à gauche) définies par les éléments de $L_a^{-1}(E_\rho) = F_\rho$ (resp. $F_\lambda = R_a^{-1}(E_\lambda)$) et les bijections droites (resp. gauches) de G_ρ (resp. G_λ) qui laissent invariant a.

b. S'il en est ainsi, le sous-groupe de G_ρ (resp. G_λ) des bijections droites resp. gauches) qui laissent stable E_ρ (resp. E_λ) est, pour tout $a \in E_\rho$ (resp. E_λ),

$$\varphi_a^{-1}(E_\rho) = \bigcup_{u \in F_\rho} R_u(\mathfrak{J}_a)_\rho \quad ,$$

$$(\text{resp. } \varphi_a^{-1}(E_\lambda) = \bigcup_{v \in F_\lambda} L_v(\mathfrak{J}_a)_\lambda\ ) \quad .$$

Pour tout a , $b \in E_\rho$ (resp. E_λ), on a

$$F_\rho = L_a^{-1}(E_\rho) = L_b^{-1}(E_\rho) \quad ,$$

$$(\text{resp. } F_\lambda = R_a^{-1}(E_\lambda) = R_b^{-1}(E_\lambda) \quad .$$

Démonstration. - Soit E_ρ une classe d'imprimitivité droite de B ; et soit $a \in E_\rho$. Alors, d'après la proposition 1', le sous-groupe de G_ρ composé des bijections droites qui laissent stable E_ρ (c'est-à-dire : $\{\alpha \in G_\rho : \alpha E_\rho = E_\rho\}$ est

$$\varphi_a^{-1}(E_\rho) \quad .$$

Une translation à droite R_u laisse donc stable E_ρ si et seulement si

$$au = R_u(a) \in E_\rho \quad \text{c'est-à-dire si} \quad u \in L_a^{-1}(E_\rho) = E_\rho \mathbin{.^{\bullet}} a$$

d'après 1',

$$\varphi_a^{-1}(E_\rho) \supset (\mathfrak{J}_a)_\rho \quad .$$

Donc

$$\varphi_a^{-1}(E_\rho) \supset \bigcup_{u \in L_a^{-1}(E_\rho)} R_u(\mathfrak{J}_a)_\rho \quad .$$

Réciproquement, si $\alpha \in \varphi_a^{-1}(E_\rho)$, d'après la proposition 3,

$$\alpha = R_{u_a}\,\theta_a \quad \text{où} \quad \theta_a \in (\mathfrak{J}_a)_\rho \quad \text{et} \quad u_a = L_a^{-1}\alpha(a) \in L_a^{-1}(E_\rho) \quad ;$$

donc

$$\varphi_a^{-1}(E_\rho) = \bigcup_{u \in L_a^{-1}(F_\rho)} R_u(\mathfrak{J}_a)_\rho \quad .$$

Comme $L_a^{-1}(E_\rho)$ est, pour tout $a \in E_\rho$, l'ensemble des éléments u de B , tels que $R_u(E_\rho) = E_\rho$, il en résulte

$$L_a^{-1}(E_\rho) = L_b^{-1}(E_\rho) \qquad \forall\ a\ , b \in E_\rho \quad ,$$

d'où (b) et la condition nécessaire de (a).

Réciproquement, soit E_ρ un complexe de B tel qu'il existe $a \in E_\rho$, pour lequel E_ρ est stable par les translations à droites définies par les éléments de E_ρ et les éléments de $(\mathfrak{I}_a)_\rho$. Alors $\varphi_a^{-1}(E_\rho)$ est un sous-groupe de G_ρ : H_ρ.

En effet, soient β, $\gamma \in \varphi_a^{-1}(E_\rho) = H_\rho$, alors,

$$x = \beta(a) = \varphi_a(\beta) \in E_\rho \qquad ,$$

et

$$y = L_a^{-1}\ \gamma(a) \in L_a^{-1}(E_\rho) \qquad .$$

Et d'après la proposition 3,

$$\gamma = R_y\ \alpha \quad \text{où} \quad \alpha \in (\mathfrak{I}_a)_\rho \qquad ,$$

donc

$$\gamma^{-1}\ \beta(a) = \alpha^{-1}[R_y^{-1}(x)] \in E_\rho \qquad ,$$

puisque

$$R_y(E_\rho) = E_\rho \qquad \forall\ y \in L_a^{-1}(E_\rho) \qquad ,$$

donc

$$\gamma^{-1}\ \beta \in H_\rho \qquad .$$

En outre, H_ρ contient $(\mathfrak{I}_a)_\rho$; donc, d'après la proposition 1' :

$E_\rho = \varphi_a(H_\rho)$ est une classe d'imprimitivité de la structure homogène droite de B pour G_ρ.

THÉORÈME 3. - Soit B un quasi-groupe contenant au moins un idempotent. Soit a un idempotent de B.

Alors toute classe d'imprimitivité de B pour G, contenant a, est un sous-quasi-groupe de B, stable par les éléments de G qui laissent invariant a et réciproquement. Si B est une boucle d'élément unité e, les classes d'imprimitivité droites de B pour G_ρ (resp. de B pour G_λ) contenant e sont les sous-boucles de B stable par les éléments de G_ρ (resp. de G_λ) qui laissent invariant a.

Démonstration. - En effet, on a des résultats analogues à ceux de la proposition 4 pour les classes d'imprimitivité E de la structure homogène de B pour G en remplaçant :

- dans la partie (a) : "resp." par "ou",
- dans la partie (b) : "resp." par "et",
- dans toute la proposition : G_ρ et G_λ par G, E_ρ et E_λ par E, $(\mathfrak{J}_a)_\rho$ et $(\mathfrak{J}_a)_\lambda$ par $\mathfrak{J}_a$.

Donc si B est un quasi-groupe contenant un idempotent a, on a

$$a\, L_a^{-1}(a) = a = a^2 \quad , \quad \text{d'où} \quad L_a^{-1}(a) = a = R_a^{-1}(a) \quad .$$

$L_a^{-1}(E)$ et $R_a^{-1}(E)$, étant alors les classes d'imprimitivité de la structure homogène de B pour G contenant $L_a^{-1}(a) = R_a^{-1}(a) = a$, sont identiques à E, si E est une telle classe contenant a

$$F_\rho = F_\lambda = E \quad :$$

Il résulte alors de la proposition 4 (b), que E, étant un complexe de B stable par les translations définies par les éléments de E, est un sous-quasi-groupe de B.

Si B est une boucle d'élément unité e, e est son seul idempotent et les classes d'imprimitivité de B pour G contenant e, sont alors les sous-boucles de E stables par les éléments de $\mathfrak{J}_e$. En outre, $L_e^{-1}(E_\rho) = E_\rho$. Donc les classes d'imprimitivité droite de B pour G_ρ sont les complexes E_ρ stables par les éléments de $(\mathfrak{J}_e)_\rho$ et par les translations à droite de E_ρ. Montrons que tout complexe E_ρ vérifiant une telle condition est une sous-boucle, c'est-à-dire est également stable par les translations à gauche de E_ρ.

D'après la proposition 4 (b), on a

$$L_a^{-1}(E_\rho) = L_b^{-1}(E_\rho) \qquad \forall\ a\ , b \in E_\rho \qquad ,$$

c'est-à-dire que toute classe d'imprimitivité droite de B est stable par les $L_b L_a^{-1}$ où a, $b \in E_\rho$.

Donc, si B est une boucle et si $a = e$, il en résulte que E_ρ est stable par les translations gauches

$$L_b = L_b\, L_e^{-1} \qquad ,$$

définies par les éléments b de E_ρ.

<u>Remarque</u>. - Si B est un quasi-groupe quelconque, une condition nécessaire et suffisante, pour qu'une classe d'imprimitivité E de B pour G soit un sous-quasi-groupe de B, est qu'il existe $a \in E$ tel que $L_a^{-1}(a) \in E$.

En effet, si $L_a^{-1}(a) \in E$, $L_a^{-1}(E)$, classe d'imprimitivité de $L_a^{-1}(a)$, est identique à E. D'après la proposition 4 (a), E est alors stable par les translations à droites définies par les éléments de $L_a^{-1}(E) = E$. D'après la proposition 4 (b), on a, pour tout $x \in E$,

$$L_x^{-1}(E) = L_a^{-1}(E) = E \qquad ,$$

donc E est également stable pour les translations à gauche définies par les éléments de E et par conséquent, est un sous-quasi-groupe de B.

De façon analogue, une condition nécessaire et suffisante, pour qu'une classe d'imprimitivité E de B pour G soit un sous-quasi-groupe de B, est qu'il existe $a \in E$ tel que $R_a^{-1}(a) \in E$.

Le théorème 3 peut alors être partiellement généralisé de la façon suivante :

Un sous-quasi-groupe E de B est une classe d'imprimitivité de B pour G si et seulement s'il contient un élément a tel que l'on ait

$$\alpha(E) = E \qquad \forall \ \alpha \in \mathfrak{J}_a \qquad .$$

Ces résultats sont signalés dans [3] (page 90), et exposés de façon différente dans [5].

Soient B un quasi-groupe et a un élément de B.

Si x et $y \in B$, on a, d'une part

$$xy = R_y(x) = R_y[a\, L_a^{-1}(x)] = R_y\, R_{L_a^{-1}(x)}(a) \qquad ,$$

d'autre part,

$$xy = a\, L_a^{-1}(xy) = R_{L_a^{-1}(xy)}(a) \qquad .$$

Il en résulte que la bijection droite,

$$R_{x,y}^a = R^{-1}_{L_a^{-1}(xy)}\, R_y\, R_{L_a^{-1}(x)} \in (\mathfrak{J}_a)_\rho \qquad .$$

De même, la bijection gauche

$$L_{x,y}^a = L^{-1}_{R_a^{-1}(yx)}\, L_y\, L_{R_a^{-1}(x)} \in (\mathfrak{J}_a)_\lambda \qquad .$$

Nous allons montrer que les bijections droites $R^a_{x,y}$ constituent un système de générateurs de $(\mathfrak{I}_a)_\rho$ et les bijections gauches $L^a_{x,y}$ de $(\mathfrak{I}_a)_\lambda$ lorsque x et y décrivent B.

LEMME. - Soient $x, y \in B$ et $a \in B$, B quasi-groupe. On a alors :

(1) $R_y R_{L_a^{-1}(x)} = R_{L_a^{-1}(R_y(x))} R^a_{x,y}$,

(1') $R_y^{-1} R_{L_a^{-1}(x)} = R_u (R^a_{au,y})^{-1}$ avec $u = L_a^{-1} R_y^{-1}(x)$,

(2) $L_y L_{R_a^{-1}(x)} = L_{R_a^{-1}(L_y(x))} L^a_{x,y}$,

(2') $L_y^{-1} L_{R_a^{-1}(x)} = L_v (L^a_{va,y})^{-1}$ avec $v = R_a^{-1} L_y^{-1}(x)$.

(1) et (2) sont immédiats.

Si $u = L_a^{-1} R_y^{-1}(x)$, on a $(au)y = x$, donc

$$R^a_{au,y} = R^{-1}_{L_a^{-1}(x)} R_y R_{L_a^{-1}(au)} = R^{-1}_{L_a^{-1}(x)} R_y R_u$$

d'où (1').

De même, si $v = R_a^{-1} L_y^{-1}(x)$, on a $y(va) = x$, donc :

$$L^a_{va,y} = L^{-1}_{R_a^{-1}(x)} L_y L_{R_a^{-1}(va)} = L^{-1}_{R_a^{-1}(x)} L_y L_v$$

d'où (2').

PROPOSITION 5. - Soit B un quasi-groupe.

Pour tout $a \in B$, le sous-groupe $(\mathfrak{I}_a)_\rho$ de G_ρ (resp. $(\mathfrak{I}_a)_\lambda$ de G_λ), composé des bijections droites (resp. gauches) laissant invariant a, est engendré par les $R^a_{x,y}$ (resp. $L^a_{x,y}$) où x et y décrivent B.

Soit $I_\rho = \{\alpha \in G_\rho : \alpha \in R_{L_a^{-1}\alpha(a)} H^a_\rho\}$, où H^a_ρ est le sous-groupe de $(\mathfrak{I}_a)_\rho$ engendré par les bijections droites $R^a_{x,y}$.

D'après les formules (1) et (1'), où $x = \alpha(a)$, I_ρ est un idéal à gauche de G_ρ non vide, puisque $R^a_{\alpha(a),y} \in H^a_\rho$ et $R^a_{au,y} \in H^a_\rho$.

Donc $I_\rho = G_\rho$.

Par suite, si $\alpha \in (\mathfrak{J}_a)_\rho$, on a

$$\alpha(a) = a \quad \text{et} \quad \alpha \in R_{L_a^{-1}(a)} H^a_\rho \quad .$$

Donc

$$(\mathfrak{J}_a)_\rho = R_{L_a^{-1}(a)} H^a_\rho \quad .$$

Comme $R_{L_a^{-1}(a)}(a) = aL_a^{-1}(a) = a$,

$$R_{L_a^{-1}(a)} \in (\mathfrak{J}_a)_\rho$$

d'où

$$(\mathfrak{J}_a) = H^a_\rho \quad .$$

De même, pour tout $a \in B$ et $x \in B$, on pose

$$T^a_x = (L_{R_a^{-1}(x)})^{-1} R_{L_a^{-1}(x)} \quad .$$

PROPOSITION 5'. - <u>Soit</u> B <u>un quasi-groupe</u>.

<u>Pour tout</u> $a \in B$, <u>le sous-groupe</u> $\mathfrak{J}_a$ <u>de</u> G , <u>composé des bijections de</u> G <u>laissant invariant</u> a , <u>est engendré par les</u> $R^a_{x,y}$, $L^a_{x,y}$ et T^a_x <u>où</u> x <u>et</u> y <u>décrivent</u> B .

Soient

$$I_\rho = \{\alpha \in G \ : \ \alpha \in R_{L_a^{-1}\alpha(a)} H^a\}$$

$$I_\lambda = \{\alpha \in G \ : \ \alpha \in L_{R_a^{-1}\alpha(a)} H^a\}$$

où H^a est le sous-groupe de $\mathfrak{J}_a$ engendré par les $R^a_{x,y}$, $L^a_{x,y}$ et T^a_x .

On a $I_\rho = I_\lambda = I$; en effet,

$$R_{L_a^{-1}\alpha(a)} = L_{R_a^{-1}\alpha(a)}\, T^a_{\alpha(a)} \quad \text{où} \quad T^a_{\alpha(a)} \in H^a \quad .$$

Donc $I_\rho \subset I_\lambda$. De même, $I_\lambda \subset I_\rho$. D'après les formules (1) et (1'), $I = I_\rho$ est stable par multiplication à gauche par les translations à droite et leurs inverses. D'après les formules (2) et (2'), $I = I_\lambda$ est stable par multiplication à gauche par les translations à gauche et leurs inverses.

Comme tout élément de G est produit de translations et d'inverses de translations, I est donc un idéal à gauche non vide de G , donc $I = G$.

Si $\alpha \in \mathfrak{J}_a$, on a donc $\alpha(a) = a$, d'où :

$$\alpha \in R_{L_a^{-1}(a)}\, H^a \quad ;$$

donc

$$\mathfrak{J}_a = R_{L_a^{-1}(a)}\, H^a \quad \text{puisque} \quad R_{L_a^{-1}(a)} \in \mathfrak{J}_a \quad ,$$

d'où

$$H^a = \mathfrak{J}_a \quad .$$

Les propositions 5 et 5', pour $a = e$, donnent le théorème 5 pour une boucle B d'élément unité.

COROLLAIRE. - Soit B un quasi-groupe contenant au moins un idempotent a .

Alors la condition nécessaire et suffisante pour qu'un complexe E de B , contenant a , soit une classe d'imprimitivité de la structure homogène de B pour le groupe associé G , est que E soit un sous-quasi-groupe de B vérifiant :

(I) $$EL_a^{-1}(xy) = [EL_a^{-1}(x)]\, y \qquad \forall \; x , y \in B \quad ,$$

(I') $$R_a^{-1}(yx)\, E = y[R_a^{-1}(x)\, E] \qquad \forall \; x , y \in B \quad ,$$

(II) $$R_a^{-1}(x)\, E = EL_a^{-1}(x) \qquad \forall \; x \in B \quad .$$

Ces trois conditions entraînent la relation :

$$[R_a^{-1}(x)\, E]\, y = x[EL_a^{-1}(y)] \qquad \forall \; x , y \in B \quad .$$

En effet :

$$[R_a^{-1}(x)\, E]\, y = [EL_a^{-1}(x)]\, y = EL_a^{-1}(xy) = R_a^{-1}(xy)\, E = x[R_a^{-1}(y)\, E] = x[EL_a^{-1}(y)] \quad .$$

<u>Remarque</u> 1. - Soient B un quasi-groupe quelconque, b et c des éléments quelconques de B .

Alors B , munie de la loi de composition : $\times$

$$x \times y = R_c^{-1}(x).L_b^{-1}(y) \qquad ,$$

est une boucle d'élément unité bc .

La translation à gauche de $(B , \times)$ définie par x est

$$L_x^{\times} = L_{R_c^{-1}(x)}.L_b^{-1} \qquad .$$

Le groupe associé à gauche de $(B , \times)$ est donc contenu dans le groupe associé à gauche de B . Les résultats précédents relatifs aux boucles et aux classes d'imprimitivité des boucles contenant l'élément unité donnent donc sans démonstration une partie des résultats du paragraphe relatifs aux quasi-groupes les plus généraux (tout au moins en ce qui concerne les conditions nécessaires). Si $a \in B$, comme

$$(\mathfrak{J}_a)_\rho^{\times} = (\mathfrak{J}_a)_\rho \cap G_\rho^{\times} \qquad ,$$

la proposition 4 correspond en particulier au choix $b = a$ et $c = L_a^{-1}(a)$ qui donnent pour élément unité de $B^{\times}$, $bc = a$. BRUCK ([2], page 56) exprime ceci en disant que $B^{\times}$ est un isotope principal de B .

<u>Remarque 2.</u> - BRUCK ([2], page 60) démontre la proposition 5' pour une boucle B et pour $a = e$ élément unité de B .

<u>Remarque 3.</u> - Dans ce qui précède, on désigne par sous-quasi-groupe E d'un quasi-groupe B , une partie E de B , stable par les translations de B définies par les éléments de E ; on désigne par "sous-quasi-groupe normal" de B , un sous-quasi-groupe E qui est une classe d'imprimitivité de B pour son groupe associé G .

II. <u>Étude du treillis des équivalences d'imprimitivité de la structure homogène d'un quasi-groupe</u> B <u>et des équivalences de transitivité de</u> B .

Dans ce chapitre, on montre qu'il y a identité entre les équivalences d'imprimitivité de la structure homogène d'un quasi-groupe B définie par son groupe associé G et les équivalences de transitivité définies sur B par les sous-groupes distingués de G . On en déduit une structure de treillis complet sur l'ensemble des classes de B contenant un même élément. Cette question a été abordée par ALBERT [1] dans le cas des boucles.

1. Résultats plus généraux relatifs aux équivalences d'imprimitivité d'une structure homogène quelconque d'un ensemble quelconque.

Soit G un groupe transitif de bijections sur un ensemble B .

LEMME. - Si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur B , alors l'intersection des images inverses de $\mathcal{R}$, par les applications φ_a , est une relation d'équivalence régulière à droite de G . On désigne comme précédemment, pour tout $a \in B$, par φ_a l'application de G sur B définie par

$$\varphi_a(\alpha) = \alpha(a) \qquad \text{si} \quad \alpha \in G \quad .$$

La vérification du lemme est immédiate.

PROPOSITION 1. - Si H est un sous-groupe distingué de G , l'equivalence de transitivité sur B , définie par H , est une équivalence d'imprimitivité de B pour G .

L'énoncé de cette proposition se trouve dans [2] (exercice 12, page 111).

Soit $\mathcal{R}$ l'équivalence de transitivité définie sur B par H . Soient $x , y \in B$ tels que $x \mathcal{R} y$; il existe donc $\alpha \in G$ tel que

$$y = \alpha(x) \quad ,$$

et, si $\beta \in G$,

$$\beta y = \beta\alpha(x) = \alpha' \beta(x)$$

où $\alpha' \in H$ sous-groupe distingué de G , donc $\beta y \mathcal{R} \beta x$.

THÉORÈME 1. - Soient :

G groupe transitif de bijections sur un ensemble B ,

$\mathcal{H}$ ensemble des sous-groupes distingués de G ,

Si $a \in B$, $\mathcal{H}_a$ ensemble des sous-groupes de G contenant $\mathfrak{J}_a = \{\alpha \in G : \alpha(a)=a\}$,

$\mathcal{T}_I$ l'ensemble des équivalences de transitivité définies sur B par les éléments de $\mathcal{H}$,

$\mathfrak{J}$ le treillis complet des équivalences d'imprimitivité de la structure homogène de B pour G ,

μ l'application de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{T}_I$, qui à un sous-groupe distingué H de G

associe l'équivalence de transitivité qu'il définit sur B,

ν l'application de $\mathfrak{J}$ dans $\mathcal{H}$, qui, à une équivalence d'imprimitivité $\mathcal{R} \in \mathfrak{J}$ associe le sous-groupe des bijections de G qui laissent invariantes toutes les classes modulo $\mathcal{R}$.

a. $\nu \circ \mu$ associe à tout sous-groupe distingué $H \in \mathcal{H}$ le plus grand sous-groupe distingué de G définissant la même équivalence de transitivité dans B ; c'est une application de fermeture de Moore dans $\mathcal{H}$.

Soit

$$\mathcal{S} = \nu \circ \mu(\mathcal{H}) \quad .$$

b. $\mu \circ \nu$ associe à toute équivalence d'imprimitivité $\mathcal{R} \in \mathfrak{J}$ la plus grande équivalence de transitivité définie par un sous-groupe distingué de G et contenue dans $\mathcal{R}$; c'est une application de fermeture de Moore dans $\mathfrak{J}$, pour la relation d'ordre opposée à la relation d'inclusion.

On a

$$\mu \circ \nu(\mathfrak{J}) = \mathcal{T}_I \qquad \text{et} \quad \nu(\mathfrak{J}) = \mathcal{S} \quad .$$

c. Les familles de Moore $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}_I$ sont des treillis complets isomorphes, et l'on a

$$(\mu|\mathcal{S})^{-1} = \nu|\mathcal{T}_I \quad .$$

<u>Démonstration.</u>

a. Soit $\mathcal{R} \in \mathfrak{J}$. Alors, pour tout $a \in B$, $\varphi_a^{-1}(\mathcal{R})$ est régulière à gauche (I, paragraphe 1) d'après le lemme, $\bigcap_{a \in B} \varphi_a^{-1}(\mathcal{R})$ est alors une équivalence régulière dans le groupe G. Sa classe unité $\nu(\mathcal{R})$ est donc un sous-groupe distingué de G, et l'on a

$$\nu(\mathfrak{J}) \subset \mathcal{H} \quad .$$

D'après la proposition 1, si $H \in \mathcal{H}$, $\mu(H) \in \mathfrak{J}$, $\nu \circ \mu$ est donc une application de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$, et on a,

$$\nu \circ \mu(H) = \{\alpha \in G : \alpha(x)\ \mu(H)\ x,\ \forall\ x \in B\} \supset H \quad .$$

Comme μ respecte l'ordre, il en résulte,

$$\mu(H) \subset \mu \circ \nu \bullet \mu(H) \quad .$$

Réciproquement, si $x\mu[\nu \circ \mu(H)]\ y$, on a

$$y = \alpha(x) \quad \text{où} \quad \alpha \in \nu \circ \mu(H) \quad ,$$

donc

$$y = \alpha(x)\ \mu(H)\ x \text{ , c'est-à-dire } \mu \circ \nu \circ \mu(H) \subset \mu(H) .$$

Soient, en définitive,

$$\mu \circ \nu \circ \mu(H) = \mu(H) \ , \quad \forall \ H \in \mathcal{H} \quad \text{et} \quad \nu \circ \mu(H) \supset H , \ \forall \ H \in \mathcal{H} .$$

$\nu \circ \mu$ est donc l'application qui, à tout sous-groupe distingué H, associe le plus grand sous-groupe distingué de G définissant la même équivalence de transitivité dans B. $\nu \circ \mu$ est donc une application de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$ extensive et a fortiori idempotente. ν respecte l'ordre. En effet, si $\mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}_2$, toute classe modulo $\mathcal{R}_2$ est réunion de classes modulo $\mathcal{R}_1$. Donc si $\alpha \in \nu(\mathcal{R}_1)$, α laisse invariantes les classes modulo $\mathcal{R}_2$.

Il en résulte que $\nu \circ \mu$ est isotone.

$\nu \circ \mu$ est donc une application de fermeture de Moore dans $\mathcal{H}$, vérifiant

$$\mu \circ (\nu \circ \mu) = \mu .$$

b. Soit $\mathcal{R} \in \mathfrak{I}$; on a,

$$\nu(\mathcal{R}) = \{\alpha \in G : \ \alpha(x)\ \mathcal{R} x \ ; \ \forall \ x \in B\} .$$

Donc l'équivalence de transitivité, définie sur B par $\nu(\mathcal{R})$, est contenue dans $\mathcal{R}$. Soit

$$\mu \circ \nu(\mathcal{R}) \subset \mathcal{R} ;$$

et, comme ν respecte l'ordre,

$$\nu \circ \mu \circ \nu(\mathcal{R}) \subset \nu(\mathcal{R}) .$$

Par ailleurs $\nu \circ \mu$ étant extensive, on a :

$$\nu \circ \mu\ \nu(\mathcal{R}) \supset \nu(\mathcal{R}) .$$

D'où

$$\nu \circ \mu \circ \nu(\mathcal{R}) = \nu(\mathcal{R}) \qquad \forall \ \mathcal{R} \in \mathfrak{I} .$$

Donc

$$\nu \circ (\mu \circ \nu) = \nu .$$

Il en résulte que

$$\nu(\mathfrak{I}) = \nu \circ \mu \circ \nu(\mathfrak{I}) \subset \nu \circ \mu(\mathcal{H}) = \mathcal{S} = \nu(\mathcal{C}_I) \subset \nu(\mathfrak{I})$$

puisque $\mathcal{C}_I = \mu(\mathcal{H})$, d'où

$$\nu(\mathfrak{J}) = \mathcal{G} = \nu(\mathcal{C}_I) \quad ,$$

et

$$\mu \circ \nu(\mathfrak{J}) = \mu(\mathcal{G}) = \mathcal{C}_I \quad .$$

Donc $\mu \circ \nu$ est une application de fermeture dans $\mathfrak{J}$ munie de la relation d'ordre opposée à la relation d'inclusion. La famille associée à $\mu \circ \nu$ étant $\mathcal{C}_I$. Il en résulte que si $\mathcal{R} \in \mathfrak{J}$, $\mu \circ \nu(\mathcal{R})$ est la plus grande équivalence de transitivité de $\mathcal{C}_I$ contenue dans $\mathcal{R}$.

c. D'après (b),

$$\mu \circ \nu | \mathcal{C}_I \text{ est l'égalité sur } \mathcal{C}_I \quad .$$

et d'après (a) :

$$\nu \circ \mu | \mathcal{G} \text{ est l'égalité sur } \mathcal{G} \quad .$$

$\mathcal{G}$ et $\mathcal{C}_I$ sont donc en correspondance bijective par ν et μ , et l'on a :

$$(\mu | \mathcal{G})^{-1} = \nu | \mathcal{C}_I \quad .$$

En outre, d'après le théorème 2 de [4] (page 175), $\mathcal{G}$ est un treillis complet dans lequel la borne inférieure d'une famille $(H_i)_{i \in I}$ d'éléments H_i de $\mathcal{G}$ est l'intersection et la borne supérieure :

$$\sup_{\mathcal{G}} (H_i)_{i \in I} = \nu \circ \mu(\sup_{\mathcal{H}} (H_i)_{i \in I}) \quad .$$

De même, $\mathcal{C}_I$ est un treillis complet, dans lequel la borne supérieure d'une famille $(\mathcal{R}_j)_{j \in J}$ d'éléments $\mathcal{R}_j$ de $\mathcal{C}_I$ pour la relation d'inclusion est l'équivalence engendrée par la famille : $\sup_{j \in J} (\mathcal{R}_j)$, plus petite relation d'équivalence contenant les $\mathcal{R}_j$ (borne supérieure de la famille dans $\mathfrak{J}$) et la borne inférieure est

$$\inf_{\mathcal{C}_I} (\mathcal{R}_j)_{j \in J} = \mu \circ \nu(\inf_{\mathfrak{J}} (\mathcal{R}_j)_{j \in J}) = \mu \circ \nu(\bigcap_{j \in J} (\mathcal{R}_j)) \quad .$$

Comme $\mu | \mathcal{G}$ est une bijection qui respecte les relations d'ordre des treillis $\mathcal{G}$ et $\mathcal{C}_I$, on a donc les relations :

$$\sup_{j \in J} (\mathcal{R}_j) = \mu(\sup_{\mathcal{G}} (\nu(\mathcal{R}_j))_{j \in J}) = \mu \circ \nu \circ \mu(\sup_{\mathcal{H}} (\nu(\mathcal{R}_j))_{j \in J}) \ .$$

Soient

$$(1) \qquad \sup \bigcap_{j\in J} \mathcal{R}_j = \mu(\sup_{\mathcal{H}}(\nu(\mathcal{R}_j))_{j\in J}) \quad ,$$

et

$$\inf_{\mathcal{C}_I}(\mathcal{R}_j)_{j\in J} = \mu \circ \nu(\bigcap_{j\in J} \mathcal{R}_j) = \mu[\bigcap_{j\in J} \nu(\mathcal{R}_j)] \quad .$$

Soit

$$(2) \qquad \inf_{\mathcal{C}_I}(\mathcal{R}_j)_{j\in J} = \mu[\bigcap_{j\in J} \nu(\mathcal{R}_j)] \quad .$$

Remarque. – Soient $a \in B$, $\mathcal{U}_a$ l'ensemble des classes d'imprimitivités de B contenant a peut être identifié canoniquement à $\mathfrak{J}$.

Si $\mathcal{H}_a$ désigne l'ensemble des sous-groupes de G contenant $\mathfrak{J}_a = \{\alpha \in G : \alpha(a)=a\}$ $\nu \circ \varphi_a$ est une application de $\mathcal{H}_a$ sur $\mathcal{S}$, qui, à tout $S \in \mathcal{H}_a$, associe le plus grand sous-groupe distingué de G contenu dans S .

La démonstration de cette propriété est dans [1] (page 106).

D'après la proposition 1' (I, paragraphe 1), pour tout $a \in B$, φ_a est une bijection de $\mathcal{H}_a$ sur $\mathfrak{J}$.

Lorsque a décrit B , les sous-groupes $\varphi_a^{-1}(U_a)$ où U_a est la classe de a modulo $\mathcal{R}$, $\mathcal{R} \in \mathfrak{J}$ constituent une classe de sous-groupes conjugués de G , et l'on a

$$\bigcap_{a\in B} \varphi_a^{-1}(U_a) = \{\alpha \in G : \alpha(a) \,\mathcal{R}\, a , \ \forall \ a \in B\} = \nu(\mathcal{R}) \quad .$$

Si l'on identifie pour tout $a \in B$, $\mathfrak{J}$ et $\mathcal{U}_a$, $\nu \circ \varphi_a$ est donc une application de $\mathcal{H}_a$ sur $\mathcal{S}$ qui à $S \in \mathcal{H}_a$ associe le plus grand sous-groupe distingué de G contenu dans S . Ces résultats peuvent être précisés de la façon suivante :

PROPOSITION 2.

a. Soit $\mathcal{R} \in \mathfrak{J}$. Il existe un groupe transitif de bijections de $B/\mathcal{R}$, soit $\overline{G}$ isomorphe à $G/\nu(\mathcal{R})$ et un homomorphisme φ de G sur $\overline{G}$, tel que si θ désigne l'homomorphisme canonique de B sur $B/\mathcal{R}$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\theta} & B/\mathcal{R} \\ {\scriptstyle\alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi(\alpha)} \\ B & \xrightarrow[\theta]{} & B/\mathcal{R} \end{array}$$

soit commutatif pour tout $\alpha \in G$.

b. Si E est une classe modulo $\mathcal{R}$, et si $a \in E$, on a :

$$\varphi_a^{-1}(E) = \varphi^{-1}(\overline{\mathfrak{J}}_{\theta a}) ,$$

et

$$\frac{\varphi_a^{-1}(E)}{\nu(\mathcal{R})} \cong \overline{\mathfrak{J}}_{\theta a} .$$

Si $\mathcal{R} \in \mathcal{C}_I$, alors

$$\varphi(\mathfrak{J}_a) = \overline{\mathfrak{J}}_{\theta a} \quad \text{et} \quad \frac{\mathfrak{J}_a}{\mathfrak{J}_a \cap \nu(\mathcal{R})} \cong \overline{\mathfrak{J}_{\theta a}} .$$

Si $\alpha \in G$ et $\theta x = \theta y$, on a, puisque $\mathcal{R} \in \mathfrak{J}$:

$$\theta\alpha(x) = \theta\alpha(y) .$$

Soit alors $\varphi(\alpha)$ l'application de $B/\mathcal{R}$ dans $B/\mathcal{R}$ définie par :

$$\varphi(\alpha)(\theta x) = \theta\alpha(x) \qquad \forall \; x \in B .$$

On a donc

$$\varphi(\alpha)\,\theta = \theta\alpha \qquad \forall \; \alpha \in G .$$

G étant un groupe de bijections de B , il en résulte immédiatement que $\varphi(\alpha)$ est une bijection de $\frac{B}{\mathcal{R}}$ et φ est un homomorphisme de G dans le groupe des bijections de $B/\mathcal{R}$.

En effet,

$$\varphi(\alpha\beta)\,\theta = \theta\alpha\beta = \varphi(\alpha)\,\theta\beta = \varphi(\alpha)\,\varphi(\beta)\,\theta ,$$

d'où

$$\varphi(\alpha\beta) = \varphi(\alpha)\,\varphi(\beta) \qquad \forall \; \alpha , \beta \in G .$$

G étant un groupe transitif de bijections de B , il en résulte que $\varphi(G)$ est un groupe transitif de bijections de $B/\mathcal{R}$.

$\varphi(\alpha)\,\theta = \theta\alpha$, $\forall \; \alpha \in G$, entraîne que les relations $\varphi(\alpha) \in \overline{\mathfrak{J}}_{\theta a}$ et $\alpha(a) \in E$ sont équivalentes si E est une classe modulo $\mathcal{R}$ et $a \in E$, $\overline{\mathfrak{J}}_{\theta a}$ étant le sous-groupe de $\overline{G} = \varphi(G)$ laissant invariant θa . Ce noyau de φ est $\{\alpha \in G : \theta = \theta\alpha\}$, c'est donc $\nu(\mathcal{R})$.

Il en résulte que $G/\nu(\mathcal{R})$ et $\dfrac{\varphi_a^{-1}(E)}{\nu(\mathcal{R})}$ sont respectivement isomorphes à $\overline{G}$ et à

$\overline{\mathfrak{I}}_{\theta a}$. Si $\mathcal{R} \in \mathcal{C}_I$, on a

$$\varphi(\mathfrak{I}_a) = \overline{\mathfrak{I}}_{\theta a} \qquad ;$$

en effet, pour tout $\mathcal{R} \in \mathfrak{I}$, on a $\varphi(\mathfrak{I}_a) \subset \overline{\mathfrak{I}}_{\theta a}$.

Réciproquement, soit $\overline{\alpha} \in \overline{\mathfrak{I}}_{\theta a}$, on a $\overline{\alpha} = \varphi(\alpha)$ avec $\alpha(a)\ \mathcal{R} a$. Comme $\mathcal{R} \in \mathcal{C}_I$, $\mathcal{R}$ est l'équivalence de transitivité définie sur B par $\nu(\mathcal{R})$, donc il existe $\beta \in \nu(\mathcal{R})$ tel que

$$\alpha(a) = \beta(a) \text{ , donc } \beta^{-1}\alpha \in \mathfrak{I}_a \qquad ,$$

d'où

$$\alpha = \beta\gamma \quad \text{avec} \quad \beta \in \nu(\mathcal{R}) \text{ , } \gamma \in \mathfrak{I}_a \qquad ,$$

donc $\overline{\alpha} = \varphi(\alpha) = \varphi(\gamma) \in \varphi(\mathfrak{I}_a)$.

Il en résulte que $\dfrac{\mathfrak{I}_a}{\nu(\mathcal{R}) \cap \mathfrak{I}_a}$ est isomorphe à $\mathfrak{I}_{\theta a}$ si $\mathcal{R} \in \mathcal{C}_I$.

Remarque. - Si $\mathcal{R} \in \mathfrak{I}$, $\mu(\nu(\mathcal{R})) \in \mathcal{C}_I$. La classe de a modulo $\mu(\nu(\mathcal{R}))$ est $\nu(\mathcal{R})(a)$ et le sous-groupe de $\mathcal{H}_a$ contenant $\mathfrak{I}_a$ est d'après la proposition 1', chapitre I, §1

$$\varphi_a^{-1}(\nu(\mathcal{R})(a)) = \nu(\mathcal{R}).\mathfrak{I}_a \subset \varphi_a^{-1}(E) \qquad ,$$

E étant la classe modulo $\mathcal{R}$ de a.

2. Corollaires des résultats précédents.

THÉORÈME 2. - Soient B un quasi-groupe et G son groupe associé.

a. Les équivalences d'imprimitivité de la structure homogène de B pour G sont les équivalences de transitivité définies par les sous-groupes distingués de G.

Si $\mathcal{R} \in \mathfrak{I}$,

$$\nu(\mathcal{R}) \supset \{R_x R_y^{-1} \text{ , } L_x L_y^{-1} \;:\; x\ \mathcal{R}\ y\} \qquad .$$

b. Pour tout $a \in B$, l'ensemble $\mathcal{U}_a$ des classes d'imprimitivité de B pour G contenant a admet une structure de treillis complet dans lequel la borne inférieure d'une famille $(E_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathcal{U}_a$ est l'intersection de cette famille, et la borne supérieure l'ensemble des éléments de B de la forme

$$\left(\prod_{j=1}^{n-1} L_{x_{i_j}} L_a^{-1}\right)(x_{i_n})$$

pour toute famille finie $i_1 , \ldots , i_n \in I$ avec $x_{i_j} \in E_{i_j}$, $\forall$ j de 1 à n.

Démonstration.

a. Soient $\mathcal{R}$ une équivalence d'imprimitivité de B pour G , E une classe modulo $\mathcal{R}$ et $a \in E$. Soit $H = \nu(\mathcal{R}) \in \mathcal{S}$.

Pour tout $x \in E$, $R_x R_a^{-1} \in H$. En effet, si $y \in B$,

$$R_x R_a^{-1}(y) = R_a^{-1}(y)\ x \in R_a^{-1}(y)\ E \quad .$$

Et, d'après I, paragraphe 1, E étant la classe modulo $\mathcal{R}$ de a , $R_a^{-1}(y)\ E$ est la classe modulo $\mathcal{R}$ de

$$R_a^{-1}(y)\ a = y \quad .$$

De même, $L_x L_a^{-1} \in H$ pour tout x et tout $a \in E$.

D'après le théorème 1, l'équivalence de transitivité : $\mu(H) = \mu\nu(\mathcal{R})$ est contenue dans $\mathcal{R}$. On a donc $H(a) \subset E$. Or $R_x R_a^{-1}(a) \in H(a)$ et :

$$R_x R_a^{-1}(a) = R_a^{-1}(a)\ x = L_{R_a^{-1}(a)}(x) \quad .$$

D'après la proposition 4(a) (chapitre I, §2), on a $L_{R_a^{-1}(a)}(E) = E$, E étant stable par les translations à gauche définies par les éléments de $R_a^{-1}(E)$.

Il en résulte donc que, pour tout $a \in B$, $H(a) = E$ classe modulo $\mathcal{R}$ contenant a ; d'où

$$\mu\nu(\mathcal{R}) = \mathcal{R} \quad \text{et} \quad \mathfrak{I} = \mathcal{T}_I \quad .$$

b. Soit $\mathcal{S} = \nu(\mathfrak{I}) = \nu \circ \mu\ (\mathcal{H})$. D'après (a) et le théorème 1, $\mathcal{S}$ et $\mathfrak{I}$ sont isomorphes par ν . Pour tout $a \in B$, $\mathcal{U}_a$ est donc isomorphe au treillis complet $\mathcal{S}$ du théorème 1.

Soit $(E_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathcal{U}_a$. D'après le théorème 1 (formule (1), (c)), on a :

$$E = \sup_{i\in I} E_i = \varphi_a(\sup_{i\in I} \nu(\mathcal{R}_i)) \quad ,$$

la borne supérieure étant prise dans $\mathfrak{R}$, où $\mathcal{R}_i$ est l'équivalence d'imprimitivité de B pour G dont la classe contenant a est E_i ; donc, pour tout élément x de E , il existe une famille finie d'éléments de I : $i_1 , \dots , i_n$ et $\alpha_{i_j} \in \nu(\mathcal{R}_i)$ tels que

$$x = \alpha_{i_1} \circ \dots \circ \alpha_{i_j} \circ \dots \circ \alpha_{i_n}(a) \qquad .$$

$\alpha_{i_n} \in \nu(\mathcal{R}_n)$ et $a \in E_{i_n}$, donc $\alpha_{i_n}(a) \in E_{i_n}$.

Soit $x_{i_n} = \alpha_{i_n}(a)$.

On a

$$\alpha_{i_{n-1}}(x_{i_n}) \in E_{i_{n-1}} L_a^{-1}(x_{i_n}) \text{ classes modulo } \mathcal{R}_{i_{n-1}} \text{ de } aL_a^{-1}(x_{i_n}) = x_{i_n} \qquad ;$$

donc

$$\alpha_{i_{n-1}}(x_{i_n}) = x_{i_{n-1}} L_a^{-1}(x_{i_n}) \qquad \text{où } x_{i_{n-1}} \in E_{i_{n-1}} \qquad .$$

Donc, pour tout $x \in E$, il existe une famille finie de I : $i_1 , \dots , i_n$ tels que

$$x = L_{x_{i_1}} L_a^{-1} L_{x_{i_2}} L_a^{-1} \dots L_{x_{i_j}} L_a^{-1} \dots L_{x_{i_{n-1}}} L_a^{-1}(x_{i_n})$$

avec $x_{i_j} \in E_{i_j}$ pour tout j de 1 à n .

COROLLAIRE. - Si B est un quasi-groupe contenant au moins un idempotent a , la borne supérieure d'une famille E_i de sous-quasi-groupes normaux contenant a est l'ensemble des éléments de B de la forme (ensemble qui est un sous-quasi-groupe normal contenant a)

$$(1) \qquad x = L_{x_{i_1}} \dots L_{x_{i_{n-1}}}(x_{i_n})$$

pour toute famille finie $i_1 , \dots , i_n$ de I , avec $x_{i_j} \in E_{i_j}$, $\forall$ j de 1 à n . En outre,

$$\sup(E_1 , E_2) = E_1 E_2 = E_2 E_1 \qquad .$$

En effet, si a est un idempotent du quasi-groupe B, $\mathcal{U}_a$ est l'ensemble des sous-quasi-groupes normaux de B contenant a (théorème 3, I, §2).

$$y_{i_n} = L_a^{-1}(x_{i_n}) \in E_{i_n} \qquad ;$$

donc

$$L_{x_{i_{n-1}}} L_a^{-1}(x_{i_n}) = x_{i_{n-1}} y_{i_n} \qquad .$$

Si $\operatorname{card} I = 2$, on a

$$E = E_1 E_2 = E_2 E_1 \qquad ,$$

car si $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$, on a

$$x_1 x_2 = x_1 L_a^{-1}(y_2) \quad \text{avec} \quad y_2 \in E_2 \quad (y_2 = ax_2)$$

$$= L_{x_1} L_a^{-1}(y_2) \in R_a^{-1}(x_2) E_1 \quad \text{d'après (a) et} \quad R_a^{-1}(x_2) \in E_2 \qquad .$$

Si $x_1 \in E_1$, on a

$$x_1 = R_a^{-1}(x_1).a \in E_1 E_2 \qquad .$$

Par récurrence, on en déduit une représentation du type 1 pour tout élément de E.

PROPOSITION 3. - Soient $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence d'un quasi-groupe B régulière et simplifiable, $\nu(\mathcal{R})$ le sous-groupe distingué de G, groupe associé à B, laissant stables toutes les classes modulo $\mathcal{R}$.

Alors, pour toute classe E modulo $\mathcal{R}$ et tout $a \in E$, on a

$$\nu(\mathcal{R}) = \bigcup_{x \in E} R_{L_a^{-1}(x)} R^{-1}_{L_a^{-1}(a)} [\mathfrak{I}_a \cap \nu(\mathcal{R})] \qquad ,$$

où $\mathfrak{I}_a$ est le sous-groupe de G dont les éléments laissent a invariant.

En effet, $R_{L_a^{-1}(a)}(a) = aL_a^{-1}(a) = a$; donc $R_{L_a^{-1}(a)}$ et son inverse sont dans $\mathfrak{I}_a$. D'après les propositions 3 et 4 du chapitre I, tout élément α de $\varphi_a^{-1}(E)$ admet une représentation unique de la forme $\alpha = R_{L_a^{-1}(x)} R^{-1}_{L_a^{-1}(a)} \beta$ avec $x \in E$ et

$\beta \in \mathfrak{I}_a$; et réciproquement tout élément de cette forme appartient à $\varphi_a^{-1}(E)$.

Puisque $x \in E$ classe modulo $\mathcal{R}$ de a , on a

$$L_a^{-1}(x) \ \mathcal{R} \ L_a^{-1}(a) \quad .$$

Donc (chapitre II, théorème 2(a))

$$R_{L_a^{-1}(x)} \, R^{-1}_{L_a^{-1}(a)} \in \nu(\mathcal{R}) \quad ,$$

$\alpha \in \nu(\mathcal{R})$ si et seulement si $\beta \in \nu(\mathcal{R}) \cap \mathfrak{I}_a$, d'où le corollaire.

Dans ce qui suit, nous énonçons des résultats démontrés dans [3] pour des boucles, en lès complétant.

Etant donnés un quasi-groupe B et θ un homomorphisme de B sur un quasi-groupe $\overline{B}$, il est immédiat que l'équivalence définie sur B par θ est régulière et simplifiable.

Réciproquement, suivant en cela [3], nous avons le résultat suivant :

PROPOSITION 4. - Soient B un quasi-groupe, G son groupe associé, H un sous-groupe distingué de G , $\mathcal{P}(B)$ l'ensemble des parties de B , munies de la loi induite par celle de B .

Alors l'ensemble des classes de transitivité, définies par H sur B , est un sous-quasi-groupe de $\mathcal{P}(B)$, image homomorphe de B par l'application $x \to H(x)$.

<u>Démonstration</u>. - D'après la proposition 1, (chapitre II), l'équivalence de transitivité $\mathcal{R}$, définie sur B par H , est une équivalence d'imprimitivité de B par G .

La classe de xy modulo $\mathcal{R}$ est donc, d'après le chapitre I,

$$\begin{aligned} H(xy) &= H[R_y(x)] = R_y[H(x)] = H(x).y \quad \text{dans } \mathcal{P}(B) \\ &= H[L_y(x)] = L_y[H(x)] = y.H(x) \quad \text{dans } \mathcal{P}(B) \quad . \end{aligned}$$

Il en résulte que, dans $\mathcal{P}(B)$,

$$H(x)\ H(y) = \bigcup_{\alpha \in H} H(x)\ \alpha(y) = \bigcup_{\alpha \in H} H(x\alpha(y)) \quad .$$

Comme $\mathcal{R}$ est régulière à gauche (théorème 2, chapitre I) et $\alpha(y)\ \mathcal{R} y$, il en résulte :

$$H(x\alpha(y)) = H(xy) \qquad \forall \ \alpha \in H \qquad ,$$

d'où

$$H(x)\ H(y) = H(xy) \qquad .$$

Des relations,

$$H(x)\ H(y) = H(x)\ y = x\ H(y) \qquad ,$$

il résulte que l'ensemble $\overline{B}$ des classes de transitivité modulo $\mathcal{R}$ est simplifiable dans $\mathcal{P}(B)$.

$\overline{B}$ est donc un sous-quasi-groupe de $\mathcal{P}(B)$, image homomorphe de B par $x \to H(x)$. Des théorèmes 2 (chapitres I, II) et de la proposition 4, il résulte donc le théorème suivant :

THÉORÈME 3..- Soient B un quasi-groupe, G son groupe associé. Alors les quatre propriétés suivantes sont équivalentes pour une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur B :

1° $\mathcal{R}$ est régulière et simplifiable,

2° $\mathcal{R}$ est d'imprimitivité pour la structure homogène de B pour G ,

3° $\mathcal{R}$ est une équivalence de transitivité définie par un sous-groupe distingué H de G ,

4° $\mathcal{R}$ est une équivalence d'homomorphisme.

PROPOSITION 5. - Soient B un quasi-groupe, $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence dans B satisfaisant les conditions équivalentes du théorème 3, θ l'homomorphisme canonique de B sur $B/\mathcal{R}$ (proposition 4).

a. Alors, il existe un homomorphisme φ du groupe associé G de B sur le groupe associé $\overline{G}$ de $\overline{B} = B/\mathcal{R}$ tel que

$$\varphi(\alpha)\ \theta = \theta\alpha \qquad .$$

b. Pour tout $a \in B$, on a $\varphi(\mathfrak{I}_a) = \overline{\mathfrak{I}}_{\theta a}$ sous-groupe de $\overline{G}$ laissant θa invariant.

Le noyau de φ est $\nu(\mathcal{R})$ (théorème 1) et $\frac{\mathfrak{I}_a}{\mathfrak{I}_a \cap \nu(\mathcal{R})}$ et $\frac{\varphi_a^{-1}(E)}{\nu(\mathcal{R})}$ sont isomorphes à $\overline{\mathfrak{I}}_{\theta a}$, E étant la classe modulo $\mathcal{R}$ de a .

D'après le théorème 3 et la proposition 2, il existe un homomorphisme φ de G dans le groupe des bijections de $\overline{B}$ tel que

$$\varphi(\alpha)\ \theta = \theta\alpha \qquad \forall\ \alpha \in G \quad .$$

Soit x , y $\in$ B , on a donc

$$\varphi(R_x)\ \theta y = \theta\ R_x(y) = \theta(yx) = \theta(y)\ \theta(x) = R_{\theta(x)}\ \theta(y) \quad ,$$

d'où

$$\varphi(R_x) = R_{\theta x}$$

et de même

$$\varphi(L_x) = L_{\theta x} \quad .$$

φ est donc un homomorphisme appliquant l'ensemble des translations de B sur l'ensemble des translations de $\overline{B}$. Comme les groupes associés sont les groupes de bijections engendrés par les translations, il en résulte $\varphi(G) = \overline{G}$ groupe associé de $\overline{B}$.

D'après le théorème 2(a), on a $\mathfrak{I} = \mathfrak{T}_I$, d'où (b), d'après la proposition 2(b).

<u>Remarque</u>. - KIOKEMEISTER [5] montre que l'ensemble des sous-quasi-groupes normaux d'un quasi-groupe à idempotents contenant un même idempotent est un treillis modulaire, sa démonstration étant basée sur la propriété 1 du théorème 3. De façon plus générale, il montre que, pour un quasi-groupe quelconque B et un élément quelconque a de B , l'ensemble $\mathcal{L}_a$ des sous-quasi-groupes normaux ("normal divisor") de B contenant a est également un treillis modulaire.

La structure de treillis de $\mathcal{L}_a$ peut s'obtenir ici directement à partir des résultats précédents.

L'intersection des sous-quasi-groupes normaux de B contenant a est en effet un sous-quasi-groupe normal E_a ; il lui correspond donc une équivalence $\mathcal{R}_a$ sur B qui vérifie les propriétés identiques du théorème 3.

L'ensemble quotient $B/\mathcal{R}_a$ est alors muni par la proposition 4 d'une structure de quasi-groupe pour $H = \nu(\mathcal{R}_a)$. Si θ est l'homomorphisme de B sur $B/\mathcal{R}_a$, donné par la proposition 4, $\theta(a)$ est alors un idempotent de $B/\mathcal{R}_a$.

En effet

$$\theta(a) = \nu(\mathcal{R}_a)(a) \qquad \text{et} \quad \theta(a)^2 = \nu(\mathcal{R}_a)(a^2) = \theta(a)$$

puisque $a^2 \in E_a$ sous-quasi-groupe de B .

Il en résulte que θ établit une bijection entre $\mathcal{L}_a$ et l'ensemble des sous-quasi-groupes normaux de $B/\mathcal{R}_a$ contenant l'idempotent $\theta(a)$. Cette bijection respectant l'ordre permet de munir $\mathcal{L}_a$ d'une structure de treillis complet (corollaire du théorème 2, et chapitre I, théorème 3).

Nous avons laissé de côté la propriété "modulaire" des treillis considérés. Celle-ci pourrait s'obtenir également par les mêmes méthodes.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ALBERT (A. A.). - Quasi-groups, I., Trans. Amer. math. Soc., t. 54, 1943, p. 507-519 ; II., Trans. Amer. math. Soc., t. 55, 1944, p. 401-419.

[2] BOURBAKI (Nicolas). - Algèbre, Chap. 1. - Paris, Hermann, 1958 (Act. scient. et ind., 934-1144 ; Eléments de Mathématique, 4).

[3] BRUCK (Richard Hubert). - A survey of binary systems. - Berlin, Göttingen, Heidelberg, Springer-Verlag, 1958 (Ergebnisse der Mathematik, 20).

[4] DUBREIL (P.) et DUBREIL-JACOTIN (M.-L.). - Leçons d'algèbre moderne. - Paris, Dunod, 1961 (Collection universitaire de Mathématiques, 6).

[5] KIOKEMEISTER (Fred). - A theory of normality for quasi-groups, Amer. J. of Math., t. 70, 1948, p. 99-106.