A. G. Kuroš

Groupes avec multi-opérateurs

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 15, n° 2 (1961-1962), exp. n° 23, p. 1-6

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1961-1962__15_2_A12_0>

GROUPES AVEC MULTI-OPÉRATEURS

par A. G. KUROŠ

La notion d'<u>algèbre universelle</u>, ensemble dans lequel sont définies des opérations algébriques, est destinée à systématiser les résultats et les méthodes utilisées dans les différents domaines d'études algébriques (groupes, anneaux, demi-groupes, treillis).

Si G est une algèbre universelle et si n est un entier ≥ 1, une <u>opération algébrique</u> n-aire ω associe, à chaque ensemble de n éléments de G $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ pris dans cet ordre, un élément de G désigné par $a_1 a_2 \ldots a_n \omega$; l'entier n est appelé le <u>poids</u> de l'opération ω.

En raison même de la grande généralité de la notion d'algèbre universelle, la théorie qui en découle ne peut pas être très profonde. Ce degré de généralité est cependant essentiel dans l'étude de certaines questions.

D'autre part, on remarque que la théorie des groupes et celle des anneaux (associatifs ou non associatifs) possèdent de nombreux développements parallèles : cela tient au fait que, dans ces deux cas, existe la notion de <u>noyau d'homomorphisme</u>.

Le problème se pose, alors, de trouver, parmi les algèbres universelles, une classe assez large, où cette notion est préservée. La classe des groupes avec multi-opérateurs, introduite par P. J. HIGGINS [1], en est une solution.

DÉFINITION 1. - On appelle <u>groupe avec multi-opérateurs</u>, un ensemble G :

1° muni d'une loi de groupe (non nécessairement commutative) que l'on notera additivement et dont on désignera par 0 l'élément neutre ;

2° sur lequel sont définies des opérations algébriques appartenant à un ensemble Ω ;

3° si $\omega \in \Omega$ et si n est le poids de ω, le résultat de l'opération ω, appliquée au n-uple $\{0, 0, \ldots, 0\}$ est 0.

L'ensemble des poids des différentes opérations algébriques du système Ω n'est pas, en général, borné.

Le groupe avec multi-opérateurs G sera, dans la suite, appelé Ω-groupe.

On désignera par G^+ la structure de groupe de G.

Lorsque l'ensemble Ω est vide, la notion de Ω-groupe coïncide avec celle de groupe.

Il est souvent naturel d'imposer des conditions à un Ω-groupe G, ces conditions pouvant parter soit sur les opérations algébriques (distributivité des opérations algébriques pour chacun des arguments ; commutativité de chaque opération algébrique, sur chaque argument, avec les automorphismes intérieurs de G^+) soit sur la structure de groupe de G (commutativité de la loi de groupe de G).

Cas particuliers.

1° Tout anneau (associatif ou non) est un groupe avec multi-opérateurs, les opérations algébriques étant les multiplications.

2° Les groupes avec opérateurs : le poids de chaque opération algébrique est 1 et toutes les opérations algébriques sont distributives par rapport à l'opération du groupe.

3° Les anneaux avec opérateurs.

4° Les algèbres sur un corps.

Il se trouve qu'un homomorphisme de groupes avec multi-opérateurs, est déterminé par son noyau, qui est un idéal d'un groupe avec multi-opérateurs.

DÉFINITION 2. - Un sous-ensemble A d'un Ω-groupe G est appelé idéal de G si :

a. A est un sous-groupe invariant de G^+

b. si $\omega \in \Omega$ et si n est le poids de ω, pour tout n-uple $\{a_1 , a_2 , \ldots , a_n\}$ d'éléments de A et pour tout n-uple $\{x_1 , x_2 , \ldots , x_n\}$ d'éléments de G, on a :

$$(a_1 + x_1) \ldots (a_n + x_n) \omega - x_1 x_2 \ldots x_n \omega \in A \quad .$$

Cette définition n'est asymétrique qu'en apparence.

Si les opérations algébriques sont distributives par rapport à chaque argument, la seconde condition de la définition 2, peut être remplacée par la condition plus simple :

b'. Si $\omega \in \Omega$ et si n est le poids de ω, pour tout n-uple $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ d'éléments de G, on a :

$$x_1 x_2 \dots x_n \omega \in A$$

dès que l'un des x_i appartient à A.

Dans le cas des anneaux, on a donc la définition d'idéal bilatère ; dans le cas des groupes, la notion habituelle de sous-groupe invariant ; dans le cas des groupes avec opérateurs, la notion habituelle de groupe invariant permis.

Il existe, pour les anneaux associatifs et pour les anneaux de Lie des théories parallèles à celles des groupes résolubles et des groupes nilpotents. On peut systématiser ces théories, à l'aide des groupes avec multi-opérateurs.

DÉFINITION 3. – Un Ω-sous-groupe d'un Ω-groupe G est un sous-groupe de G^+ fermé par rapport aux opérations algébriques.

DÉFINITION 4. – Soient $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ deux Ω-sous-groupes d'un Ω-groupe G et soit $\mathfrak{C} = \{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}$ le Ω-sous-groupe de G qu'ils engendrent. On appelle commutant réciproque de $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$, et l'on désigne par $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$, l'idéal de $\mathfrak{C}$ engendré par les éléments des deux types suivants :

1° les commutateurs $-a-b+a+b$, $a \in \mathfrak{A}$, $b \in \mathfrak{B}$.

2° $-a_1 a_2 \dots a_n \omega - b_1 b_2 \dots b_n \omega + (a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \dots (a_n + b_n) \omega$ où $a_i \in \mathfrak{A}$, $b_j \in \mathfrak{B}$ et ω est une opération algébrique de poids n.

Si $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ coïncident avec G, $[G, G]$ est le commutant du groupe G.

Dans le cas des groupes, au sens habituel, la condition $[G, G] = 0$ coïncide avec la condition de commutativité.

Si G est un anneau, on a $[G, G] = 0$ si et seulement si G est un anneau zéro ($xy = 0$ pour tous les éléments x et y de G).

DÉFINITION 5. – Un Ω-groupe G est nilpotent s'il existe une chaîne normale décroissante :

$$G = \mathfrak{A}_0 \supset \dots \supset \mathfrak{A}_i \supset \mathfrak{A}_{i+1} \supset \dots \supset \mathfrak{A}_k = 0$$

(c'est-à-dire telle que $\mathfrak{A}_{i+1}$ soit un idéal de $\mathfrak{A}_i$) pour laquelle on a : $[\mathfrak{A}_i, G] \subseteq \mathfrak{A}_{i+1}$.

DÉFINITION 6. - Un Ω-groupe G est résoluble s'il existe une chaîne normale décroissante :

$$G = \mathfrak{a}_0 \supset \ldots \supset \mathfrak{a}_i \supset \mathfrak{a}_{i+1} \supset \ldots \supset \mathfrak{a}_k = 0$$

telle que : $[\mathfrak{a}_i , \mathfrak{a}_i] \subseteq \mathfrak{a}_{i+1}$.

On retrouve, ainsi, comme cas particuliers les groupes (ou anneaux) nilpotents et résolubles.

Il se trouve, d'autre part, que la théorie des sous-groupes d'un groupe libre et celle du produit libre s'étendent aux Ω-groupes, alors que les théorèmes du type Nielsen-Schreier ne sont pas valables dans le cas des anneaux et que, pour les groupes avec opérateurs, le théorème : "tout sous-groupe (permis) d'un groupe libre est un groupe libre", n'est pas exact.

DÉFINITION 7. - Un Ω-groupe partiel G_0 est un groupe (additif) muni d'un système de multi-opérateurs Ω dont les éléments ω ne sont pas partout définis ; mais l'on suppose que si $\omega \in \Omega$ et si le poids de ω est n , $0\ 0 \ldots 0\ \omega$ est défini et est égal à 0 .

Tout Ω-groupe partiel G_0 peut être plongé dans un Ω-groupe G , défini à un isomorphisme près, cet isomorphisme conservant chaque élément de G_0 ; pour cela on désigne par π_0 l'ensemble des symboles :

$$a_1 \ldots a_n\ \omega \qquad (a_i \in G_0 , \quad \omega \in \Omega , \text{ le poids de } \omega \text{ étant } n)$$

qui n'ont pas de valeur dans G_0 . Soit $\mathfrak{F}_0$ le groupe libre engendré par π_0 et soit $G_1 = G_0 * \mathfrak{F}_0$, le produit libre engendré par G_0 et $\mathfrak{F}_0$. On peut considérer G_1 comme un Ω-groupe partiel : si $\omega \in \Omega$ et si n est le poids de ω, $a_1\ a_2 \ldots a_n\ \omega$ est défini dans G dès que les a_i appartiennent à G_0 . On applique la construction précédente à G_1 et l'on obtient un Ω-groupe partiel $G_2 = G_1 * \mathfrak{F}_1$. On forme ainsi une chaîne croissante de Ω-groupes partiels :

$$G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_s \subset \ldots$$

soit $G = \bigcup_{s=0}^{\infty} G_s$; G est un Ω-groupe et c'est la fermeture libre de G_0 ; on le désignera par $\overline{G}_0$.

Soit $\mathfrak{N}$ un système de générateurs libres et soit $\mathfrak{F}$ le groupe libre, au sens habituel, engendré par $\mathfrak{N}$. On considère $\mathfrak{F}$ comme un Ω-groupe partiel. Soit $\overline{\mathfrak{F}}$ la fermeture libre de $\mathfrak{F}$. Alors $\overline{\mathfrak{F}}$ est le Ω-groupe libre engendré par le système de générateurs libres $\mathfrak{N}$.

Ces définitions étant posées, le théorème de Nielsen-Schreier se généralise de la manière suivante :

THÉORÈME. - Chaque Ω-sous-groupe d'un Ω-groupe libre est un Ω-groupe libre.

Soit $\{\mathfrak{a}_i\ ,\ i \in I\}$ une famille de Ω-groupes libres et soit $G_0 = \sum\limits_i^* \mathfrak{a}_i$ la somme libre, au sens habituel, des $\mathfrak{a}_i$. G_0 peut être considéré comme un Ω-groupe partiel en supposant que chaque opération algébrique agit seulement à l'intérieur de chaque composante. $\overline{G}_0$ est appelé la somme Ω-libre des $\mathfrak{a}_i$ et on la désigne par

$$\sum_{i\ \Omega}^{*} \mathfrak{a}_i \quad .$$

La théorie des algèbres non associatives, sur un corps commutatif $\mathfrak{P}$ peut être transportée aux groupes avec multi-opérateurs.

DÉFINITION 8. - On appelle Ω-algèbre G, un Ω-groupe tel que :

1° G^+ est muni d'une structure d'espace vectoriel sur le corps commutatif $\mathfrak{P}$,

2° chaque multi-opérateur est multi-linéaire, c'est-à-dire : est distributif par rapport à chaque argument et permute, pour chaque argument, avec les éléments de $\mathfrak{P}$.

On peut définir la notion de Ω-algèbre libre sur un corps commutatif $\mathfrak{P}$ et la notion de somme Ω-libre de Ω-algèbres sur $\mathfrak{P}$. On montre que toute Ω-sous-algèbre d'une Ω-algèbre libre sur $\mathfrak{P}$ est une Ω-algèbre libre.

On remarque que dans certains cas il existe une théorie des objets libres (par exemple dans le cas des groupes, dans celui des algèbres de Lie) et dans d'autres non (dans le cas des anneaux et des algèbres associatives).

Existe-t-il un langage, par exemple celui des catégories, permettant de fonder une théorie des objets libres ?

BIBLIOGRAPHIE

[1] HIGGINS (P. J.). - Groups with multiple operators, Proc. London. math. Soc., Series 3, t. 6, 1956, p. 366-416.