Gisèle Vors

Neutrices ; application à la formule sommatoire d'Euler et aux équations aux différences finies

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 15, n° 1 (1961-1962), exp. n° 9, p. 1-20

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1961-1962__15_1_A6_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
15e année, 1961/62, n° 9

29 janvier 1962

NEUTRICES ; APPLICATION À LA FORMULE SOMMATOIRE D'EULER ET AUX ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES FINIES

par Mme Gisèle VORS

1. Définitions et propriétés.

On considère l'ensemble N' des fonctions réelles ou complexes $f(\xi)$ ayant pour domaine l'ensemble des réels. Une neutrice N est un sous-groupe additif de N' tel que $N \cap C = 0$ (C ensemble des fonctions constantes). Les fonctions $\nu(\xi)$, appartenant à la neutrice N , sont dites négligeables.

Remarque. - Si $\gamma \equiv \gamma_1 \pmod{N}$, alors $\gamma = \gamma_1$ puisque $N \cap C = 0$.

Par conséquent, si $g(\xi) \in N'$, et si $g(\xi) \equiv \gamma \pmod{N}$, alors cette constante γ est définie de façon unique. En effet, si

$$\left\{\begin{array}{l} g(\xi) \equiv \gamma \pmod{N} \\ \text{et} \\ g(\xi) \equiv \gamma_1 \pmod{N} \end{array}\right. ,$$

alors $\gamma \equiv \gamma_1 \pmod{N}$ et, d'après la remarque précédente, $\gamma = \gamma_1$. On en déduit la définition suivante :

On appelle valeur neutralisée le représentant unique dans l'ensemble des complexes du groupe quotient de N' par la neutrice N . Cette valeur neutralisée se note $g(N)$.

Exemple. - Toutes les fonctions qui peuvent être écrites sous la forme $p(\xi) + o(1)$, où $p(\xi)$ représente un polynôme en ξ sans terme constant, et où $o(1)$ représente une fonction de ξ , définie pour $\xi > 1$, qui tend vers zéro pour $\xi \to \infty$, forment une neutrice ayant pour domaine $1 < \xi < \infty$. En effet si $p(\xi) + o(1) = \gamma$ $(1 < \xi < \infty)$ où γ est indépendant de ξ , alors tous les coefficients figurant dans $p(\xi)$, ainsi que le terme constant γ , sont égaux à zéro, de telle sorte que N satisfait à la condition des neutrices. Comme $\int_1^\xi x\,dx = \frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{2}$, où $\frac{1}{2}\xi^2$ est négligeable dans N , on peut écrire

$$\int_1^N x\,dx = -\frac{1}{2} .$$

D'autre part, $\int_1^N \frac{dx}{d}$ ne convient pas puisque $\int_1^\xi \frac{dx}{x} = \log \xi$ ne peut être écrit comme une constante plus une fonction négligeable dans N .

Ceci signifie que la neutrice N est trop faible pour englober des intégrales de cette forme. Dans de tels cas, nous élargirons notre neutrice.

En d'autres termes, nous essaierons de construire une neutrice E telle que chaque fonction négligeable dans N soit certainement négligeable dans E , et que l'intégrale précédente obtienne une valeur quand on remplace N par E .

Par exemple, la neutrice E , formée par les fonctions de la forme $p(\xi) + c \log \xi + o(1)$, où les coefficients c sont des constantes complexes arbitraires, possède la propriété requise.

Le fait que E satisfait à la condition des neutrices est clair, car si $p(\xi) + c \log \xi + o(1) = \gamma \quad (1 < \xi < \infty)$ où γ est indépendant de ξ , alors tous les coefficients dans $p(\xi)$, ainsi que les coefficients c et γ , sont égaux à zéro.

La neutrice E a la propriété que $\int_1^E \frac{dx}{x} = 0$ puisque la fonction $\log \xi$ est négligeable dans E . Nous allons voir comment, en général, une telle extension est possible.

<u>Définition</u>. - Considérons un ensemble totalement ordonné de neutrices N_h : $N_h < N_{h+1}$. La réunion de ces neutrices est elle-même une neutrice. En effet si une fonction $\nu(\xi)$ appartient à la réunion U et est égale à une constante, alors $\nu(\xi)$ est négligeable dans au moins une neutrice N_h de telle sorte que $\gamma = 0$ d'après la condition des neutrices imposée à la neutrice N_h .

PROPRIÉTÉ 1. - Soit un ensemble totalement ordonné de neutrices N_h , $N_h < N_{h+1}$; si $f_h(\xi) \in N'$ a dans N_h une valeur neutralisée, alors $f_h(\xi)$ a dans U la même valeur neutralisée.

<u>Démonstration</u>. - Pour chaque élément ξ de N' , on a

$$f_h(\xi) = \gamma_h + \nu_h(\xi)$$

où $\gamma_h = f_h(N_h)$ et où $\nu_h(\xi)$ est négligeable dans U de telle sorte que $f_h(\xi)$ a dans U , la valeur neutralisée γ_h .

PROPRIÉTÉ 2. - On demande à N d'être maintenant un espace vectoriel sur l'ensemble Q des nombres rationnels.

Pour chaque fonction $f(\xi) \in N'$, il est possible de trouver une neutrice M avec les propriétés suivantes :

1° $f(\xi)$ a dans M une valeur neutralisée ;

2° $N < M$;

3° M est un espace vectoriel sur Q .

Démonstration. - Si $f(\xi)$ a dans N une valeur neutralisée, alors $M = N$ a la propriété cherchée. Si $f(\xi)$ n'a pas dans N de valeur neutralisée, alors on choisit pour M la suite formée par les fonctions de la forme

$$\mu(\xi) = \rho[f(\xi) - \gamma_0] + \nu(\xi) \quad ,$$

où γ_0 est une constante donnée, où les coefficients ρ sont des constantes arbitraires rationnelles et où les termes $\nu(\xi)$ représentent des fonctions arbitraires négligeables dans N .

En effet, si $\mu(\xi) = \gamma$, où γ est constante, alors $\rho = 0$, sinon,

$$f(\xi) = -\frac{\nu(\xi)}{\rho} + \gamma_0 + \frac{\gamma}{\rho}$$

aurait dans N la valeur neutralisée $\gamma_0 + \frac{\gamma}{\rho}$, contrairement aux hypothèses ; $\rho = 0$ implique $\nu(\xi) = \gamma$, alors $\gamma = 0$.

En choisissant $\rho = 1$ et $\nu(\xi) = 0$, on voit que $f(\xi) - \gamma_0$ est négligeable dans M de telle sorte que $f(\xi)$ a dans M la valeur neutralisée γ_0 .

En choisissant $\rho = 0$, on voit que chaque fonction $\mu(\xi)$, négligeable dans N , est aussi négligeable dans M .

PROPRIÉTÉ 3. - Soit N une neutrice qui est un espace vectoriel sur $\mathbf{Q}$.

Si les fonctions $f_h(\xi)$ $(h = 0 , 1 , 2 , \ldots) \in N'$, il est alors possible de trouver une neutrice U , ayant pour domaine N' , telle que chaque fonction négligeable en N soit négligeable en U , et que chaque fonction $f_h(\xi)$ ait dans U une valeur neutralisée.

Démonstration. - D'après la propriété précédente, nous pouvons construire une neutrice N_0 telle que $N < N_0$ et que $f_0(\xi)$ ait dans N_0 une valeur neutralisée. N_0 est un espace vectoriel sur Q .

De même, on peut construire N_1 telle que $N < N_0 < N_1$ et telle que $f_1(\xi)$

ait dans N_1 une valeur neutralisée, et ainsi de suite. On a

$$N < N_o < N_1 < \dots < N_h < N_{h+1} \quad .$$

La réunion U de ces neutrices possède, d'après la propriété 1, la propriété requise.

2. Neutrices intégrales.

Soit $a < b$; a peut être $-\infty$, b peut être $+\infty$.

On dit qu'une fonction est intégrable de a+ à b si elle est intégrable de α à b pour chaque α pris entre a et b . On dit qu'une fonction est intégrable de a à b- si elle est intégrable de a à β pour chaque β pris entre a et b . On dit qu'une fonction est intégrable de a+ à b- , si elle est intégrable de α à β pour 2 points quelconques $a < \alpha < \beta < b$.

Une <u>neutrice intégrale</u> I_{a+} , avec pour domaine $a < \xi < b$, est une neutrice ayant les 2 propriétés suivantes :

1° pour chaque $g(x)$ intégrable de a à b- , la fonction $\int_a^\xi g(x)\,dx$ est négligeable dans I_{a+} ;

2° I_{a+} est un espace vectoriel sur Q .

L'existence de telles neutrices se déduit du théorème suivant

THÉORÈME. - Soit N une neutrice avec pour domaine $a < \xi < b$, ayant les 2 propriétés suivantes :

(1) Chaque fonction, définie dans $a < \xi < b$ et tendant vers zéro quand ξ tend vers a , est négligeable dans N ;

(2) N est un espace vectoriel sur Q .

N est une neutrice intégrale I_{a+} .

<u>Démonstration</u>. - L'intégrale $\int_a^\xi g(x)\,dx$ tend vers zéro quand $\xi \to a$, et est alors négligeable dans N .

Soit I_{a+} une neutrice intégrale arbitraire ayant pour domaine $a < \xi < b$. Soit $\beta \geq b$.

Nous disons qu'une fonction intégrable de a+ à β <u>est intégrable de</u> I_{a+} <u>à</u> β si la fonction

$$\int_\xi^b f(x)\,dx \qquad (a < \xi < b)$$

a dans I_{a+} <u>une valeur neutralisée</u>. Cette valeur neutralisée est désignée par la notation

$$\int_{I_{a+}}^{\beta} f(x)\ dx \quad .$$

THÉORÈME. – Si I_{a+} est une neutrice intégrale ayant pour domaine $a < \xi < b$, et si $f(x)$ est intégrable de a à β où $\beta \geqslant b$, alors $f(x)$ est certainement intégrable de I_{a+} à β, et on a

$$\int_{I_{a+}}^{\beta} f(x)\ dx = \int_a^{\beta} f(x)\ dx \quad .$$

<u>Démonstration</u>. – Par définition l'intégrale

$$\int_a^{\xi} f(x)\ dx$$

est négligeable dans I_{a+} ; ainsi

$$\int_{\xi}^{\beta} f(x)\ dx = \int_a^{b} f(x)\ dx - \int_a^{\xi} f(x)\ dx$$

a une valeur neutralisée dans I_{a+} qui est égale au premier terme du deuxième membre.

THÉORÈME. – Soit $a < b$. Si une infinité de fonctions $f_h(x)$ $(h = 1, 2, \ldots)$ sont intégrables de $a+$ à b, alors il existe une neutrice intégrale I_{a+} ayant pour domaine $a < \xi < b$ telle que chacune de ces fonctions $f_h(x)$ $(h = 1, 2, \ldots)$ est intégrable de I_{a+} à b.

<u>Démonstration</u>. – Soit I^*_{a+} une neutrice intégrale arbitraire. D'après la propriété 3, il existe une neutrice U telle que chaque fonction négligeable dans I^*_{a+} est négligeable dans U et que chaque fonction

$$\int_{\xi}^{b} f_h(x)\ dx \qquad (a < \xi < b) \qquad h = 0, 1, 2, \ldots$$

a dans U une valeur neutralisée. U est une neutrice intégrale I_{a+} avec la propriété requise. En effet, si $g(x)$ est intégrable de a à $b-$, alors $\int_a^{\xi} g(x)\ dx$ est négligeable dans I^*_{a+} donc certainement dans U.

<u>Définition</u>. – Une neutrice intégrale I_{b-} ayant pour domaine $a < \xi < b$ est une neutrice avec les 2 propriétés suivantes

1° pour chaque fonction $g(x)$ intégrable de $a+$ à b, la fonction $\int_\xi^b g(x)\,dx$ est négligeable dans I_{b-} ;

2° I_{b-} est un espace vectoriel sur Q.

Supposons $\alpha \leqslant a$. Nous disons qu'une fonction intégrable de α à $b-$ est intégrable de α à I_{b-} si la fonction $\int_a^\xi f(x)\,dx$ a dans I_{b-} une valeur neutralisée.

Cette valeur est notée par $\int_\alpha^{I_{b-}} f(x)\,dx$.

Les intégrales avec limite I_{b-}, ont des propriétés analogues aux intégrales avec I_{a+}.

3. Formule sommatoire d'Euler.

Si $f(x)$ est m fois continuement différentiable dans l'intervalle $a \leqslant x \leqslant b$, alors

$$\sum_{a<n<b} f(n) - \int_a^b f(x)\,dx$$

$$= \Lambda_m(b-, f) - \Lambda_m(a+, f) + (-1)^{m-1} \int_a^b f^{(m)}(x)\,\varphi_m(x)\,dx \qquad ,$$

où

$$\Lambda_m(x, f) = \sum_{h=0}^{m-1} (-1)^{h+1} f^{(h)}(x)\,\varphi_{h+1}(x)$$

où $\varphi_1(x)$ est une fonction périodique de x, ayant pour période 1 qui est égale à $x - 1/2$ dans l'intervalle $0 < x < 1$, et égale à zéro pour $x = 0$.

$\varphi_{h+1}(x)$ $(h \geqslant 1)$ est l'intégrale de $\varphi_h(x)$ uniquement définie par la condition

$$\int_0^1 \varphi_{h+1}(x)\,dx = 0 \qquad .$$

Les fonctions $\varphi_{h+1}(x)$ sont des fonctions périodiques de x, de période 1. Pour $h = 0$, cela découle de la définition ; si $h \geqslant 1$ et si $\varphi_h(x)$ a pour période 1, alors

$$\varphi_{h+1}(x+1) - \varphi_h(x) = \int_x^{x+1} \varphi_h(t)\,dt = \int_0^1 \varphi_h(t)\,dt = 0 \qquad ,$$

ainsi $\varphi_{h+1}(x)$ a aussi pour période 1. Les fonctions périodiques $h!\,\varphi_h(x)$ sont appelées fonctions de Bernoulli.

Démonstration. - L'intégration par parties, répétée, donne

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ \varphi_1'(x)\ dx$$

$$= \sum_{a<n<b} f(n) - \int_a^b f'(x)\ \varphi_1(x)\ dx + f(b)\ \varphi_1(b-) - f(a)\ \varphi_1(a+)$$

$$= \sum_{a<n<b} f(n) - \Lambda_m(b- , f) + \Lambda_m(a+ , f) - (-1)^{m-1} \int_a^b f^{(m)}(x)\ \varphi_m(x)\ dx ,$$

ce qui donne la formule sommatoire d'Euler.

4. Neutrices périodiques.

Définition. - On considère les fonctions $f(x)$, définies pour x positif suffisamment grand, qui ont la propriété suivante : il existe une constante positive m telle que $f(x)$ soit m fois continuement différentiable, que $f^{(m)}(x) \to 0$ quand $x \to \infty$ et que $f^{(m)}(x)$ soit absolument intégrable à l'infini.

Une neutrice périodique P ayant pour domaine $\alpha < \xi < \infty$ est la classe formée par toutes les fonctions $\nu(\xi)$, définies dans l'intervalle $\alpha < \xi < \infty$, qui peuvent être écrites sous la forme

$$\nu(\xi) = \sum_{h=0}^{n-1} s_h(\xi)\ p_h(\xi) + o(1) \qquad (\alpha < \xi < \infty) \qquad ,$$

où $o(1)$ désigne une fonction de ξ qui tend vers zéro quand $\xi \to \infty$, où n désigne une constante entière $\geqslant 0$, où $s_h(\xi)$ $(h = 0 , 1 , \dots , n-1)$ désigne une fonction ayant la propriété précédente et enfin où $p_h(\xi)$ $(h = 0 , 1 , \dots , n-1)$ désigne des fonctions périodiques, bornées, intégrables, de période 1 et avec

$$\int_0^1 p_h(x)\ dx = 0 \qquad .$$

THÉORÈME. - Si $a < \alpha$, si I_{a+} est une neutrice intégrale et si la fonction $f(x)$, ayant la propriété précédente, est définie pour $x > a$ et intégrable de I_{a+} à l'infini, alors

$$r(I_{a+} , \xi , f) = \sum_{a<n<\xi} f(n) - \int_{I_{a+}}^{\xi} f(x)\ dx$$

est une fonction de $\xi > a$ qui a une valeur neutralisée dans la neutrice périodique P ayant pour domaine $\alpha < \xi < \infty$. Cette valeur neutralisée est appelée le <u>résidu</u> $r(I_{a+}, P, f)$ à I_{a+} de $f(x)$ avec la neutrice P.

Dans le cas particulier où $f(x)$ est intégrable de a à $+\infty$, alors r est indépendant du choix de la neutrice I_{a+}, et on note $r(I_{a+}, \xi, f)$ et $r(I_{a+}, P, f)$ simplement par $r(a, \xi, f)$ et $r(a, P, f)$.

Chaque entier positif m, tel que $f^{(m)}(x) \to 0$ quand $x \to \infty$ et avec la propriété que $f^{(m)}(x)$ est absolument intégrable à l'infini, satisfait, pour chaque ξ suffisamment grand, à la relation

$$(1) \quad r(I_{a+}, P, f) = r(I_{a+}, \xi, f) - \Lambda_m(\xi, f) + (-1)^{m-1} \int_\xi^\infty f^{(m)}(x)\, \varphi_m(x)\, dx \quad .$$

<u>Démonstration</u>. - Choisissons $\alpha \geqslant a$ de telle façon que $f(x)$ soit m fois continuement différentiable pour $x > \alpha$. Si $\alpha \leqslant \xi^* \leqslant \xi$, alors

$$r(I_{a+}, \xi, f) - r(I_{a+}, \xi^*, f) = \sum_{\xi^* \leqslant n \leqslant \xi} f(n) - \int_{\xi^*}^{\xi} f(x)\, dx \quad .$$

La formule sommatoire d'Euler permet d'écrire :

$$r(I_{a+}, \xi, f) - r(I_{a+}, \xi^*, f) = \Lambda_m(\xi, f) - \Lambda_m(\xi^*, f) + (-1)^{m-1} \int_{\xi^*}^{\xi} f^{(m)}(x)\, \varphi_m(x)\, dx \quad .$$

En intervertissant ξ et ξ^*, on voit que la formule est aussi vraie si $\alpha \leqslant \xi \leqslant \xi^*$. L'intégrale précédente est intégrable à l'infini de telle façon que

$$r(I_{a+}, \xi, f) = r(I_{a+}, \xi^*, f) - \Lambda_m(\xi^*, f) + (-1)^{m-1} \int_{\xi^*}^{\infty} f^{(m)}(x)\, \varphi_m(x)\, dx$$
$$+ \Lambda_m(\xi, f) - (-1)^{m-1} \int_{\xi}^{\infty} f^{(m)}(x)\, \varphi_m(x)\, dx \quad .$$

Le dernier terme tend vers zéro quand $\xi \to \infty$. Chaque terme de la somme $\Lambda_m(\xi, f)$ a la forme $s(\xi)\, p(\xi)$, où $s(\xi)$ est telle que $s^{(m)}(\xi) \to 0$ quand $\xi \to \infty$ et où $p(\xi)$ est périodique, de période 1, bornée et intégrable avec $\int_0^1 p(x)\, dx = 0$.

En conséquence $r(I_{a+}, P, f)$ existe et est égale à la somme des trois premiers termes du second membre de l'équation précédente.

Remarque.

$$(2) \qquad r(I_{a+}, P, f) = \sum_{n>a} f(n) - \int_{I_{a+}}^{\infty} f(x)\, dx \quad ,$$

si la somme et l'intégrale du deuxième membre convergent ensemble.

En effet, la différence entre les premiers membres de (1) et (2) tend vers zéro quand $\xi \to \infty$ et, par conséquent, est négligeable dans P.

THÉORÈME de translation. - Si u est un entier et si $r(I_{a+u}, P, f(x-u))$ existe, alors $r(I_{a+}, P, f(x))$ existe et a la même valeur.

Démonstration. - Pour chaque $\eta > a + u$, nous avons

$$r(I_{a+u}, \eta, f(x-u)) = \sum_{a+u<n<\eta} f(n-u) - \int_{I_{a+u}}^{\eta} f(x-u)\, dx$$

$$= \sum_{a<n<\eta-u} f(n) - \int_{I_{a+}}^{\eta-u} f(x)\, dx$$

$$= r(I_{a+}, \eta - u, f(x)) \quad .$$

Par hypothèse,

$$r(I_{a+u}, \eta, f(x-u)) = \gamma + \nu(\eta)$$

où $\gamma = r(I_{a+u}, P, f(x-u))$ et où $\nu(\eta)$ est négligeable dans P. Par conséquent, pour $\xi > a$,

$$r(I_{a+}, \xi, f(x)) = \gamma + \nu(\xi + u) \quad .$$

Si $s(x)$ est telle que $s^{(m)}(x) \to 0$ quand $x \to \infty$, il en est de même de $s(x+u)$. De la définition de la neutrice périodique P, il s'ensuit que $\nu(\xi + u)$ est, pour chaque choix de l'entier u, négligeable dans P.

La formule précédente montre alors que $r(I_{a+}, P, f(x))$ existe et est égale à γ.

La neutrice périodique $(-P)$.

Définition. - Si $f(x)$ est telle que $f^{(m)}(x) \to 0$ si $x \to \infty$, il en est de même de $f(-x)$.

Si P est une neutrice périodique ayant pour domaine $\alpha < \xi < \infty$, alors les fonctions $f(x)$, définies pour $x > \alpha$ et appartenant à P , ont la propriété que les fonctions $f(-x)$ forment une neutrice ayant pour domaine $-\infty < \eta < -\alpha$. Cette neutrice est appelée la neutrice périodique $-P$ avec pour domaine $-\infty < \eta < -\alpha$. On a de même

THÉORÈME. - Si $\beta \leq b$, si la fonction $f(x)$ définie pour $-\infty < x < b$ et telle que $f^{(m)}(x) \to 0$, si $x \to -\infty$ et est intégrable de $-\infty$ à la neutrice intégrale I_{b-} , alors

$$r(I_{b-} , \xi , f) = \sum_{\xi<n<b} f(n) - \int_{\xi}^{I_{b-}} f(x)\, dx$$

est une fonction de $\xi < b$ qui a une valeur neutralisée dans la neutrice $-P$. Chaque entier positif m tel que $f^{(m)}(x) \to 0$ quand $x \to -\infty$ et que $f^{(m)}(x)$ soit absolument intégrable à $-\infty$ satisfait, pour chaque $\xi < 0$ suffisamment grand, à la relation

$$r(I_{b-} , -P , f) = r(I_{b-} , \xi , f) + \Lambda_m(\xi , f) + (-1)^{m-1} \int_{-\infty}^{\xi} f^{(m)}(x)\, \varphi_m(x)\, dx .$$

De même

THÉORÈME de translation. - Si u est un entier et si $r(I_{u-b+} , P , f(u-x))$ existe, alors $r(I_{b-} , -P , f(x))$ existe et a la même valeur.

5. Neutrices asymptotiques.

Définition. Soit Ω une suite non bornée du plan complexe. On veut déterminer, pour les éléments ω de Ω avec $|\omega|$ grand, le développement asymptotique de certaines fonctions de ω .

a et b sont dits asymptotiquement égaux, et on écrit $a \sim b$, si, pour chaque réel q fixé, ils satisfont à la relation $a - b = O|\omega|^{-q}$.

Ceci signifie que pour chaque réel fixé q , il est possible de trouver deux nombres fixés c et γ tels que, pour chaque point ω de Ω avec $|\omega| \geq \gamma$, les nombres a et b soient définis et satisfassent à l'inégalité

$$|a - b| \leq c|\omega|^{-q} .$$

<u>Définition</u>. - Soit $N(\omega)$ un groupe additif formé de fonctions $\nu(\xi) \in N'$. Ce groupe est appelé une neutrice asymptotique quand il satisfait à la condition suivante.

<u>Condition de neutrice asymptotique</u>. - Si $\gamma(\omega)$ est indépendant de ξ et si pour chaque nombre réel q , il est possible de trouver dans le groupe additif des fonctions $\nu(\xi)$ telles que la relation $\nu(\xi , \omega) = \gamma(\omega) + 0|\omega|^{-q}$ ait lieu pour chaque ξ , uniformément en ξ , alors $\gamma(\omega) \sim 0$.

<u>Exemple</u>. - Soit s un nombre fixé $\neq 0$. Si $\omega \geq 1$, alors les fonctions $c\,\xi\, s^{-1}\, e^{-\omega}$, où les coefficients c sont des entiers fixés, forment une neutrice asymptotique, ayant pour domaine $1 < \xi < 2$. En effet, si un nombre γ qui peut dépendre de ω ou de s , mais non de ξ et de q , a la propriété que, pour chaque nombre réel q , il est possible de trouver un nombre c qui peut dépendre de s et de q , mais non de ω et ξ , tel que

$$\gamma(s , \omega) = c(s , q)\ \xi\ s^{-1}\ e^{-\omega} + 0|\omega|^{-q} \qquad (1 < \xi < 2) \quad ,$$

alors $\gamma = 0|\omega|^{-q}$, donc $\gamma \sim 0$.

En effet, la relation précédente peut s'écrire

$$\frac{\gamma(s , \omega)}{|\omega|^{-q}} = \frac{c(s , q)\ \xi\ s^{-1}\ e^{-\omega}}{|\omega|^{-q}} + \frac{0|\omega|^{-q}}{|\omega|^{-q}} \quad ,$$

et les 2 termes du 2e membre ont une valeur bornée d'après les hypothèses précédentes ; donc $\gamma(s , \omega) = 0|\omega|^{-q}$ ou $\gamma \sim 0$.

<u>Définition</u>. - Soit $g(\xi) \in N'$.

Si γ , indépendant de ξ , a la propriété que, pour chaque nombre réel q , il est possible de trouver une fonction $\nu(\xi)$ négligeable dans N tel que la relation

$$g(\xi , \omega) = \gamma(\omega) + \nu(\xi , \omega) + 0|\omega|^{-q} \quad .$$

ait lieu pour chaque ξ , uniformément en ξ , alors le développement asymptotique de $\gamma(\omega)$ est défini de façon unique.

En effet, nous pouvons écrire $g(\xi)$ sous la forme

$$g(\xi , \omega) = \gamma_1(\omega) + \nu_1(\xi , \omega) + 0|\omega|^{-q} \quad ,$$

où $\gamma_1(\omega)$ est indépendant de ξ et q, et où $\nu_1(\xi, \omega)$ est négligeable dans N, alors

$$\gamma - \gamma_1 = \nu_1(\xi) - \nu(\xi) + 0|\omega|^{-q}$$

où $\nu_1(\xi, \omega) - \nu(\xi, \omega)$ est négligeable dans N de telle sorte que $\gamma(\omega) - \gamma_1(\omega) \sim 0$ suivant la condition de neutrice satisfaite dans N.

On dit que $\gamma(\omega)$ est la valeur asymptotique neutralisée que $g(\xi, \omega)$ a dans la neutrice asymptotique N. Cette valeur se note $g(N_\omega)$.

La neutrice asymptotique périodique Q. – Soit $\alpha < \beta$, α peut être $-\infty$, et β peut être $+\infty$. On considère les fonctions asymptotiquement "smooth" dans $\alpha < x < \beta$, qui, dans cet intervalle, sont infiniment différentiables, qui, pour les grandes valeurs de ω, ont des dérivées $f^{(m)}(x)$ qui tendent, uniformément en x $(\alpha < x < \beta)$, asymptotiquement vers zéro quand $m \to \infty$ et si finalement $\int_\alpha^\beta |f^{(m)}(x)|\, dx$ tend asymptotiquement vers zéro quand $m \to \infty$.

Supposons que $\beta - \alpha \to \infty$ quand $|\omega| \to \infty$.

La neutrice périodique Q ayant pour domaine $\alpha < \xi < \beta$ est la classe formée par les fonctions $\pi(\xi)$ $(\alpha < \xi < \beta)$ qui, pour chaque nombre réel q fixé, satisfait une autre relation de la forme

$$\pi(\xi) = \sum_{h=0}^{n-1} s_h(\xi)\, p_h(\xi) + 0|\omega|^{-q} \quad ,$$

uniformément en ξ $(\alpha < \xi < \beta)$ où n est indépendant de ω et ξ, où les fonctions $s_h(\xi)$ $(h = 0, 1, \dots, n-1)$ sont asymptotiquement "smooth" pour $\alpha < \xi < \beta$ et où les fonctions $p_h(\xi)$ $(h = 0, 1, \dots, n-1)$ sont périodiques, bornées, intégrales de période 1 et $\int_0^1 p_h(x)\, dx = 0$.

THÉORÈME. – Si $a \leq \alpha < \beta$ ou $\beta - \alpha \to \infty$ comme $|\omega| \to \infty$, si $f(x)$, définie pour $a < x < \beta$, est intégrable à partir d'une neutrice intégrale I_{a+} à β et si $f(x)$ est asymptotiquement "smooth" dans $\alpha < x < \beta$, alors

$$r(I_{a+}, \xi, f) = \sum_{a<n<\xi} f(n) - \int_{I_{a+}}^{\xi} f(x)\, dx$$

est une fonction de ξ $(\alpha < \xi < \beta)$ qui a la valeur neutralisée pour la neutrice asymptotique périodique Q avec pour domaine $\alpha < \xi < \beta$.

La valeur neutralisée est appelée résidu $r(I_{a+}, Q, f)$ de I_{a+} à f avec la neutrice Q et possède uniformément en ξ $(\alpha < \xi < \beta)$ le développement asymptotique de la série asymptotiquement convergente

$$\Lambda_\infty(\xi , f) \sim \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^{h+1} f^{(h)}(\xi) \varphi_{h+1}(\xi) \quad .$$

Dans le cas spécial où $f(x)$ est intégrable de a à β, alors $r(I_{a+} , \xi , f)$ et $r(I_{a+} , Q , f)$ sont indépendants du choix de la neutrice intégrale I_{a+} et sont notés simplement par $r(a , \xi , f)$ et $r(a , Q , f)$.

Démonstration. – La formule d'Euler donne :

$$r(I_{a+} , \xi , f) - r(I_{a+} , \xi^* , f)$$

$$= \Lambda_m(\xi , f) - \Lambda_m(\xi^* , f) + (-1)^{m-1} \int_{\xi^*}^{\xi} f^{(m)}(x) \varphi_m(x) dx$$

pour 2 points ξ et ξ^* pris dans l'intervalle $\alpha < x < \beta$. Si q est un nombre réel fixé, alors on a pour les valeurs de m suffisamment grandes

$$\int_{\xi^*}^{\xi} f^{(m)}(x) \varphi_m(x) dx = 0|\omega|^{-q}$$

et

$$\Lambda_m(\xi^* , f) = \Lambda_\infty(\xi^* , f) + 0|\omega|^{-q}$$

de telle sorte que

$$r(I_{a+} , \xi , f) = r(I_{a+} , \xi^* , f) - \Lambda_\infty(\xi^* , f) + \Lambda_m(\xi , f) + 0|\omega|^{-q} \quad .$$

Chaque terme de la somme $\Lambda_m(\xi , f)$ est de la forme $s(\xi)\ p(\xi)$ où $s(\xi)$ est asymptotiquement "smooth" dans $\alpha < \xi < \beta$ et où $p(\xi)$ est périodique, bornée, intégrable, avec $\int_0^1 p(x)\, dx = 0$.

En conséquence, chaque terme figurant dans la somme $\Lambda_m(\xi , f)$ est négligeable dans Q de telle sorte que $r(I_{a+} , Q , f)$ existe et est asymptotiquement égale à la somme des deux premiers termes du second membre.

THÉORÈME. – Si les conditions du théorème précédent sont satisfaites, et si la fonction $f(\xi)$ et chacune de ses dérivées tendent vers zéro comme $\xi < \beta$ tend vers β, alors

$$r(I_{a+} , Q , f) \sim \lim_{\xi \to \beta} r(I_{a+} , \xi , f)$$

pourvu que la limite écrite au second membre existe.

Démonstration. - On a

$$r(I_{a+}, Q, f) \sim r(I_{a+}, \xi, f) - \Lambda_\infty(\xi, f) \quad .$$

Il existe, pour chaque réel q fixé, un entier positif m indépendant de ω et ξ tel que, dans l'intervalle $\alpha < \xi < \beta$ uniformément en ξ,

$$r(I_{a+}, Q, f) = r(I_{a+}, \xi, f) - \Lambda_\infty(\xi, f) + O|\omega|^{-q} \quad .$$

Comme $\xi \to \beta$, chaque terme dans la somme $\Lambda_m(\xi, f)$ tend par hypothèse vers zéro de telle sorte que

$$r(I_{a+}, Q, f) = \lim_{\xi\to\beta} r(I_{a+}, \xi, f) + O|\omega|^{-q} .$$

THÉORÈME. - Supposons $a \lesssim \alpha$ et $f(x)$, définie pour $x > a$, intégrable d'une neutrice intégrale I_{a+} à l'infini. Si $f(x)$ est asymptotiquement "smooth" dans l'intervalle $\alpha < x < \infty$ et si, pour chaque valeur de m fixé, suffisamment grande, $f^{(m)}(x) \to 0$ quand $x \to \infty$, alors $r(I_{a+}, Q, f)$ et $r(I_{a+}, P, f)$ existent et

$$r(I_{a+}, Q, f) \sim r(I_{a+}, P, f)$$

où Q est la neutrice périodique asymptotique avec pour domaine $\alpha < \xi < \infty$.

Ce théorème relie les résidus avec la neutrice Q et les résidus avec la neutrice P.

Démonstration. - On avait

$$r(I_{a+}, P, f) = r(I_{a+}, \xi, f) - \Lambda_m(\xi, f) + (-1)^{m-1} \int_\xi^\infty f^{(m)}(x)\, \varphi_m(x)\, dx .$$

En utilisant le fait que, pour $\xi > \alpha$, le dernier terme tend asymptotiquement vers zéro quand m tend vers l'infini, nous obtenons

$$r(I_{a+}, P, f) \sim r(I_{a+}, \xi, f) - \Lambda_\infty(\xi, f)$$

et dans le théorème précédent, nous avons le même développement asymptotique pour $r(I_{a+}, Q, f)$.

On obtient des résultats analogues avec la neutrice I_{b-}.

THÉORÈME. - Si $\alpha < \beta \leqslant b$, où $\beta - \alpha \to \infty$ quand $|\omega| \to \infty$, si $f(x)$ $(\alpha < x < b)$ est intégrable de α à une neutrice intégrale I_{b-} , et si $f(x)$ est asymptotiquement "smooth" dans $\alpha < x < \beta$, alors

$$r(I_{b-} , \xi , f) = \sum_{\xi < n \lhd b} f(n) - \int_{\xi}^{I_{b-}} f(x)\, dx$$

est une fonction de ξ $(\alpha < \xi < \beta)$ qui a la valeur neutralisée $r(I_{b-} , \xi , f)$ dans la neutrice périodique Q avec pour domaine $\alpha < \xi < \beta$.

Ce résidu possède, uniformément en ξ $(\alpha < \xi < \beta)$ l'expression asymptotique

$$r(I_{b-} , Q , f) \sim r(I_{b-} , \xi , f) - \Lambda_{\infty}(\xi , f) \quad .$$

Si $f(x)$ est intégrale de α à b , alors nous pouvons écrire $r(b , \xi , f)$ et $r(b , Q , f)$ au lieu de $r(I_{b-} , \xi , f)$ et $r(I_{b-} , Q , f)$.

THÉORÈME. - Si les conditions du théorème précédent sont satisfaites, et si $f(x)$ et chacune de ses dérivées tendent vers zéro lorsque $x > \alpha$ tend vers α , alors

$$r(I_{b-} , Q , f) \sim \lim_{\xi \to \alpha} r(I_{b-} , \xi , f)$$

pourvu que la limite du 2e membre existe.

THÉORÈME. - Soit $\beta < b$. Supposons que $f(x)$ est intégrable de $-\infty$ à une neutrice intégrale I_{b-} . Si $f(x)$ est asymptotiquement "smooth" dans l'intervalle $-\infty < x < \beta$ et si, pour chaque valeur de m suffisamment grande, $f^{(m)}(x)$ tend vers zéro lorsque $x \to -\infty$, alors $r(I_{b-} , Q , f)$ et $r(I_{b-} , -P , f)$ existent, et l'on a

$$r(I_{b-} , Q , f) \sim r(I_{b-} , -P , f)$$

où Q est la neutrice périodique asymptotique ayant pour domaine $-\infty < \xi < \beta$.

6. Formule sommatoire d'Euler neutralisée.

Soit

$$a \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant \alpha^* \leqslant \beta^* \leqslant b$$

où $\beta - \alpha$ et $\beta^* - \alpha^*$ tendent vers l'infini quand $|\omega| \to \infty$. Soient Q et Q^* les neutrices périodiques asymptotiques avec domaines respectifs $\alpha < x < \beta$ et

$\alpha^* < x < \beta^*$. Si $f(x)$ est intégrable à partir d'une neutrice intégrale I_{a+} à une neutrice intégrale I_{b-} , et si $f(x)$ est asymptotiquement "smooth" dans l'intervalle $\alpha < x < \beta^*$, alors

$$\sum_{a<n<b} f(n) \sim \int_{I_{a+}}^{I_{b-}} f(x)\, dx + r(I_{a+}, Q, f) + r(I_{b-}, Q^*, f) \quad .$$

Démonstration. - Si $\alpha < \xi < \beta$ et $\alpha^* < \xi^* < \beta^*$, alors on a, suivant la formule sommatoire d'Euler,

$$\sum_{\xi\leq n\leq \xi^*} f(n) - \int_{\xi}^{\xi^*} f(x)\, dx$$

$$= \Lambda_m(\xi^*, f) - \Lambda_{\infty}(\xi, f) + (-1)^{m-1} \int_{\xi}^{1/2(\alpha+\beta^*)} f^{(m)}(x)\, \varphi_m(x)\, dx$$

$$+ (-1)^{m-1} \int_{1/2(\alpha+\beta^*)}^{\xi^*} f^{(m)}(x)\, \varphi_m(x)\, dx$$

de telle sorte que

$$\sum_{a<n<b} f(n) - \int_{I_{a+}}^{I_{b-}} f(x)\, dx = u(\xi) + v(\xi^*)$$

où

$$(1) \quad u(\xi) = r(I_{a+}, \xi, f) - \Lambda_m(\xi, f) + (-1)^{m-1} \int_{\xi}^{1/2(\alpha+\beta^*)} f^{(m)}(x)\, \varphi_m(x)\, dx \quad ,$$

$$(2) \quad v(\xi^*) = r(I_{b-}, \xi^*, f) + \Lambda_m(\xi^*, f) + (-1)^{m-1} \int_{1/2(\alpha+\beta^*)}^{\xi^*} f^{(m)}(x)\, \varphi_m(x)\, dx \quad .$$

Pour chaque nombre réel fixé q , le dernier terme de (1) est $0|\omega|^{-q}$ si l'entier positif fixé m est assez grand. Puisque chaque terme de la somme $\Lambda_m(\xi, f)$ est négligeable dans Q , nous pouvons trouver alors pour un nombre réel fixé q

$$u(Q) = r(I_{a+}, Q, f) + 0|\omega|^{-q} \quad \text{et} \quad u(Q) \sim r(I_{a+}, Q, f) \quad .$$

De la même façon nous trouvons

$$v(Q^*) \sim r(I_{b-}, Q^*, f) \quad .$$

Ceci donne le résultat cherché.

7. Application aux équations aux différences finies.

On étudie la solution générale de l'équation

$$\underset{\omega}{\Delta} f(x) = \frac{f(x+\omega) - f(x)}{\omega} = \varphi(x) \qquad ,$$

où $\varphi(x)$ est une fonction donnée.

Cette solution générale qu'on appelle somme indéfinie de $\varphi(x)$ est de la forme

$$f(x) = F(x) + \pi(x) \qquad ,$$

$F(x)$ désignant une solution particulière et $\pi(x)$ une fonction arbitraire de période ω. Sa détermination s'appellera la sommation de l'équation. Pour pouvoir caractériser une solution principale, il faut en outre préciser le caractère de $\varphi(x)$ à l'infini.

Somme d'une fonction. - Pour résoudre l'équation

(1) $$\underset{\omega}{\Delta} f(x) = \varphi(x)$$

où ω est un nombre positif, NORLUND considère, au lieu de la solution formelle $-\omega \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi(x+\nu\omega)$, qui diverge généralement, la série

$$F_\eta\left(\frac{x}{\omega}\right) = \int_a^\infty \varphi(z)\, e^{-\eta z}\, dz - \omega \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi(x+\nu\omega)\, e^{-\eta(x+\nu\omega)}$$

a étant une constante indéterminée. Pour que cette série converge, quelque petit que soit le nombre positif η, il suffit de supposer que $\varphi(x)$ est une fonction, réelle ou non, continue pour $x \geqslant b$, et telle que l'on ait

$$\lim_{x\to\infty} \varphi(x)\, e^{-\eta x} = 0 \quad \text{quel que soit } \eta > 0 \qquad .$$

Or on a

$$\underset{\omega}{\Delta} F_\eta\left(\frac{x}{\omega}\right) = \varphi(x)\, e^{-\eta x}$$

donc si $F_\eta\left(\frac{x}{\omega}\right)$ tend uniformément vers une limite quand η tend vers zéro, cette limite $F\left(\frac{x}{\omega}\right)$ est une solution de (1).

Elle est définie à une constante additive près, et nous l'appellerons la solution principale de (1) ou somme de $\varphi(x)$. Elle sera désignée par la notation

$$F\left(\frac{x}{\omega}\right) = \int_a^x \varphi(z) \underset{\omega}{\Delta} z = \lim_{\eta\to 0} F_\eta\left(\frac{x}{\omega}\right)$$

NORLUND démontre le théorème suivant.

THÉORÈME d'existence. - $F\left(\frac{x}{\omega}\right)$ existe dans le cas où :

1° $\varphi(x)$ admet pour $x \geqslant b$ une dérivée m-ième continue, infiniment petite à l'infini ;

2° L'intégrale $\int_0^\infty \overline{B_m(-z)}\ \varphi^{(m)}(x + \omega z)\, dz$ converge uniformément dans l'intervalle $b \leqslant x \leqslant b + \omega$.

Les fonctions $B_m(x)$ sont les fonctions de Bernoulli, et les fonctions $\overline{B_m(x)}$ sont les fonctions de période 1 qui coïncident avec $B_m(x)$ dans l'intervalle $0 \leqslant x < 1$.

NORLUND démontre le résultat suivant :

$$F\left(\frac{x + \omega h}{\omega}\right) = \int_a^x \varphi(z)\, dz + \sum_{\nu=1}^{m} \frac{\omega^\nu}{\nu!} B_\nu(h)\ \varphi^{(\nu-1)}(x)$$

$$+ \frac{\omega^{m+1}}{m!} \int_0^\infty \overline{B_m(h - z)}\ \varphi^{(m)}(x + \omega z)\, dz \quad .$$

<u>Valeur neutralisée</u>. - On rappelle qu'une neutrice périodique P est la classe formée de toutes les fonctions $\nu(\xi)$ qui peuvent s'écrire

$$\nu(\xi) = \sum_{h=0}^{n-1} s_h(\xi)\ p_h(\xi) + 0(1) \quad ,$$

0(1) désignant une fonction de ξ qui tend vers zéro quand $\xi \to \infty$.

1° Supposons d'abord que $\varphi(x)$ et toutes ses dérivées tendent vers zéro quand x tend vers l'infini.

On suppose $b \leqslant \xi \leqslant \xi^*$.

On peut écrire

$$F\left(\frac{\xi+\omega h}{\omega}\right) - F\left(\frac{\xi^*+\omega h}{\omega}\right) = \int_{\xi^*}^{\infty} \varphi(z)\, dz - \sum_{\nu=1}^{m} \frac{\omega^\nu}{\nu!} B_\nu(h)\ \varphi^{(\nu-1)}(\xi^*)$$

$$- \frac{\omega^{m+1}}{m!} \int_0^\infty \overline{B_m(h-z)}\ \varphi^{(m)}(\xi^* + \omega z)\, dz$$

$$- \int_{\xi}^{\infty} \varphi(z)\, dz + \sum_{\nu=1}^{m} \frac{\omega^\nu}{\nu!} B_\nu(h)\ \varphi^{(\nu-1)}(\xi)$$

$$+ \frac{\omega^{m+1}}{m!} \int_0^\infty \overline{B_m(h-z)}\ \varphi^{(m)}(\xi + \omega z)\, dz \quad .$$

Lorsque $\xi \to \infty$, $\int_\xi^\infty \varphi(z)\, dz \to 0$, d'autre part

$$\sum_{\nu=1}^{m} \frac{\omega^\nu}{\nu!} B_\nu(h)\ \varphi^{(\nu-1)}(\xi) \quad ,$$

et,

$$\frac{\omega^{m+1}}{m!} \int_0^\infty \overline{B_m(h-z)}\ \varphi^{(m)}(\xi + \omega z)\, dz \quad ,$$

tendent vers zéro en vertu des hypothèses faites.

Par conséquent, lorsque $\xi \to \infty$, $F\left(\frac{\xi+\omega h}{\omega}\right)$ tend vers une valeur neutralisée $F_p(\xi)$ telle que

$$F_p(\xi) = F\left(\frac{\xi+\omega h}{\omega}\right) + \int_\xi^\infty \varphi(z)\, dz$$

$$- \sum_{\nu=1}^{m} B_\nu(h)\ \varphi^{(\nu-1)}(\xi) - \frac{\omega^{m+1}}{m!} \int_0^\infty \overline{B_m(h-z)}\ \varphi^{(m)}(x + \omega z)\, dz$$

où

$$F_p(\xi) = \int_a^\infty \varphi(z)\, dz \quad .$$

2° Supposons que $\varphi(x)$ ne tende pas vers zéro quand $x \to \infty$, mais que sa dérivée première et toutes les suivantes tendent vers zéro quand $x \to \infty$.

On a

$$F\left(\frac{x+\omega h}{\omega}\right) - \omega B_1(h)\ \varphi(x) = \int_a^x \varphi(z)\ dz + \sum_{\nu=2}^{m} \frac{\omega^\nu}{\nu!} B_\nu(h)\ \varphi^{(\nu-1)}(x)$$

$$+ \frac{\omega^{m+1}}{m!} \int_0^\infty \overline{B_m(h-z)}\ \varphi^{(m)}(x+\omega z)\ dz \qquad ,$$

et on montre de même que la fonction

$$F\left(\frac{x+\omega h}{\omega}\right) - \omega B_1(h)\ \varphi(x)$$

a pour valeur neutralisée

$$F_P(\xi) = \int_a^\infty \varphi(z)\ dz \qquad .$$

3° Si $\varphi^{(m)}(x)$ est la première dérivée tendant vers zéro quand x tend vers l'infini, on écrit

$$F\left(\frac{x+\omega h}{\omega}\right) - \sum_{\nu=1}^{m} \frac{\omega^\nu}{\nu!} B_\nu(h)\ \varphi^{(\nu-1)}(x) = \int_a^x \varphi(z)\ dz + \frac{\omega^{m+1}}{m!} \int_0^\infty \overline{B_m(h-z)}\ \varphi^{(m)}(x+\omega z)\ dz$$

et on montre de même que la fonction

$$F\left(\frac{x+\omega h}{\omega}\right) - \sum_{\nu=1}^{m} \frac{\omega^\nu}{\nu!} B_\nu(h)\ \varphi^{(\nu-1)}(x)$$

on a une valeur neutralisée

$$F_P(\xi) = \int_a^\infty \varphi(z)\ dz \qquad .$$