Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

A. G. Kuroš

Les radicaux en théorie des groupes

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 15, n° 2 (1961-1962), exp. n° 22, p. 1-7

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1961-1962__15_2_A11_0>

LES RADICAUX EN THÉORIE DES GROUPES

par A. G. KUROŠ

Le concept axiomatique de radical, introduit par l'auteur [4] pour les anneaux et les algèbres peut intervenir toutes les fois que la notion de noyau d'homomorphisme s'applique ; en particulier, dans le cas des groupes, où cette notion permet d'incorporer, dans un seul schéma, de nombreux résultats [5].

D'autre part, le radical possède, dans le cas des groupes, des propriétés qui n'ont pas d'analogues dans le cas des anneaux.

1. Définitions.

Dans la classe de tous les groupes, le radical $\mathcal{R}$ est défini si :

- I. Deux sous-classes de groupes, R et S, sont données ; R étant appelée la classe des groupes-radicaux ou des R-groupes, et S la classe des groupes semi-simples ou des S-groupes.

- II. Ces sous-classes vérifient les propriétés suivantes :

1° la classe R est fermée par rapport aux homomorphismes, c'est-à-dire que toute image homomorphe d'un R-groupe est un R-groupe. [Il en résulte que le groupe-unité E est un groupe radical.]

2° tout groupe G possède un R-sous-groupe invariant maximum $\mathcal{R}(G)$, appelé $\mathcal{R}$-radical de G.

3° le groupe quotient $G/\mathcal{R}(G)$ appartient à la famille S, c'est-à-dire que le $\mathcal{R}$-radical du groupe $G/\mathcal{R}(G)$ est égal au groupe-unité.

Le $\mathcal{R}$-radical d'un groupe est l'intersection des sous-groupes invariants dont le groupe-quotient correspondant est semi-simple.

Il existe une infinité de couples de familles de groupes, R et S, qui satisfont aux conditions 1°, 2°, 3°. Chacune des classes, R et S, est déterminée par la donnée de l'autre. En particulier, S est l'ensemble des groupes G tels que $\mathcal{R}(G) = E$. Inversement, on montre que, S étant donnée, R est la classe des groupes dont aucune image homomorphe n'appartient à S, sauf le groupe-unité.

Le radical d'un groupe G est un sous-groupe caractéristique de G : c'est cette circonstance qui rend l'utilisation du radical si commode.

De nombreuses classes de groupes connues sont, ou bien des classes radicales ou bien des classes semi-simples par rapport à des radicaux abstraits, $\mathcal{R}$, convenables.

2. Caractérisations des classes radicales.

On montre qu'une classe de groupes, R, est une classe radicale si et seulement si elle possède au moins une des propriétés A.1.1 ou A.1.2, et au moins une des propriétés A.2.1, A.2.2, A.2.3.

A.1.1. - L'image homomorphe d'un R-groupe est un R-groupe.

A.1.2. - Toute image homomorphe d'un R-groupe, différente du groupe-unité, contient un R-sous-groupe caractéristique, différent du sous-groupe-unité.

A.2.1. - Tout groupe dont toute image homomorphe, différente du groupe-unité, possède un R-sous-groupe invariant, différent du sous-groupe-unité, est un R-groupe.

A.2.2. - Chaque groupe qui possède une chaîne normale croissante dont les facteurs sont des R-groupes est lui-même un R-groupe.

A.2.3. - Tout groupe possédant une chaîne principale croissante, dont les groupes facteurs sont engendrés par leur R-sous-groupes caractéristiques est un R-groupe.

On en déduit que tout produit direct de groupes radicaux est un groupe radical et que l'extension, au sens de Schreier, d'un groupe radical par un groupe radical est encore un groupe radical ; on résume ces propriétés en disant que les classes radicales sont formées par rapport au produit direct et à l'extension.

3. Constructions de classes radicales.

Soit $\mathfrak{M}$ une famille de groupes ; sans restreindre la généralité du problème, on peut supposer $\mathfrak{M}$ fermée par rapport aux homomorphismes.

La classe radicale minimale $R_0(\mathfrak{M})$, engendrée par $\mathfrak{M}$, est une famille de groupes pouvant être caractérisée de nombreuses façons. Par exemple :

1° On définit les groupes possédant un certain rang au-dessus de la famille $\mathfrak{M}$, rang qui est en général un ordinal transfini, et ceci de la manière suivante : les groupes de rang 1 sont ceux de la classe $\mathfrak{M}$; si β est un ordinal et si les groupes de rang α sont définis pour $\alpha < \beta$, le rang d'un groupe G est β si, pour toute image homomorphe G' de G, autre que le groupe-unité, on peut trouver un sous-groupe invariant de G', différent du sous-groupe-unité, qui soit de rang α $(< \beta)$ sur la famille $\mathfrak{M}$.

Par construction, si le groupe G est de rang β, il est aussi de n'importe quel rang $> \beta$.

La classe radicale minimale $R_0(\mathfrak{M})$ est constituée par les groupes qui ont un certain rang (au sens précédent) sur $\mathfrak{M}$. K. K. ŠČUKIN [7] a démontré, qu'en fait, ce rang ne dépasse pas le type ordinal de la suite des entiers.

2° On définit aussi la classe $R_0(\mathfrak{M})$ comme étant constituée par les groupes G qui vérifient la propriété suivante : il existe une chaîne (transfinie) normale croissante :

$$(1) \qquad E = \mathfrak{a}_0 \subset \mathfrak{a}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{a}_\alpha \subset \mathfrak{a}_{\alpha+1} \subset \dots \subset \mathfrak{a}_\gamma = G$$

telle que, quel que soit α, le facteur $\mathfrak{a}_{\alpha+1}/\mathfrak{a}_\alpha$ soit un $\mathfrak{M}$-groupe, et que l'on puisse trouver une sous-suite finie :

$$\alpha < \beta_1 < \dots < \beta_n = \gamma$$

de sorte que la chaîne :

$$\mathfrak{a}_\alpha \subset \mathfrak{a}_{\beta_1} \subset \mathfrak{a}_{\beta_2} \subset \dots \subset \mathfrak{a}_{\beta_n} = \mathfrak{a}_\gamma = G$$

soit encore normale ; autrement dit, on peut, à partir de G, atteindre n'importe quel sous-groupe $\mathfrak{a}_\alpha$ de la suite (1) par une suite décroissante normale finie.

Remarques.

1° Si l'on considère les groupes pour lesquels la chaîne (1) est principale, on n'obtient qu'une partie de la classe $R_0(\mathfrak{M})$, à savoir la famille des groupes de rang 2 sur $\mathfrak{M}$.

2° Si l'on ne suppose pas que chaque terme de la suite (1) peut être atteint à partir de G par une suite normale finie, on obtient une classe de groupes $R(\mathfrak{M})$, qui contient $R_0(\mathfrak{M})$ et qui est encore une classe radicale.

4. Caractérisations des classes semi-simples.

On montre qu'une classe S est semi-simple si et seulement si elle possède au moins une des propriétés B.1.1, B.1.2 et au moins une des propriétés B.2.1, B.2.2 ou B.2.3.

B.1.1. – Tout sous-groupe invariant d'un S-groupe est un S-groupe ; on dira aussi que la classe S est fermée pour les sous-groupes invariants.

B.1.2. – Tout sous-groupe invariant d'un S-groupe, et différent du sous-groupe-unité, possède une image homomorphe sur un S-groupe, différent du groupe-unité.

B.2.1. – Tout groupe, dont tout sous-groupe invariant, différent du sous-groupe-unité, possède une image homomorphe sur un S-groupe, différent du groupe-unité, est un S-groupe.

B.2.2. – Tout groupe qui possède une suite décroissante normale [invariante, caractéristique], dont les facteurs sont des produits sous-directs de S-groupes, est lui-même un S-groupe.

B.2.3. – Tout groupe possédant une suite normale décroissante dont les facteurs sont des S-groupes, est lui-même un S-groupe.

Il en résulte que les classes semi-simples sont fermées par rapport au produit sous-direct et à l'extension. A. L. ŠMEL'KIN [8] a démontré que ces classes sont aussi fermées par rapport au produit libre.

D'autres caractérisations des classes semi-simples ont été données par ČAN VAN KHAO [2].

5. Constructions de classes semi-simples.

Soit $\mathfrak{N}$ une classe de groupes ; dans le but de caractériser la classe semi-simple minimale $S_0(\mathfrak{N})$ qui contient $\mathfrak{N}$, on peut, sans restreindre la généralité du problème, supposer que la classe $\mathfrak{N}$ vérifie les propriétés B.1.1 et B.2.2 du paragraphe 4.

Cette caractérisation peut se faire, entre autres, de la manière suivante : on démontre que $S_0(\pi)$ est constituée par les groupes G pour lesquels existe une suite décroissante normale transfinie :

$$(2) \qquad G = \mathfrak{a}_0 \supset \mathfrak{a}_1 \supset \dots \supset \mathfrak{a}_\alpha \supset \mathfrak{a}_{\alpha+1} \supset \dots \supset \mathfrak{a}_\gamma = E$$

telle que, quel que soit α , le facteur $\mathfrak{a}_\alpha/\mathfrak{a}_{\alpha+1}$ soit le produit sous-direct d'une famille de π-groupes.

On obtient la même classe $S_c(\pi)$ en imposant à la chaîne (2) d'être principale ou même caractéristique, en appelant chaîne caractéristique une chaîne dont tous les termes sont des sous-groupes caractéristiques de groupe donné.

On peut aussi construire une classe semi-simple plus large $S(\pi)$ constituée par les groupes qui possèdent une suite de composition décroissante transfinie dont tous les facteurs appartiennent à π .

6. Application au cas des groupes abéliens et au cas des groupes finis.

La classe $\mathfrak{a}$ des groupes abéliens étant fermée par rapport aux homomorphismes et par rapport aux sous-groupes, on peut construire à partir de $\mathfrak{a}$ des classes radicales aussi bien que des classes semi-simples. On obtient de la sorte les classes de groupes résolubles généralisés.

On démontre que $S_0(\mathfrak{a})$ est la classe des groupes qui possèdent une suite décroissante de commutants c'est-à-dire la classe des R.K-groupes ; $S(\mathfrak{a})$ est la classe des R.N-groupes ; $R_0(A)$ est la classe des groupes sous-résolubles, étudiée par R. BAER en 1955 [1].

Il y a, au sujet des groupes de cette classe, c'est-à-dire des groupes ayant un rang sur la classe des groupes abéliens, une question ouverte : ces groupes sont-ils tous de rang 2 ?

$R(A)$ est la classe des $R.N^*$-groupe. Un exemple construit par l'auteur montre que les classes $R(A)$ et $R_0(A)$ sont distinctes.

A partir de la classe des groupes cycliques, fermée par rapport aux homomorphismes et aux sous-groupes, on obtient de nombreuses classes de groupes sur-résolubles.

La classe des groupes (abéliens) périodiques dont les ordres des éléments sont bornés dans leur ensemble, étant fermée par rapport aux sous-groupes, engendre une classe semi-simple. Les groupes radicaux correspondants sont complets dans le sens de S. N. ČERNIKOV, c'est-à-dire que si G est un groupe radical et si son opération est notée multiplicativement, l'équation :

$$x^n = a$$

possède une solution, quel que soit $a \in G$ et n entier positif.

Il existe des groupes complets ne contenant pas de sous-groupes abéliens complets : ceci donne la réponse à une question posée par ČERNIKOV [3].

A partir de la classe des groupes finis, on obtient encore des classes de groupes connues, celles des groupes finis généralisés.

De nombreux théorèmes démontrés indépendamment, s'obtiennent à partir du fait que l'on a une classe radicale ou une classe semi-simple. On a démontré, par exemple, que la classe des R.N-groupes est fermée par rapport au produit sous-direct. En réalité, ce résultat est une conséquence triviale du fait que cette classe est semi-simple.

7. Autre développement de la théorie du radical.

Les radicaux peuvent ne pas être construits dans la classe de tous les groupes, mais seulement dans une classe de groupes fermée à la fois par rapport aux homomorphismes et par rapport aux sous-groupes invariants, par exemple dans la classe des groupes abéliens ou même dans la classe des groupes abéliens p-primaires ; dans ce dernier cas, la classe des groupes radicaux est la classe des groupes complets (ou divisibles) et la classe des groupes semi-simples, celle des groupes réduits.

On peut aussi considérer les radicaux dans la classe des groupes finis, problème qui présente de nombreuses difficultés. On peut ainsi obtenir des classes de groupes finis connus. Par exemple à partir de la famille $\wp$ des groupes finis simples (et considérant le groupe unité comme groupe simple) on peut construire, dans la classe des groupes finis, les sous-classes $R_0(\wp)$ et $S_0(\wp)$; ces sous-classes coïncident et $R_0(\wp) = S_0(\wp)$ est l'unique classe de groupes finis qui soit à la fois radicale et semi-simple.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BAER (Reinhold). - Supersoluble groups, Proc. Amer. math. Soc., t. 6, 1955, p. 16-32.

[2] ČAN VAN KHAO. - O poluprostykh klassakh grupp, Sibirskij Mat. Žurnal, t. 3, 1962, p. 943-949.

[3] ČERNIKOV (S. N.). - K teorii polnykh grupp, Mat. Sbornik, N. S., t. 22, 1948, p. 319-348.

[4] KUROŠ (A. G.). - Radikaly kolec i algebr, Mat. Sbornik, N. S., t. 33, 1953, p. 13-26.

[5] KUROŠ (A. G.). - Radikaly v teorii grupp, Doklady Akad. Nauk S. S. S. R., t. 141, 1961, p. 789-792.

[6] KUROŠ (A. G.). - Radikaly v teorii grupp, Sibirskij Mat. Žurnal, t. 3, 1962, p. 912-931.

[7] ŠČUKIN (K. K.). - K teorii radikalnov v gruppakh, Sibirskij Mat. Žurnal, t. 3, 1962, p. 932-942.

[8] ŠMEL'KIN (A. L.). - Odno svojstvo poluprostykh klassov grupp, Sibirskij Mat. Žurnal, t. 3, 1962, p. 950-951.