Roger Desq

Étude de quelques relations d'équivalence définies dans un demi-groupe D

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 15, n° 1 (1961-1962), exp. n° 11, p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1961-1962__15_1_A8_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
15e année, 1961/62, n° 11

12 février 1962

ÉTUDE DE QUELQUES RELATIONS D'ÉQUIVALENCE DÉFINIES DANS UN DEMI-GROUPE D

par Roger DESQ

Introduction. - Cet exposé est consacré à l'étude de certaines relations d'équivalence dans un demi-groupe D . Ces relations sont voisines des équivalences principales bilatères étudiées par R. CROISOT [2].

La première partie est consacrée aux définitions générales. Dans la deuxième partie est introduite la notion de complexe semi-fort, notion à la fois plus faible que celle de complexe fort [3] et que celle de complexe bilatèrement fort [2]. Toutefois dans un demi-groupe, ayant un élément unité à droite par exemple, un complexe semi-fort à droite est un complexe fort.

La troisième partie précise quelques propriétés des complexes semi-forts L-symétriques.

Les L-résidus sont définis et comparés aux résidus. Ils conduisent dans la dernière partie à la notion d'idéal D^2-fermé à droite. Dans son travail, R. CROISOT [2] caractérise les demi-groupes D dans lesquels D^3 est simple ; ici s'introduisent assez naturellement des caractérisations analogues pour les demi-groupes D dans lesquels D^3 est simple à droite ou à gauche.

1. Définitions et notions générales.

Soit D un demi-groupe, D^* le demi-groupe anti-isomorphe de D . Nous considèrerons $\mathcal{D} = D \times D^*$, c'est-à-dire l'ensemble des couples (x , y) où $x , y \in D$ avec comme multiplication

$$(x , y)(x' , y') = (xx' , y' y) \quad .$$

DÉFINITION 1.1. - Soit H un complexe de D . Nous noterons $\mathcal{L}_H$ la relation d'équivalence suivante dans $\mathcal{D}$

$$(x , y) \equiv (x' , y') \quad (\mathcal{L}_H) \quad \rightleftharpoons \quad (H \cdot\!\cdot x) \cdot\!\cdot y = (H \cdot\!\cdot x') \cdot\!\cdot y' \quad .$$

THÉORÈME 1.1. - Si on a $(x, y) \equiv (x', y')$ $(\mathcal{L}_H)$, alors on a

$$(xx_1, y) \equiv (x' x_1, y') \quad (\mathcal{L}_H), \quad \forall \ x_1 \in D$$

et

$$(x, y_1 y') \equiv (x', y_1 y) \quad (\mathcal{L}_H), \quad \forall \ y_1 \in D \quad ,$$

en particulier, $\mathcal{L}_H$ est une relation d'équivalence régulière à droite dans $\mathcal{D}$.

En effet, si $u \in (H \cdot\!\!^{\bullet}\, xx_1) \,^{\bullet}\!\!\cdot\, y$, on a $x_1 u \in (H \cdot\!\!^{\bullet}\, x) \,^{\bullet}\!\!\cdot\, y$, d'où $x_1 u \in (H \cdot\!\!^{\bullet}\, x') \,^{\bullet}\!\!\cdot\, y'$ ce qui entraine $u \in (H \cdot\!\!^{\bullet}\, x' x_1) \,^{\bullet}\!\!\cdot\, y$. De même, si $v \in (H \cdot\!\!^{\bullet}\, x' x_1) \,^{\bullet}\!\!\cdot\, y'$; $v \in (H \cdot\!\!^{\bullet}\, xx_1) \,^{\bullet}\!\!\cdot\, y$; par suite, on a bien

$$(x' x_1, y') \equiv (xx_1, y) \quad (\mathcal{L}_H) \quad .$$

Si $(x, y) \equiv (x', y')$ $(\mathcal{L}_H)$ pour tout $(x_1, y_1) \in \mathcal{D}$, on a

$$(xx_1, y) \equiv (x' x_1, y') \quad (\mathcal{L}_H)$$

ce qui donne $(xx_1, y_1 y) \equiv (x' x_1, y_1 y')$; soit

$$(x, y)(x_1, y_1) \equiv (x', y')(x_1, y_1) \quad (\mathcal{L}_H) \quad .$$

DÉFINITION 1.2. - L'ensemble des couples $(x, y) \in \mathcal{D}$ tels que $(H \cdot\!\!^{\bullet}\, x) \,^{\bullet}\!\!\cdot\, y = \emptyset$ sera appelé résidu de H dans $\mathcal{D}$ et noté $\mathcal{W}_H$.

THÉORÈME 1.2. - Si $\mathcal{W}_H \neq \emptyset$, c'est une classe modulo $\mathcal{L}_H$ et un idéal à droite de $\mathcal{D}$.

DÉFINITION 1.3. - Nous considérerons dans D les relations suivantes

$x \equiv x'$ (L_H) si pour $\forall \ y \in D$ on a $(x, y) \equiv (x', y)$ $(\mathcal{L}_H)$

$y \equiv y'$ $({}_H L)$ si pour $\forall \ x \in D$ on a $(x, y) \equiv (x, y')$ $(\mathcal{L}_H)$

L_H et ${}_H L$ sont évidemment des relations d'équivalence, et, d'après le théorème 1, on peut dire que L_H est régulière à droite et ${}_H L$ régulière à gauche.

Soit $\overline{W}_H = \{x$, tels que, pour tout y, $(x, y) \in \mathcal{W}_H\}$. $\overline{W}_H$ constitue donc une classe modulo L_H.

$x \in \overline{W}_H \rightleftarrows$ il n'existe pas de produit uy avec $xuy \in H \rightleftarrows (H \cdot\!\!^{\bullet}\, x) \cap D^2 = \emptyset$.

Par suite $\overline{W}_H$ contient le résidu à droite W_H de H dans D (P. DUBREIL [3]).

$\overline{W}_H$ est un idéal à droite, on a même $\overline{W}_H D \subsetneq W_H \subseteq \overline{W}_H$ c'est-à-dire $\overline{W}_H \subseteq W_H \,{}^{\bullet}.\, D$. Mais d'autre part si $a \in W_H \,{}^{\bullet}.\, D$, $aD \subseteq W_H$, ce qui donne $a \in \overline{W}_H$. D'où

THÉORÈME 1.3. - Le résidu à droite W_H de H dans D est inclus dans une classe modulo L_H, cette classe étant $W_H \,{}^{\bullet}.\, D$.

THÉORÈME 1.4. - $x \equiv x' \ (L_H) \ \rightleftarrows \ (H \,.^{\bullet}\, x) \cap D^2 = (H \,.^{\bullet}\, x') \cap D^2$.

Soit $x \equiv x' \ (L_H)$. Si $uy \in (H \,.^{\bullet}\, x) \cap D^2$, on a $u \in (H \,.^{\bullet}\, x) \,{}^{\bullet}.\, y$, d'où

$$u \in (H \,.^{\bullet}\, x') \,{}^{\bullet}.\, y \implies uy \in (H \,.^{\bullet}\, x) \cap D^2 .$$

Si $(H \,.^{\bullet}\, x) \cap D^2 = (H \,.^{\bullet}\, x') \cap D^2$, et si, pour un y, on a $u \in (H \,.^{\bullet}\, x) \,{}^{\bullet}.\, y$, on voit que $u \in (H \,.^{\bullet}\, x') \,{}^{\bullet}.\, y$ et inversement.

COROLLAIRE. - La relation d'équivalence principale R_H est incluse dans L_H.

Si H est fort, R_H et L_H coïncident sur $D - \overline{W}_H$.

Si D est globalement idempotent, $R_H = L_H$.

Si H est bilatèrement fort (R. CROISOT [2]) et si D est commutatif, $L_H = R'_H$ (équivalence principale bilatère).

<u>Nature de</u> $\mathfrak{W}_H$. - $\mathfrak{W}_H \supseteq (\overline{W}_H , D) \cup (D , {}_H\overline{W})$, ${}_H\overline{W}$ étant l'ensemble des $y \in D$ tels que $\forall \ x \in D$, $(x , y) \in \mathfrak{W}_H$.

Si $(a , b) \in \mathfrak{W}_H - (\overline{W}_H , D) \cup (D , {}_H\overline{W})$, $a \notin \overline{W}_H$, donc il existe u , x avec $aux = k \in K = H \cap D^3$; de même $b \notin {}_H\overline{W}$, $\exists \ y , v$ avec $yvb = k' \in K$.

$$(a , b) \in \mathfrak{W}_H \implies (a , b)(ux , yv) = (k , k') \in \mathfrak{W}_H .$$

Donc si $(K , K) \cap \mathfrak{W}_H = \emptyset$, on a

$$\mathfrak{W}_H = (\overline{W}_H , D) \cup (D , {}_H\overline{W}) .$$

Cette condition est en particulier remplie si $H^3 \subset H$, donc si H est un sous-demi-groupe. Dans ce cas, on a de plus $\overline{W}_H = W_H$, ${}_H\overline{W} = {}_HW$.

En effet, soit $x \notin W_H$, il existe y avec $xy \in H$, mais alors pour tout $h \in H$,

$$xyh \in H \implies x \notin \overline{W}_H .$$

2. H <u>est un complexe semi-fort, ou b-fort.</u>

DÉFINITION 2.1. - b-fort signifie bilatèrement fort au sens de CROISOT [3].

Un complexe H sera dit semi-fort à droite, si, pour tout x tel que $H \mathbin{^{\bullet}.} x \neq \emptyset$, $H \mathbin{^{\bullet}.} x$ est un complexe fort.

PROPRIÉTÉ 2.1. - Tout complexe b-fort est semi-fort (à droite et à gauche). Ceci résulte de ce que

$$H \text{ b-fort} \rightleftarrows (H \mathbin{.^{\bullet}} x) \mathbin{^{\bullet}.} y \between (H \mathbin{.^{\bullet}} x') \mathbin{^{\bullet}.} y' \Longrightarrow (H \mathbin{.^{\bullet}} x) \mathbin{^{\bullet}.} y = (H \mathbin{.^{\bullet}} x') \mathbin{^{\bullet}.} y'$$

PROPRIÉTÉ 2.2. - Tout complexe fort est semi-fort.

On vérifie aisément que si H est fort, $H \mathbin{^{\bullet}.} x$ est fort à gauche.

PROPRIÉTÉ 2.3. - Les complexes semi-forts à droite forment une famille de Moore.

<u>Construction de la fermeture de Moore associée</u>. - H étant un complexe donné, on construit

$$T^1_{(x,y)} = \bigcup_{x' \in D} \{x'[(H \mathbin{.^{\bullet}} x) \mathbin{^{\bullet}.} y]\, y \text{ si ceci rencontre } H.\}$$

$$H_1 = H \cup \Big(\bigcup_{x,y \in D} T^1_{(x,y)} \Big)$$

H_1 étant ainsi obtenu, on construit H_2 à partir de H_1 comme on a construit H_1 à partir de H, etc.

On a donc

$$H \subseteq H_1 \subsetneqq H_2 \subsetneqq \ldots \subseteq H_n \subsetneqq \ldots$$

Soit $\overline{H} = \bigcup_n H_n$.

On vérifie :

1° que $\overline{H}$ est un complexe semi-fort à droite ;

2° que si K est un complexe semi-fort à droite, contenant H, il contient $\overline{H}$.

$\overline{H}$ est bien la fermeture de Moore pour H associée à la famille de Moore formée par les complexes semi-forts à droite.

Pour la fermeture semi-forte, on remplace $T^1_{(x,y)}$ par

$$\bigcup_{x',y' \in D} \{x'[(H \mathbin{.^{\bullet}} x) \mathbin{^{\bullet}.} y]\, y \text{ et } x[(H \mathbin{.^{\bullet}} x) \mathbin{^{\bullet}.} y]\, y' \text{ s'ils rencontrent } H\}.$$

Pour la fermeture b-forte, on pose

$$T^1_{(x,y)} = \bigcup_{x',y' \in D} \{x'[(H \mathbin{.^{\bullet}} x) \mathbin{^{\bullet}.} y]\, y' \text{ si ceci rencontre } H\}.$$

THÉORÈME 2.1. - Si H est un complexe b-fort, il existe une bijection entre

$$\{\mathcal{O}/\mathcal{L}_H - \mathcal{W}_H\} \quad \text{et} \quad \{D/R'_H - W'_H\}$$

Soit $\overline{(x\ ,\ y)}$ la classe modulo $\mathcal{L}_H$ contenant $(x\ ,\ y)$ dans $\mathcal{O}$.

Soit $\overline{a}$ la classe modulo R'_H contenant a dans D .

Si $\overline{(x\ ,\ y)} \neq \mathcal{W}_H$, il existe $u \in (H .^{\bullet} x) {}^{\bullet}. y$

$$u \in (H .^{\bullet} x) {}^{\bullet}. y \rightleftharpoons (x\ ,\ y) \in H \,..\, u$$

donc

$$\overline{(x\ ,\ y)} \subseteq H \,..\, u$$

pour tout $u \in (H .^{\bullet} x) {}^{\bullet}. y$.

Si $(x'\ ,\ y') \in H \,..\, u$, on a

$$u \in (H .^{\bullet} x) {}^{\bullet}. y \cap (H .^{\bullet} x') {}^{\bullet}. y' \quad ,$$

H étant b-fort, on en déduit que $(x'\ ,\ y') \in \overline{(x\ ,\ y)}$.

Donc $\overline{(x\ ,\ y)} = H \,..\, u$ pour tout $u \in (H .^{\bullet} x) {}^{\bullet}. y$.

On montre de même que, si $\overline{a} \neq W'_H$,

$$\overline{a} = (H .^{\bullet} x) {}^{\bullet}. y \quad \text{pour tout couple } (x\ ,\ y) \in H \,..\, a \quad .$$

Soit φ l'application de $(\mathcal{O}/\mathcal{L}_H - \mathcal{W}_H)$ dans $(D/R'_H - W'_H)$ définie par :

$$\varphi[\overline{(x\ ,\ y)}] = (H .^{\bullet} x) {}^{\bullet}. y \quad .$$

On voit que φ est une application injective qui a pour application inverse

$$\psi : \ \psi(\overline{a}) = H \,..\, a \quad .$$

THÉORÈME 2.2. - Si H est semi-fort à droite et si $(ax\ ,\ c) \equiv (bx\ ,\ c) \ (\mathcal{L}_H)$ avec $(ax\ ,\ c) \notin \mathcal{W}_H$, alors $(a\ ,\ c) \equiv (b\ ,\ c) \ (\mathcal{L}_H)$. De même

$$(a\ ,\ xc) \equiv (b\ ,\ xc) \ \text{ et } \ (a\ ,\ xc) \notin \mathcal{W}_H \implies (a\ ,\ c) \equiv (b\ ,\ c) \ (\mathcal{L}_H) .$$

Si H est b-fort , alors

$(ax\ ,\ c) \equiv (bx\ ,\ d) \ (\mathcal{L}_H)$ avec $(ax\ ,\ c) \notin \mathcal{W}_H$ entraine $(a\ ,\ c) \equiv (b\ ,\ d) \ (\mathcal{L}_H)$

$(a\ ,\ yc) \equiv (b\ ,\ yd) \ (\mathcal{L}_H)$ avec $(a\ ,\ yc) \notin \mathcal{W}_H$ entraine $(a\ ,\ c) \equiv (b\ ,\ d) \ (\mathcal{L}_H)$

donc $\mathcal{L}_H$ est simplifiable à droite dans $\mathcal{O} - \mathcal{W}_H$.

Soit H semi-fort à droite, $(ax\ ,\ c) \notin \mathcal{W}_H$, donc il existe

$$u \in (H \cdot\!\!\cdot\, ax) \cdot\!\!\cdot\, c \cap (H \cdot\!\!\cdot\, bx) \cdot\!\!\cdot\, c \implies xu \in (H \cdot\!\!\cdot\, a) \cdot\!\!\cdot\, c \cap (H \cdot\!\!\cdot\, b) \cdot\!\!\cdot\, c$$

Mais $H \cdot\!\!\cdot\, c$ est fort, donc $(H \cdot\!\!\cdot\, a) \cdot\!\!\cdot\, c = (H \cdot\!\!\cdot\, b) \cdot\!\!\cdot\, c$; par suite,

$$(a , c) \equiv (b , c) \quad (\mathcal{L}_H) \quad .$$

COROLLAIRE. - Si H est semi-fort à droite et si $(K , K) \cap \mathfrak{W}_H = \emptyset$, où $K = H \cap D^3$, alors L_H est simplifiable à droite dans $D - \overline{W}_H$.

Soit $ac \equiv bc \quad (L_H)$ avec $ac \notin \overline{W}_H$, si $y \in {}_H\overline{W}$, on a (a , y) et $(b , y) \in \mathfrak{W}_H$, donc $(a , y) \equiv (b , y) \quad (\mathcal{L}_H)$.

Si $y \notin {}_H\overline{W}$ d'après l'hypothèse $(ac , y) \in \mathfrak{W}_H$, mais alors le théorème 2.2 entraine $(a , y) \equiv (b , y) \quad (\mathcal{L}_H)$.

D'où pour $\forall \ y$, on a $(a , y) \equiv (b , y) \quad (\mathcal{L}_H)$; par suite $a \equiv b \quad (L_H)$.

THEOREME 2.3. - Soient H un complexe, A une classe modulo L_H , différente de $\overline{W}_H$.

a. On a $\overline{W}_H \subseteq \overline{W}_A$ et $L_H \subseteq L_A$; si de plus $H \subseteq A$, alors $\overline{W}_H = \overline{W}_A$.

b. Si H est semi-fort à droite et si $\mathfrak{W}_H$ vérifie la condition suivante

$$xuy \equiv x'uy \equiv xvy \quad (L_H) \ , \quad xuy \notin \overline{W}_H \ , \quad (xuy , z) \in \mathfrak{W}_H \implies (x'vy , z) \in \mathfrak{W}_H$$

alors A est un complexe semi-fort à droite.

c. Si H est semi-fort, A est fort.

d. Si H est b-fort, A est fort et b-fort.

Démontrons par exemple (c). - Soient $u \in A \cdot\!\!\cdot\, x \cap A \cdot\!\!\cdot\, x'$ et $v \in A \cdot\!\!\cdot\, x$. On a $xu \equiv x'u \equiv xv \quad (L_H)$, car ils appartiennent à A . Si pour y on a $(xu , y) \notin \mathfrak{W}_H$, alors le théorème 2.2 donne

$$(x , y) \equiv (x' , y) \quad (\mathcal{L}_H) \quad \text{d'où le théorème 1.1} \implies (xv , y) \equiv (x'v , y) \ .$$

Supposons que pour z on ait $(xu , z) \in \mathfrak{W}_H$ et $(x'v , z) \notin \mathfrak{W}_H$, il existe donc β avec $x'v\beta z \in H$.

$A \neq \overline{W}_H$, il existe donc α et y avec $xu\alpha y$, $x'u\alpha y$, $x'v\alpha y \in H$.

$$v \in (H \cdot\!\!\cdot\, x') \cdot\!\!\cdot\, \beta z \cap (H \cdot\!\!\cdot\, x') \cdot\!\!\cdot\, \alpha y \quad ;$$

mais H , semi-fort à gauche, donne $(H \cdot\!\!\cdot\, x') \cdot\!\!\cdot\, \beta z = (H \cdot\!\!\cdot\, x') \cdot\!\!\cdot\, \alpha y$. Or $u \in (H \cdot\!\!\cdot\, x') \cdot\!\!\cdot\, \alpha y$; par suite $x'u\beta z \in H$, mais ceci contredit le fait que $(x'u , z) \in \mathfrak{W}_H$. Nous avons montré que, pour tout y , $(xu , y) \equiv (x'v , y) \quad (\mathcal{L}_H)$;

par suite

$$xu \equiv x'v \quad (L_H) \implies x'v \in A \implies A \text{ fort .}$$

THÉORÈME 2.4. - Soit H un complexe semi-fort à droite. Soit S un sous-demi-groupe inclus dans H et tel que $SH \subseteq H$, alors

a. S est inclus dans une classe $\mathcal{U}_S$ modulo $L_H \neq \overline{W}_H$.

b. $\mathcal{U}_S$ est un sous-demi-groupe unitaire à droite.

c. C'est le plus petit complexe unitaire à droite contenant S, si $K = D^3 \cap H$ est inclus dans S.

a. Si $(s, y) \in \mathcal{W}_H$ avec $s \in S$, alors $y \in {}_H\overline{W}$; en effet, si on avait x, α avec $x\alpha y \in H$, on aurait $sx\alpha y \in H$, d'où $x\alpha \in (H \,.^{\bullet}\, s) \,^{\bullet}.\, y$. Donc si $(s, y) \in \mathcal{W}_H$, $(s', y) \in \mathcal{W}_H$ pour $\forall\ s' \in S$, soit $(s, y) \equiv (s', y) \quad (\mathcal{L}_H)$. Si $(s, y) \notin \mathcal{W}_H$, $\exists\ \alpha$ avec $s\alpha y \in H$; mais alors $s.s\alpha y \in H$, $s's\alpha y \in H$; par suite $s\alpha \in (H \,.^{\bullet}\, s) \,^{\bullet}.\, y \cap (H \,.^{\bullet}\, s') \,^{\bullet}.\, y$, $\forall\ s'$; comme H est semi-fort à droite, on a $(s, y) \equiv (s', y) \quad (\mathcal{L}_H)$, d'où $s \equiv s' \quad (L_H)$, $\forall\ s'$; S est bien inclus dans une seule classe $\mathcal{U}_S$.

b. $\mathcal{U}_S$ est un sous-demi-groupe. Montrons d'abord que $u \equiv s \quad (L_H)$ entraîne $su \equiv s \quad (L_H)$. $(s, y) \in \mathcal{W}_H$, on a $(su, y) \in \mathcal{W}_H$. Si $(s, y) \notin \mathcal{W}_H$, $(u, y) \notin \mathcal{W}_H$, d'où $\exists\ \alpha$ avec $u\alpha y \in H$, $s\alpha y \in H$; mais

$$SH \subset H \implies su\alpha y \in H \implies \alpha \subset (H \,.^{\bullet}\, s) \,^{\bullet}.\, y \cap (H \,.^{\bullet}\, su) \,^{\bullet}.\, y \quad ;$$

par suite $(s, y) \equiv (su, y) \quad (\mathcal{L}_H)$ et $s \equiv su \quad (L_H)$.

Si $u_1, u_2 \in \mathcal{U}_S$, on a $u_1 \equiv s \quad (L_H)$, $u_2 \equiv s \quad (L_H)$; d'où comme L_H est régulière à droite, $u_1 u_2 \equiv su_2 \quad (L_H)$, mais $su_2 \equiv s$, d'où

$$u_1 u_2 \equiv s \implies u_1 u_2 \in \mathcal{U}_S \quad .$$

b'. $\mathcal{U}_S$ est unitaire à droite. Soit $xu \equiv s \ (L_H)$ et $u \equiv s \ (L_H)$.

Si $(xu, y) \in \mathcal{W}_H$, $(s, y) \in \mathcal{W}_H \implies (x, y) \in \mathcal{W}_H$.

Si $(xu, y) \notin \mathcal{W}_H$, $\exists\ \alpha$ avec $xu\alpha y \in H$, $s\alpha y \in H$, $u\alpha y \in H$ mais alors $su\alpha y \in H$, d'où $(s, y) \equiv (x, y) \quad (\mathcal{L}_H)$; par suite $s \equiv x \quad (L_H)$, $x \in \mathcal{U}_S$.

c. Si $S \subseteq V$, V étant unitaire à droite, alors, pour $\forall\ u \in \mathcal{U}_S$, on a $us^2 \in H$, car $s^3 \in H$, donc $us^2 \in H \cap D^3 = K \subseteq S$; d'où $us^2 \in V$; comme $s^2 \in S \subseteq V$, on a bien $u \in V$.

COROLLAIRE.

1° Un sous-demi-groupe semi-fort à droite S est contenu dans une classe $\mathcal{U}_S$ modulo $L_S \neq W_S$. $\mathcal{U}_S$ est un sous-demi-groupe fort et unitaire à droite.

2° $\mathcal{U}_S$ est le plus petit complexe unitaire à droite contenant S . Donc, pour que $\mathcal{U}_S = S$, il faut et il suffit que S soit unitaire à droite, et alors S est fort.

3° On a

$$W_S = \overline{W}_S = \overline{W}_{\mathcal{U}_S} = W_{\mathcal{U}_S} \ , \quad L_S = L_{\mathcal{U}_S} = R_{\mathcal{U}_S} \qquad .$$

THÉORÈME 2.5. - Soit S un sous-demi-groupe semi-fort, alors

a. ${}_S\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}_S + W_S$ et $\mathcal{U}_S \subseteq {}_S\mathcal{U} + {}_SW$.

b. Si $W_S \subset {}_SW$, alors ${}_S\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}_S$, donc si S est équirésiduel, ses deux enveloppes unitaires à gauche et à droite coïncident.

c. Si S est unitaire à gauche, par rapport à $\mathcal{U}_S$ (c'est-à-dire si $sx \in S$, $s \in S \implies x \in \mathcal{U}_S$) , on a, pour $\forall\ a \in D$ et $\forall\ u \in \mathcal{U}_S$,

$$ua \equiv a \quad (L_S) \ .$$

d. Si S est équirésiduel, alors $W = {}_SW = W_S$ est un idéal premier.

3. Propriétés bilatères.

Nous supposerons maintenant que ${}_HL = L_H = L$; nous dirons que H est L-symétrique, si de plus, on a $\overline{W}_H = {}_H\overline{W} = \overline{W}$.

$L_H = {}_HL$ est vérifiée par exemple si

$$(x \ , \ y) \equiv (x' \ , \ y') \quad (\mathcal{L}_H) \implies (y \ , \ x) \equiv (y' \ , \ x') \quad (\mathcal{L}_H) \quad .$$

Dans ce cas $\mathcal{L}_H$ est régulière dans $\mathcal{D}$.

THÉORÈME 3.1. - Soit S un sous-demi-groupe semi-fort, L-symétrique.

a. Si S est net, alors D/L est un groupe.

b. Si S est non net, D/L est un pseudo-groupe.

C'est une conséquence du corollaire du théorème 2.4 et des théorèmes 26 et 27 de [3].

PROPRIÉTÉ 3.1. - Soit H un complexe semi-fort, L-symétrique. Si $H \subseteq D^3$ et si $H \cap \overline{W} = \emptyset$, alors H est saturé dans D^3 pour L.

Soit $xyz \equiv h \ (L)$ avec $h = pqr$ puisque $H \subseteq D^3$; $\exists\ u , v$ avec $pqruv \in H$; comme $(xyz , v) \equiv (h , v) \ (\mathcal{L}_H)$, on a $xyzuv \in H$.

$pqr \in H$, $pqruv \in H$, H semi-fort à gauche $\Longrightarrow (p , ruv) \equiv (p , r) \ (\mathcal{L}_H)$ et le théorème 1.1 entraine $(pqr , pqruv) \equiv (pqr , pqr)$.

$$xyz \equiv pqr \ (L) \Longrightarrow xyzuv \equiv pqruv \ (L)$$

d'où

$$(pqr , pqr) \equiv (pqr , pqruv) \equiv (xyz , xyz) \equiv (xyz , xyzuv) \quad (\mathcal{L}_H) \quad .$$

$xyz \notin \overline{W}$, car $h \notin \overline{W}$, et H semi-fort à gauche $\Longrightarrow (x , z) \equiv (x , zuv) \ (\mathcal{L}_H)$. Or $xyzuv \in H$; d'où $xyz \in H$; H est bien saturé dans D^3.

THÉORÈME 3.2. - Soit H un complexe semi-fort, L-symétrique, tel que $\overline{W}_H = \emptyset$; alors pour que $F = D/L$ soit un groupe, il faut et il suffit que $K = H \cap D^3$ soit inclus dans une seule classe modulo L. Dans ce cas, K est un complexe fort dans D^2, saturé dans D^3 pour L.

Supposons K inclus dans une seule classe A modulo L. D'après le théorème 7, comme nous avons $L_H = {}_H L = L_K = {}_K L$, $\overline{W}_H = {}_H\overline{W} = \overline{W}_K = {}_K\overline{W} = \emptyset$, nous en déduisons que A est un complexe fort tel que $\overline{W}_K = \overline{W}_A = {}_A\overline{W} = {}_K\overline{W} = \emptyset$; $L_K = L_A = R_A$, ${}_K L = {}_A L = {}_A R$, donc A est fort, symétrique, net, d'après le théorème 1 de [1], $F = D/L = D/R$ est un groupe.

D'après la propriété 3.1 $A \cap D^3 = K$; si $a , b \in D^2$ et si $au \in K$, $bu \in K$, $av \in K$, on a $bv \in A \cap D^3 = K$. Donc K est bien un complexe font dans D^2.

Supposons que F soit un groupe. Nous pouvons considérer que $F = D^3/L'$, où L' est la restriction de L à D^3. Donc F est une image homomorphe de D^3, K étant semi-fort dans D^3 et saturé pour L dans D^3 d'après la propriété 3.1. Son image $\bar{K}$ dans F est un complexe semi-fort dans F. Mais un complexe semi-fort à droite dans un groupe est un complexe fort. En effet, si $\bar{K} \bullet\!. \ x \cap \bar{K} \bullet\!. \ y \neq \emptyset$, ceci s'écrit $(\bar{K} \bullet\!. \ e) \bullet\!. \ x \cap (\bar{K} \bullet\!. \ e) \bullet\!. \ y \neq \emptyset$, et si $\bar{K}$ est semi-fort à droite, on a bien

$$\bar{K} \bullet\!. \ x = \bar{K} \bullet\!. \ y \quad .$$

On en déduit que K est fort dans D^2 ; en effet, si $a , b \in b^2$ et au , bu , av $\in K \Rightarrow AU , BU , AV \in \bar{K} \Rightarrow BV \in \bar{K}$, d'où $bv \in K$. (A désigne image de a dans $\varphi : D \to F$.)

En considérant que $F = D^2/L''$, L'' restriction de L à D^2 , on a $L_H = L_K$; mais K étant fort et net dans D^2 , on a $L'' = R$, équivalence principale associée à K . Mais alors le théorème 1 de [1] nous permet d'affirmer que $K \cap D^4$ est parfait.

Soient k_1 et $k_2 \in K$, il existe x_1 , x_2 avec $k_1 x_1 \in H \cap D^4 = K \cap D^4$, et de même $k_2 x_2 \in K \cap D^4$. On a donc $K_1 X_1 = K_2 X_2$. Mais $k_1 \in K$, $k_1 = a_1 b_1 c_1$, on a donc

$$a_1 b_1 c_1 \in K , \quad a_1 b_1 c_1 x_1 \in K , \quad K \text{ étant fort dans } D^2 ,$$

ceci entraine que $b_1 c_1 \equiv b_1 c_1 x_1 \quad R_K$; d'où $B_1 C_1 = B_1 C_1 X_1$, d'où $X_1 = E$; et on a de même $X_2 = E$; par suite $K_1 = K_2$. K est bien inclus dans une classe modulo L .

Supposons toujours H semi-fort et L-symétrique, mais $W_H \neq \emptyset$.

Soit N'_d $\{X \in F$ tels que $XY = \bar{W} \Rightarrow Y = \bar{W}\}$ où F désigne toujours D/L .
Soit $N' = N'_d \quad N'_g$.

THÉORÈME 3.3. – Soit H un complexe semi-fort, L-symétrique tel que $K = D^3 \cap H$ soit inclus dans une classe modulo L et que $(K , K) \cap W_H = \emptyset$; alors si N' est différent de la partie vide, c'est un groupe.

4. Idéaux D^2 fermés à droite.

DÉFINITION 4.1. – Un idéal à droite m est dit D^2-fermé à droite s'il existe un complexe H tel que $m = H \cdot. D^2$.

On sait [5] que ces idéaux sont caractérisés par $m = m D^2 \cdot. D^2$.

THÉORÈME 4.1. – Pour que l'idéal à droite $|A)$ engendré par un complexe A soit D^2 fermé à droite, il faut et il suffit que l'on ait

$$AD^2 \cdot. D^2 \subseteq A \cup AD \quad .$$

Condition nécessaire. – On a $A \subset |A) = A \cup AD$.

$$AD^2 \cdot. D^2 \subseteq |A) D^2 \cdot. D^2 = |A) \quad .$$

<u>Condition suffisante</u>. - On a, pour toute partie X , $X \subseteq XD^2 \cdot\!\!. \ D^2$.

$$|A)\ D^2 \cdot\!\!.\ D^2 = \{[A \cup AD]\ D^2 \cdot\!\!.\ D^2\}$$

$$AD^3 \subseteq AD^2 \implies (AD^2 \cup AD^3) \cdot\!\!.\ D^2 = AD^2 \cdot\!\!.\ D^2 \quad ,$$

d'où

$$|A)\ D^2 \cdot\!\!.\ D^2 \subseteq |A)$$

et par suite

$$|A)\ D^2 \cdot\!\!.\ D^2 = |A) \quad .$$

Dans la suite $\overline{W}_H$ sera appelé le L-résidu à droite de H . Un complexe H sera dit L-équirésiduel si $\overline{W}_H = {}_H\overline{W}$.

THÉORÈME 4.2. - Pour qu'un idéal à droite soit L-résidu à droite d'un complexe, il faut et il suffit qu'il soit D^2-fermé à droite.

Pour que deux complexes H et H' aient même L-résidu à droite, il faut et il suffit que nous ayons $(D - H) \cdot\!\!.\ D^2 = (D - H') \cdot\!\!.\ D^2$, ou encore que $D - H \equiv D - H' \ ({}_{D^2}\mathfrak{N})$ [5].

Or toute classe modulo ${}_{D^2}\mathfrak{N}$ admet un élément minimum, donc l'ensemble des complexes H admettant même L-résidu a un élément maximum qui est $H = D - XD^2$.

Les idéaux D^2-fermés à droite sont les éléments maximum des classes modulo $\mathfrak{M}_{D^2}$ définie dans [5]. Pour que tous les idéaux à droite d'un demi-groupe D soient D^2-fermés, il faut et il suffit que toute classe modulo $\mathfrak{M}_{D^2}$ contienne un seul élément, donc que $\mathfrak{m} D^2 = \mathfrak{m}' D^2 \implies \mathfrak{m} = \mathfrak{m}'$ où $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}' \in \mathcal{P}^*$ demi-groupe multiplicatif des idéaux à droite de D . Cette condition est équivalente au fait que D est simplifiable dans $\mathcal{P}^*$ d'où le théorème suivant.

THÉORÈME 4.3. - Pour que dans un demi-groupe D , tous les idéaux à droite soient D^2-fermés à droite, il faut et il suffit qu'ils soient fermés à droite.

THÉORÈME 4.4. - Pour qu'un idéal bilatère X soit L-résidu d'un complexe L-équirésiduel, il faut et il suffit que l'on ait

$$XD^2 \cdot\!\!.\ D^2 \subseteq X \ ;\ XD^2 \ .\!\!\cdot\ D^2 \subseteq X \ ;\ D^2 X \cdot\!\!.\ D^2 \subseteq X \ ;\ D^2 X \ .\!\!\cdot\ D^2 \subseteq X \quad .$$

La première et la dernière conditions sont équivalentes à $XD^2 \cdot\!\!.\ D^2 = X$ et

$D^2X \mathbin{.^{\bullet}} D^2 = X$, car on a toujours les inclusions inverses. Donc X est L-résidu à droite et L-résidu à gauche. Le complexe maximum admettant X comme L-résidu est

$$H = (D - XD^2) \cap (D - D^2X) = D - (XD^2 \cup D^2X) \quad ;$$

d'où les conditions nécessaires et suffisantes suivantes

$$(D - H) \mathbin{^{\bullet}.} D^2 = X \qquad (D - H) \mathbin{.^{\bullet}} D^2 = X$$

qui s'écrivent

$$(XD^2 \cup D^2X) \mathbin{^{\bullet}.} D^2 = X \iff \begin{cases} XD^2 \mathbin{^{\bullet}.} D^2 \subseteq X \\ D^2X \mathbin{^{\bullet}.} D^2 \subseteq X \end{cases} ;$$

$$(XD^2 \cup D^2X) \mathbin{.^{\bullet}} D^2 = X \iff \begin{cases} XD^2 \mathbin{.^{\bullet}} D^2 \subseteq X \\ D^2X \mathbin{.^{\bullet}} D^2 \subseteq X \end{cases} .$$

DÉFINITION 4.2. - D^3 est dit simple à droite s'il ne contient pas d'idéal à droite propre.

THÉORÈME 4.5. - D étant un demi-groupe, pour que D^3 soit simple à droite, il faut et il suffit que tout idéal à droite $M \neq \emptyset$ de D contienne D^3 .

<u>Condition nécessaire</u>. - Si M est un idéal à droite, $M \neq \emptyset$, $M \cap D^3 \neq \emptyset$ et $M \cap D^3$ est un idéal à droite de D^3 donc $M \cap D^3 = D^3$.

<u>Condition suffisante</u>. - Soit M un idéal à droite de D^3 , MD^3 est un idéal à droite de D ; mais,

$$M \subseteq D^3 \subseteq MD^3 \subseteq M \implies M = D^3 \quad .$$

THÉORÈME 4.6. - Pour que D^3 soit simple à droite, il faut et il suffit que D ne contienne pas d'idéaux D^2-fermés à droite.

<u>Condition nécessaire</u>. - Si N est un idéal à droite D^2-fermé, il est de la forme $ND^2 \mathbin{^{\bullet}.} D^2 = N$.

Mais ND^2 est un idéal à droite de D , donc $D^3 \subseteq ND^2$. Comme $ND^2 \subseteq D^3$, on a

$$ND^2 = D^3 \quad \text{et} \quad N = D^3 \mathbin{^{\bullet}.} D^2 = D \ .$$

<u>Condition suffisante</u>. - Supposons qu'il existe un idéal à droite N avec $D^3 \not\subseteq N$. Posons $N_3 = N \cap D^3$.

$\overline{W}_{D-N_3} \neq \emptyset$, car il contient N ; en effet $ND^2 \subseteq N \cap D^3 = N_3$;

$\overline{W}_{D-N_3} \neq 0$, car il existe au moins un élément $\in D^3 - N_3$.

Soit abc , $abc \in D - N_3 \implies a \notin \overline{W}_{D-N_3}$.

Or $\overline{W}_{D-N_3}$ est un idéal D^2-fermé à droite d'après le théorème 4.2.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CROISOT (Robert). - Propriétés des complexes forts et symétriques des demi-groupes, Bull. Soc. math. France, t. 80, 1952, p. 217-223.

[2] CROISOT (Robert). - Equivalences bilatères définies dans un demi-groupe, J. Math. pures et appl., Série 9, t. 36, 1957, p. 373-417.

[3] DUBREIL (Paul). - Contribution à la théorie des demi-groupes. - Paris, Gauthier-Villars, 1941 (Mémoires de l'Académie des Sciences de l'Institut de France, 2e série, t. 63, 52 p.).

[4] DUBREIL (Paul). - Contribution à la théorie des demi-groupes, III., Bull. Soc. math. France, t. 81, 1953, p. 289-306.

[5] DUBREIL (Paul). - Algèbre, t. 1, 2e édition. - Paris, Gauthier-Villars, 1954 (Cahiers scientifiques, 20).