Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Jacques Fort

Radical tertiaire d'un sous-module. Sous-modules tertiaires, dans un module sur un anneau non nécessairement commutatif

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 15, nº 1 (1961-1962), exp. nº 4, p. 1-16

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1961-1962__15_1_A4_0>

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres (Secrétariat mathématique, Paris), 1961-1962, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
15e année, 1961/62, n° 4

11 décembre 1961

RADICAL TERTIAIRE D'UN SOUS-MODULE SOUS-MODULES TERTIAIRES, DANS UN MODULE SUR UN ANNEAU NON NÉCESSAIREMENT COMMUTATIF

par Jacques FORT

Introduction. - La présente étude a pour objet d'exposer les démonstrations des théorèmes 1, 2, 3, 4 de la note [6], lesquelles n'ont pas été publiées, et de prolonger sur de nombreux points les résultats obtenus dans cette note.

L'étude du radical tertiaire d'un sous-module, et celle des sous-modules tertiaires, sont conduites dans le cas général au paragraphe 1, puis sous une condition (E) assez large au paragraphe 2. De nombreuses propriétés, données par LESIEUR et CROISOT dans [7], [8], [9], [10], [11], sous les conditions de chaine (D) sur les résiduels, ont pu être étendues au cas d'un module ne vérifiant pas nécessairement cet axiome (D) . Lorsque cette extension n'est que simple transposition, l'énoncé correspondant est donné sans démonstration. Au contraire, cette dernière est indiquée lorsque cette extension a exigé une élaboration spéciale.

Un essai de comparaison des notions de sous-module tertiaire et de sous-module unirésidué, est entrepris au paragraphe 3, sous la considération des faits suivants.

D'une part, tous les exemples de modules ou d'anneaux construits pour tenter de séparer ces deux notions ont été, jusqu'à présent, inopérants.

D'autre part, il n'a pas été obtenu d'éventuel théorème général d'équivalence de ces deux notions. Cette équivalence est néanmoins connue dans le cas commutatif et dans le cas d'un anneau artinien à gauche (cf. partie IV, § 7 et § 8 de [2]). Le paragraphe 3 étend cette équivalence aux modules sur un anneau artinien à gauche, et permet des résultats très précis (théorème 3.3) ; deux autres cas sont traités, et un théorème de transfert (théorème 3.1) permet de ramener le problème au cas d'un anneau (tout au moins dans des conditions assez usuelles).

Notations et symboles. - $\mathcal{E}$ désigne un anneau non nécessairement commutatif ou unitaire. U désigne un $\mathcal{E}$-module à gauche. Les éléments de $\mathcal{E}$ sont représentés par des lettres grecques minuscules, ceux de U par des minuscules ordinaires, les idéaux bilatères de $\mathcal{E}$ par des majuscules de ronde, les idéaux à gauche par des lettres gothiques, les sous-modules par des majuscules d'imprimerie.

(x) représente le sous-module engendré par $x \in U$, $(\alpha|$ l'idéal à gauche engendré par $\alpha \in \mathcal{E}$, (α) l'idéal bilatère engendré par $\alpha \in \mathcal{E}$. Le symbole $\alpha\mathcal{E}^* x$ représente la réunion de l'élément αx de U et de tous les éléments $\alpha\rho x$, ρ décrivant $\mathcal{E}$.

Pour tout sous-module X de U et tout sous-ensemble non vide S de U, la notation $X \,{}^{\circ}\!. \, S$ représente l'ensemble des $\xi \in \mathcal{E}$ tels que $\xi s \in X$, $\forall\ s \in S$; c'est un idéal à gauche de $\mathcal{E}$. Si S est un sous-module de U, $X \,{}^{\bullet}\!. \, S$ est bilatère, et appelé "résiduel à gauche de X par S", propre si $S \nsubseteq X$.

Pour tout élément γ du centre de $\mathcal{E}$ et tout sous-module X de U, la notation $X \,.^{\bullet}\, \gamma$ représente l'ensemble des $x \in U$ tels que $\gamma x \in U$; c'est un sous-module de U.

Pour tout idéal bilatère $\mathfrak{a}$ de $\mathcal{E}$ et tout sous-module X de U, la notation $X \,.^{\bullet}\, \mathfrak{a}$ est l'ensemble des $x \in U$ tels que $\alpha x \in X$, $\forall\ \alpha \in \mathfrak{a}$; c'est un sous-module de U appelé résiduel à droite de X par $\mathfrak{a}$.

1. Radical tertiaire d'un sous-module, sous-modules tertiaires.

Soit X un sous-module de U. On sait que l'ensemble des $\alpha \in \mathcal{E}$, vérifiant la condition :

$$a \notin X \implies \exists\ a' \in (a) \text{ tel que } a' \notin X \text{ et } \alpha\mathcal{E}^* a' \subseteq X ,$$

est un idéal bilatère $\mathcal{R}(X)$ de $\mathcal{E}$, appelé radical tertiaire de X (cf. théorème 6.1 de [8]).

Le sous-module T est dit tertiaire lorsqu'il vérifie la propriété suivante :

$$\alpha\mathcal{E}^* b \subseteq T ,\quad b \notin T \implies \alpha \in \mathcal{R}(T) .$$

PROPOSITION 1.1. – X étant sous-module de U, distinct de U, on a :

a. $\mathcal{R}(X) = \bigcap\limits_{a \notin X} \mathcal{R}(X \,{}^{\bullet}\!.\, a)$;

b. Si γ est élément du centre de $\mathcal{E}$: $\mathcal{R}(X) \subseteq \mathcal{R}(X \,.^{\bullet}\, \gamma)$.

(a) Montrons que

$$\mathcal{R}(X) \subseteq \mathcal{R}(X \,{}^{\bullet}\!.\, a) ,$$

pour $a \notin X$.

Soient en effet $\rho \in \mathcal{R}(X)$ et $\beta \notin X \,{}^{\bullet}\!.\, a$; il existe alors $x \in (\beta a)$ tel que $x \notin X$ et $\rho\mathcal{E}^* x \subseteq X$; x étant de la forme

$$x = \gamma a \quad \text{avec} \quad \gamma \in (\beta| \quad \text{et} \quad \gamma \notin X \,{}^{\bullet}\!.\, a \qquad ,$$

il résulte

$$\rho\mathcal{E}^* \gamma \subseteq X \,{}^{\bullet}\!.\, a \quad \text{et} \quad \rho \in \mathcal{R}(X \,{}^{\bullet}\!.\, a) \qquad .$$

Inversement soient $\rho \in \bigcap_{a \notin X} \mathcal{R}(X \,{}^{\bullet}\!.\, a)$ et $b \notin X$; montrons qu'il existe $b' \in (b)$ tel que :

$$b' \notin X \quad \text{et} \quad \rho\mathcal{E}^* b' \subseteq X \qquad .$$

Si $\rho\mathcal{E}^* b \subseteq X$, on choisit $b' = b$; sinon :

ou bien $\rho b \notin X$.

ou bien $\rho\lambda b \notin X$ pour un $\lambda \in \mathcal{E}$.

dans la dernière éventualité, par exemple, de $\rho \in \mathcal{R}(X \,{}^{\bullet}\!.\, \lambda b)$, on déduit qu'il existe $\rho' \in (\rho|$ tel que :

$$\rho' \notin X \,{}^{\bullet}\!.\, \lambda b \quad \text{et} \quad \rho\mathcal{E}^* \rho' \subseteq X \,{}^{\bullet}\!.\, \lambda b \qquad ,$$

et on choisit dans ce cas $b' = \rho'\lambda b$.

(b) La preuve est de même forme que celle donnée en (a).

<u>PROPOSITION</u> 1.2. - $X_1 , X_2 , \dots X_n$, <u>étant</u> n <u>sous-modules</u> :

$$\mathcal{R}(X_1) \cap \mathcal{R}(X_2) \cap \dots \cap \mathcal{R}(X_n) \subseteq \mathcal{R}(X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_n) \qquad .$$

Il suffit de prouver cette relation pour deux sous-modules X_1 et X_2 , ce qui est aisé. Notons que cette relation est donnée à la propriété 1.6 de [11] dans le cas abstrait et en présence de conditions de chaîne.

LESIEUR et CROISOT ont donné, dans le cas d'un treillis semi-modulaire, la définition suivante (propriété 7.2 de [7]) :

l'élément X est tertiaire si, et seulement s'il vérifie la condition :

$$X \mathbin{.^{\bullet}} \mathfrak{a} \supset X \text{ et } (X \mathbin{.^{\bullet}} \mathfrak{a}) \cap Y \subseteq X \implies Y \subsetneq X \quad ,$$

et cette définition entraîne celle donnée au début de ce paragraphe. Ces définitions sont équivalentes dans des conditions assez larges (théorème 2.2).

PROPOSITION 1.3. -

a. Tout sous-module tertiaire selon [7] est tertiaire selon la définition adoptée dans ce paragraphe.

b. Tout sous-module secondaire est tertiaire.

La première partie de l'énoncé est conséquence des définitions. La seconde partie peut résulter de la propriété 7.4 de [7] dont la preuve n'utilise aucune condition de chaîne. (pour la définition d'un élément secondaire, voir le § 6 de [7]).

Rappelons la propriété fondamentale suivante donnée par LESIEUR et CROISOT au lemme 3.1 de [10] :

THÉORÈME 1.1. - Tout sous-module $\cap$-irréductible est tertiaire.

Rappelons qu'un idéal à gauche $\mathfrak{q}$ de $\mathcal{E}$ est dit premier à droite si

$$\alpha \mathcal{E}^{*} \beta \subseteq \alpha \implies \beta \in \alpha \text{ ou } \alpha \mathcal{E}^{*} \subseteq \alpha \quad .$$

PROPOSITION 1.4. - Si $T \neq U$ est un sous-module tertiaire, il a les propriétés :

a. $\mathcal{R}(T) = \sum_{y \notin T} \{T \mathbin{^{\bullet}.} (y)\}$;

b. $\mathcal{R}(T)$ est premier dès qu'il est résiduel à gauche propre de T ;

c. $\mathcal{E}a \not\subseteq T \implies \mathcal{R}(T) = \mathcal{R}(T \mathbin{^{\bullet}.} a)$;

d. γ étant élément du centre de $\mathcal{E}$: $\gamma U \not\subseteq T \implies \mathcal{R}(T) = \mathcal{R}(T \mathbin{.^{\bullet}} \gamma)$;

e. $T \mathbin{^{\bullet}.} a$ est premier à droite si et seulement si $a \in T \mathbin{.^{\bullet}} \mathcal{R}(T)$.

(a) est conséquence des définitions de $\mathcal{R}(T)$ et celle d'un sous-module tertiaire.

Preuve de (b). - Soient

$$\alpha \mathcal{E}^{*} \beta \subsetneq \mathcal{R}(T) = T \mathbin{^{\bullet}.} Y$$

et

$$\beta \notin \mathcal{R}(T) \quad \text{avec} \quad Y \not\subseteq T \quad .$$

Il existe $y \in Y$, $y \notin T$ tel que $\beta\mathcal{E}^* y \not\subseteq T$.

D'autre part

$$\alpha\mathcal{E}^* \beta \subseteq T \,{}^{\bullet}\!. \, Y \text{ entraîne } \alpha\mathcal{E}^* \beta\mathcal{E}^* y \subseteq T \quad .$$

Si $\beta\lambda y \notin T$ pour un certain $\lambda \in \mathcal{E}$, alors

$$\alpha\mathcal{E}^* \beta\lambda y \subseteq T \text{ entraîne } \alpha \in \mathcal{R}(T) \quad ,$$

puisque T est tertiaire.

Si $\beta y \notin T$, la conclusion est la même. $\mathcal{R}(T)$ est premier.

Preuve de (c) et (d). – Il suffit d'utiliser la proposition 1.1 et la définition d'un sous-module tertiaire (considérer un $\xi \notin T \,{}^{\bullet}\!. \, a$, et un $x \not\subseteq T \,.{}^{\bullet}\, \gamma$) .

Preuve de (e). – Supposons que $T \,{}^{\bullet}\!. \, a$ soit premier à droite, et que $a \notin T \,.{}^{\bullet}\, \mathcal{R}(T)$. Il existe $\rho \in \mathcal{R}(T)$ tel que $\rho a \not\subseteq T$. D'après la définition de $\mathcal{R}(T)$, on peut alors trouver $a' \in (\rho a)$ tel que $a' \notin T$ et $\rho\mathcal{E}^* a' \subseteq T$. Mais $a' = \rho' a$ avec $\rho' \in (\rho|$, d'où

$$\rho\mathcal{E}^* \rho' \subseteq T \,{}^{\bullet}\!. \, a \quad ,$$

ce qui est contraire au fait que $T \,{}^{\bullet}\!. \, a$ est premier à droite.

Inversement supposons que $a \in T \,.{}^{\bullet}\, \mathcal{R}(T)$. Si $a \in T$, $T \,{}^{\bullet}\!. \, a = \mathcal{E}$ est premier. Soient donc α et $\beta \in \mathcal{E}$ tels que :

$$\alpha\mathcal{E}^* \beta \subseteq T \,{}^{\bullet}\!. \, a \text{ avec } a \notin T \text{ et } \beta \notin T \,{}^{\bullet}\!. \, a \quad .$$

Pour tout $\lambda \in \mathcal{E}$, on a :

$$\alpha\lambda\mathcal{E}^* \beta a \subseteq T \quad ;$$

T étant tertiaire, on a

$$\alpha\lambda \in \mathcal{R}(T) \text{ et } \alpha \in \mathcal{R}(T) \quad ,$$

par suite

$$\alpha\mathcal{E}^* \subsetneq \mathcal{R}(T) \quad .$$

$a \in T \mathbin{.^{\bullet}} \mathcal{R}(T)$ entraîne alors $\alpha\mathcal{E}^* a \subseteq T$ ou $\alpha\mathcal{E}^* \subseteq T \mathbin{^{\bullet}.} a$.

PROPOSITION 1.5. - Pour que le sous-module $X \neq U$ soit tertiaire, il faut et il suffit qu'il vérifie la propriété :

$$X \mathbin{.^{\bullet}} (\alpha) \supset X \implies \alpha \in \mathcal{R}(X) \quad .$$

C'est la propriété exprimée par la définition 3.1 de [11], restreinte ici aux idéaux principaux (α) de $\mathcal{E}$, et elle se vérifie immédiatement.

THÉORÈME 1.2. - Si le $\mathcal{E}$-module U est unitaire, pour que le sous-module $X \neq U$ soit tertiaire, il faut et il suffit que X ait la propriété :

$$\mathcal{E}a \not\subseteq X \implies \mathcal{R}(X) = \mathcal{R}(X \mathbin{^{\bullet}.} a) \quad .$$

La condition est nécessaire d'après la proposition 1.4 (c). Inversement, supposons que X ait la propriété, et soient $\alpha \in \mathcal{E}$ et $a \in U$ tels que

$$\alpha\mathcal{E}^* a \subseteq X \ , \quad a \not\subseteq X \quad ,$$

$\mathcal{E}a \not\subseteq X$, puisque U est unitaire ; soit donc $\beta \notin X \mathbin{^{\bullet}.} a$.

$$\alpha\mathcal{E}^* \subseteq X \mathbin{^{\bullet}.} a \quad \text{entraîne} \quad \alpha\mathcal{E}^* \beta \subseteq X \mathbin{^{\bullet}.} a \quad ,$$

par suite

$$\alpha \in \mathcal{R}(X \mathbin{^{\bullet}.} a) = \mathcal{R}(X) \quad .$$

Remarque. - Il existe des exemples pour lesquels le théorème précédent est inexact lorsque $\mathcal{E}$ n'a pas d'élément unité.

Rappelons un résultat obtenu au lemme 3.2 de [10] par LESIEUR et CROISOT, pour les idéaux à gauche d'un anneau ; la démonstration de ce lemme n'exige aucune condition de chaîne ; son adaptation au cas des modules est immédiate et donne :

THÉORÈME 1.3. - L'intersection d'une famille finie de sous-modules $\mathcal{R}$-tertiaires (c'est-à-dire tertiaires et de radical $\mathcal{R}$) est un sous-module $\mathcal{R}$-tertiaire.

La preuve du théorème 7.1 de [11] relatif aux idéaux à gauche s'adapte aisément au cas des sous-modules d'un module, et permet d'énoncer :

PROPOSITION 1.6. - T étant sous-module $\mathcal{R}$-tertiaire de U, et x un élément de U, si l'on a $\mathcal{E}x \not\subseteq T$, l'idéal à gauche $T \cdot\!.\, x$ est $\mathcal{R}$-tertiaire dans $\mathcal{E}$.

Preuve. - $\mathcal{R} = \mathcal{R}(T \cdot\!.\, x)$ d'après la proposition 1.4. Supposons

$$\alpha\mathcal{E}^* \beta \subseteq T \cdot\!.\, x$$

et

$$\beta \notin T \cdot\!.\, x \quad ,$$

ce qui équivaut à :

$$\alpha\mathcal{E}^* \beta x \subseteq T \quad \text{et} \quad \beta x \notin T \quad ;$$

T étant $\mathcal{R}$-tertiaire, on a bien

$$\alpha \in \mathcal{R} = \mathcal{R}(T \cdot\!.\, x) \quad .$$

Par une méthode analogue on obtient :

PROPOSITION 1.7. - T étant sous-module $\mathcal{R}$-tertiaire de U, et γ un élément du centre de $\mathcal{E}$, si on a $\gamma U \not\subseteq T$, le sous-module $T \cdot\!.\,\gamma$ est $\mathcal{R}$-tertiaire dans U.

Le théorème suivant est fondamental pour la suite :

THÉORÈME 1.4. - T étant sous-module $\mathcal{R}$-tertiaire de U, et S un sous-ensemble non vide fini de U, si $\mathcal{E}S \not\subseteq T$, l'idéal à gauche $T \cdot\!.\, S$ est $\mathcal{R}$-tertiaire.

En effet il existe un nombre fini d'éléments s_i de S vérifiant :

$$T \cdot\!.\, S = \bigcap_{i=1}^{n} (T \cdot\!.\, s_i) \quad \text{avec} \quad s_i \notin T \quad .$$

Il suffit alors d'appliquer la proposition 1.6 et le théorème 1.3.

2. Modules vérifiant la condition (E) .

Dans tout ce paragraphe (sauf à la proposition 2.2), on suppose que tout sous-module X vérifie la condition d'existence suivante :

Condition (E) : $y \notin X \implies \exists\, y' \in (y)$ tel que $y' \notin X$ et que $X \cdot. (y')$ soit un résiduel essentiel de X par rapport à (y') ;

équivalence à la

Condition (E') : $\mathcal{E}y \notin X \implies \exists\, y' \in (y)$ tel que $y' \notin X$ et que $X \cdot. (y')$ soit un résiduel essentiel de X par rapport à (y') .

Rappelons que l'idéal bilatère $\mathcal{P}$ est résiduel essentiel du sous-module X (par rapport à Y) s'il existe un sous-module $Y \not\subseteq X$ avec $\mathcal{P} = X \cdot. Y$ et :

$$Z \not\subseteq X \text{ et } Z \subseteq Y \implies X \cdot. Z = X \cdot. Y \quad (Z \text{ étant sous-module}) .$$

Cette définition est donnée dans [8], ainsi que les propriétés :

Tout résiduel essentiel du sous-module $X \neq U$ est premier.

Tout résiduel à gauche propre maximal du sous-module $X \neq U$ est essentiel.

PROPOSITION 2.2. - Tout sous-module X de U $(X \neq U)$ vérifie la condition (E) lorsque l'une des conditions suivantes est réalisée :

a. L'anneau $\mathcal{E}$ est artinien à gauche ;

b. Pour tout sous-module $X \neq U$, l'ensemble des résiduels élémentaires de X (c'est-à-dire la forme $X \cdot. (y)$) vérifie la condition maximale ;

c. Le sous-module U est semi-simple.

d. Les conditions de chaîne (D) de LESIEUR et CROISOT de [7] sont vérifiées par tous les sous-modules $X \neq U$.

Preuve de (a). - On vérifie (E') . Soit $\mathcal{E}y \not\subseteq X$; désignons par $(\alpha|$ un idéal minimal parmi les idéaux à gauche monogènes $(\lambda|$ tels que $(\lambda|y \not\subseteq X$.

On vérifie alors aisément que $\mathcal{P} = X \cdot. (\alpha|y$ avec $y' = \alpha y$ est résiduel essentiel de X par rapport à $(y') \subseteq (y)$.

Preuve de (b). - On vérifie (E) . Soit $y \notin X$, et considérons $\mathcal{P} = X \cdot. (y_0)$; résiduel élémentaire maximal parmi les résiduels élémentaires $X \cdot. (y')$ vérifiant $y' \notin X$ et $y' \in (y)$. $\mathcal{P}$ est alors essentiel par rapport à (y_0) .

Preuve de (c). - Soit $y \notin X$, par suite $\mathcal{E}y \neq \{0\}$. Il existe un sous-module simple $\mathcal{E}a$ vérifiant : $\mathcal{E}a \subseteq \mathcal{E}y$ et $\mathcal{E}a \not\subseteq X$;

En effet si tous les sous-modules simples de $\mathcal{E}y$ étaient inclus dans X, il en serait de même de $\mathcal{E}y$ (cf. par exemple le corollaire 1, p. 33, n° 4 du § 3 de [1]). Le résiduel $X \,{}^{\bullet}\!.\, \mathcal{E}a$ est alors essentiel par rapport à $\mathcal{E}a \subseteq (y)$.

Preuve de (d). - L'axiome (D) entraîne la condition exprimée en (b).

PROPOSITION 2.3. - *Le radical tertiaire* $\mathcal{R}$ *d'un sous-module* $X \neq U$ *est l'intersection des résiduels essentiels de* X *(pas nécessairement en nombre fini).* $\mathcal{R}$ *est un résiduel à gauche propre de* X, *et si* X *est tertiaire,* $\mathcal{R}$ *est premier.*

Observons que tout résiduel essentiel de X est élémentaire, et désignons par $\mathfrak{A}$ l'intersection de tous ces résiduels essentiels.

Soient $\mathcal{P} = X \,{}^{\bullet}\!.\, (y)$ un résiduel essentiel de X relatif à (y), et $\rho \in \mathcal{R}$; de $y \notin X$ résulte qu'il existe $y' \in (y)$ tel que $y' \notin X$ et $\rho\mathcal{E}^{*} y' \subseteq X$, d'où

$$\rho \in X \,{}^{\bullet}\!.\, (y') = \mathcal{P} \quad ,$$

car $\mathcal{P}$ est essentiel ; par suite

$$\mathcal{R} \subseteq \mathfrak{A} \quad .$$

Inversement soit $\alpha \in \mathfrak{A}$ et $y \notin X$; d'après la condition (E) il existe $y' \in (y)$ tel que $y' \notin X$ et que $X \,{}^{\bullet}\!.\, (y') = \mathcal{P}'$ soit essentiel, et

$$\alpha \in \mathfrak{A} \subseteq \mathcal{P}' \text{ entraîne } \alpha\mathcal{E}^{*} y' \subseteq X \text{ et } \alpha \in \mathcal{R} \quad .$$

$\mathcal{R} = \mathfrak{A}$ est résiduel à gauche propre de X, car l'ensemble des résiduels à gauche de $X (\neq U)$ est une famille de Moore sur les parties de $\mathcal{E}$ (cf. la définition p. 8 du § 4 de [4]), et il est premier d'après la proposition 1.4 lorsque X est tertiaire.

THÉORÈME 2.1. - *Le sous-module* $X \neq U$ *est* $\mathcal{R}$*-tertiaire si, et seulement s'il possède un et un seul résiduel essentiel (qui est* $\mathcal{R}$ *).*

Si $X \neq U$ est $\mathcal{R}$-tertiaire, $\mathcal{R}$ contient tout résiduel essentiel $\mathcal{P}$ de X d'après la proposition 1.4, et $\mathcal{R} = \mathcal{P}$ d'après la proposition précédente.

Inversement soit $\mathcal{P}$ le seul résiduel essentiel de X. On a

$$\mathcal{R}(X) = \mathcal{P}$$

d'après la proposition 2.3 X est tertiaire car :

$$\mathfrak{a}\mathcal{E}^* y \subseteq X \ , \quad y \notin X \qquad ,$$

et la condition (E) entraînent l'existence de $y' \in (y)$ avec $y' \notin X$ et $X \,^{\bullet}.\, (y')$ essentiel ; donc

$$\mathcal{P} = X \,^{\bullet}.\, (y') \quad \text{et} \quad \alpha \in X \,^{\bullet}.\, (y) \subsetneq X \,^{\bullet}.\, (y') = \mathcal{P} = \mathcal{R}(X) \qquad .$$

THÉORÈME 2.2. - La définition d'un sous-module tertiaire adoptée dans cette étude est équivalente à celle donnée dans [7]. (cf. le rappel précédant la proposition 1.3).

La deuxième définition entraîne la première d'après la proposition 1.3. Réciproquement, soit un sous-module $X \neq U$ tertiaire au sens de la définition du paragraphe 1, et qui ne soit pas tertiaire au sens de [7] ; il existerait alors un idéal bilatère $\mathfrak{a}$ et un sous-module Y tels que :

$$(X \,.^{\bullet}\, \mathfrak{a}) \cap Y \subseteq X \ , \quad X \,.^{\bullet}\, \mathfrak{a} \supset X \ , \quad Y \nsubseteq X \qquad .$$

Considérons alors $y \in Y$, $y \notin X$; d'après la condition (E) et le théorème 1.2, il existe $y' \in (y)$ tel que $y' \notin X$ et $\mathcal{R}(X) = X \,^{\bullet}.\, (y')$. D'autre part $X \,.^{\bullet}\, \mathfrak{a} \supset X$, et la proposition 1.5 entraînent $\mathfrak{a} \subsetneq \mathcal{R}(X)$; donc

$$y' \in X \,.^{\bullet}\, \mathcal{R}(X) \subsetneq X \,.^{\bullet}\, \mathfrak{a} \qquad ,$$

et

$$y' \in (X \,.^{\bullet}\, \mathfrak{a}) \cap Y \subseteq X \quad \text{est contraire à} \quad y' \notin X \qquad .$$

THÉORÈME 2.3. - Tout sous-module $\mathcal{P}$-unirésidué (c'est-à-dire possédant un résiduel à gauche propre premier unique et égal à $\mathcal{P}$) est $\mathcal{P}$-tertiaire.

Cela résulte du fait que tout sous-module $X \neq U$ possède des résiduels essentiels d'après la condition (E) , du fait que tout résiduel essentiel est premier, et du théorème 2.1.

THÉORÈME 2.4. - Tout sous-module tertiaire est primal, c'est-à-dire vérifie :

$$X \cdot\!\!\cdot\, \mathfrak{a}_1 \supset X \text{ et } X \cdot\!\!\cdot\, \mathfrak{a}_2 \supset X \implies (X \cdot\!\!\cdot\, \mathfrak{a}_1) \cap (X \cdot\!\!\cdot\, \mathfrak{a}_2) \supset X \quad .$$

c'est une conséquence du théorème 2.2.

Remarque. - La proposition 2.3, les théorèmes 2.1, 2.2, 2.3 et 2.4 étendent aux modules vérifiant (E) , les propriétés analogues établies dans [7], [8], [9], [10], [11], sous l'axiome (D) .

PROPOSITION 2.4. - Si le sous-module $X \neq U$ vérifie (E) et la condition minimale (m) pour ses résiduels à gauche, X ne possède qu'un nombre fini de résiduels à gauche propres premiers minimaux (et qu'un nombre fini de résiduels essentiels minimaux).

Si l'ensemble Φ des résiduels à gauche premiers minimaux de X était infini, il existerait dans Φ une famille infinie dénombrable $\mathfrak{P}_1 , \mathfrak{P}_2 , \ldots , \mathfrak{P}_n , \ldots$ d'éléments distincts deux à deux, et on pourrait former la suite strictement décroissante et infinie :

$$\mathfrak{P}_1 \supset \mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{P}_2 \supset \ldots \supset \mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{P}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{P}_n \supset \ldots \quad ,$$

de résiduels à gauche de X , ce qui contredirait (m) .

Remarque. - Dans ce cas $\mathfrak{R}(X)$ est intersection d'un nombre fini de résiduels essentiels de X .

PROPOSITION 2.5. - Un sous-module X , différent de U , et $\mathfrak{P}$-tertiaire vérifie :

$$\mathfrak{S}y \not\subseteq X \implies \mathfrak{P} = X \,\cdot\!\!\cdot\, \mathfrak{a}y \quad ,$$

où

$$\mathfrak{a} = (X \,\cdot\!\!\cdot\, y) \cdot\!\!\cdot\, \mathfrak{P} \text{ et } \mathfrak{a}y \not\subseteq X$$

Soit $\lambda y \notin X$. D'après la condition (E) , on peut trouver $y' \in (\lambda y)$ tel que $y' \notin X$ et $\wp = X \,{}^{\bullet}\!.\, (y')$. (cf. théorème 2.1).

Mais $(y') = (\lambda'|y$ avec $\lambda' \in (\lambda|$; par suite

$$\wp(\lambda'|y \subseteq X \quad \text{ou} \quad (\lambda'| \subseteq (X \,{}^{\bullet}\!.\, y) \,.{}^{\bullet}\, \wp = \alpha \quad .$$

Donc

$$(\lambda'|y \subseteq \alpha y \quad \text{et} \quad \alpha y \not\subseteq X \quad ,$$

car $(\lambda'|y \notin X$,

$$\wp = X \,{}^{\bullet}\!.\, (\lambda'|y \supseteq X \,{}^{\bullet}\!.\, \alpha y \quad .$$

D'autre part, par définition de α :

$$\wp \subseteq X \,{}^{\bullet}\!.\, \alpha y \quad .$$

3. Comparaison des sous-modules tertiaires et unirésidués.

L'étude qui suit s'appuiera sur la proposition suivante.

PROPOSITION 3.1. - Soit $X \neq U$ un sous-module $\wp$-tertiaire vérifiant la condition (E) et la condition minimale (m) pour ses résiduels à gauche.

Si $\wp' = X \,{}^{\bullet}\!.\, Y$ est un résiduel à gauche propre premier de X , distinct de $\wp$, alors il existe $y \in Y$ tel que :

a. $\wp' = X \,{}^{\bullet}\!.\, (y)$; $\wp' \subset \wp$; $\wp = X \,{}^{\bullet}\!.\, \alpha y$, avec $\alpha = (X \,{}^{\bullet}\!.\, y) \,.{}^{\bullet}\, \wp$ et $\alpha y \not\subseteq X$;

b. L'idéal à gauche $m = X \,{}^{\bullet}\!.\, y$ est $\wp$-tertiaire, admet $\wp' = m \,{}^{\bullet}\!.\, \mathcal{E}$ comme résiduel à gauche, et vérifie :

$$\wp' \subset m \subset \alpha \quad ;$$

c. Tout idéal bilatère contenu dans α est contenu dans $\wp'$.

Preuve de (a). - La condition (m) et l'$\cap$-irréductibilité de $\wp'$ sur les idéaux bilatères de $\mathcal{E}$, entraînent que $\wp'$ est résiduel élémentaire $X \,{}^{\bullet}\!.\, (y)$ de X .

On a $\mathcal{E}y \not\subseteq X$ (sans quoi $\mathcal{E} = \wp'$), et la proposition 2.5 s'applique :

$$\mathcal{P} = X \cdot\!\!\!\cdot\; \alpha y \quad \text{avec} \quad \alpha y \not\subseteq X \text{ , et aussi } \mathcal{P} \supset \mathcal{P}' \quad .$$

<u>Preuve de (b)</u>. – m est $\mathcal{P}$-tertiaire d'après la proposition 1.6, et contient $\mathcal{P}'$ car :

$$\mathcal{P}'y = \mathcal{P}'(y) \subseteq X \quad ,$$

et $\mathcal{P}' = m$ est impossible, car m étant $\mathcal{P}$-tertiaire, $\mathcal{P}$ serait alors résiduel à gauche propre de $\mathcal{P}'$, ce qui est incompatible avec $\mathcal{P}' \neq \mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ premier.

D'autre part, par définition de α , $m \subseteq \alpha$; et $m = \alpha$ est impossible, car alors

$$\alpha y = my \subseteq X \quad .$$

Posons $\mathcal{B} = \alpha \cdot\!\!\!\cdot\; \mathcal{E}$, et montrons d'abord que $\mathcal{B} = \mathcal{P}'$. Tout d'abord

$$\mathcal{P}' \subset \alpha \quad \text{entraîne} \quad \mathcal{P}'\mathcal{E} \subseteq \alpha \quad \text{et} \quad \mathcal{P}' \subseteq \mathcal{B} \quad .$$

Puis

$$\mathcal{B}\mathcal{E} \subseteq \alpha \quad \text{entraîne} \quad \mathcal{P}\mathcal{B}\mathcal{E}y \subseteq X \text{ , } \quad \mathcal{P}\mathcal{B}(y) \subseteq X \text{ , } \quad \mathcal{P}\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}' \quad ,$$

avec $\mathcal{P} \not\subseteq \mathcal{P}'$ et $\mathcal{P}'$ premier, d'où

$$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}' \quad .$$

Pour montrer que $\mathcal{P}' = m \cdot\!\!\!\cdot\; \mathcal{E}$, observons que

$$\mathcal{P}' \subseteq m \quad \text{entraîne} \quad \mathcal{P}' \subseteq m \cdot\!\!\!\cdot\; \mathcal{E} \quad .$$

D'autre part, de $m \subset \alpha$, on déduit :

$$m \cdot\!\!\!\cdot\; \mathcal{E} \subseteq \alpha \cdot\!\!\!\cdot\; \mathcal{E} = \mathcal{P}'$$

d'où

$$\mathcal{P}' = m \cdot\!\!\!\cdot\; \mathcal{E} \quad .$$

Preuve de (c). – Soit un idéal bilatère $\mathfrak{a} \subseteq \alpha$; on a

$$\mathcal{P}\mathfrak{a}y \subseteq \mathcal{P}\alpha y \subseteq X \quad ;$$

par suite :

$$\mathcal{P}\mathfrak{a}(y) \subseteq X \text{ et } \mathcal{P}\mathfrak{a} \subseteq \mathcal{P}' \text{ entraînent } \mathfrak{a} \subseteq \mathcal{P}' \quad .$$

THÉORÈME 3.1 (de transfert). – U *est un* $\mathcal{E}$-*module à gauche vérifiant les conditions* (E) *et* (m) *pour tous ses sous-modules.*

Si, dans l'anneau $\mathcal{E}$, *tout idéal à gauche (propre) tertiaire est unirésidué, dans le module* U *les notions de sous-modules* ($\neq$ U) *tertiaires et de sous-modules unirésidués coïncident et le radical tertiaire du sous-module est alors le seul résiduel à gauche propre premier de ce sous-module.*

C'est une conséquence du théorème 2.3, et du fait que, si la conclusion n'était pas réalisée, il existerait dans $\mathcal{E}$ un idéal à gauche tertiaire et non unirésidué d'après le (b) de la proposition 3.1).

Nous allons étudier quelques cas de coïncidence des deux précédentes notions.

Premier cas : $\mathcal{E}$ *est un anneau artinien à gauche.*

(E) et (m) sont réalisées pour tout module à gauche U sur $\mathcal{E}$. D'autre part, LESIEUR et CROISOT ont montré que si $\mathcal{E}$ est artinien à gauche, un idéal à gauche propre de $\mathcal{E}$ est $\mathcal{P}$-tertiaire si, et seulement s'il est $\mathcal{P}$-unirésidué (cf. théorème 7.3 de [10]). Le théorème 3.1 s'applique et :

THÉORÈME 3.2. – U *étant un* $\mathcal{E}$-*module à gauche sur un anneau artinien à gauche, pour que le sous-module* T $\neq$ U *soit* $\mathcal{P}$-*tertiaire, il faut et il suffit qu'il soit* $\mathcal{P}$-*unirésidué.*

Des résultats beaucoup plus précis peuvent être obtenus, à l'exemple de ceux obtenus dans [10] aux théorèmes 8.2 et 8.3 relatifs aux idéaux à gauche d'un anneau artinien (à gauche) ; ils peuvent être tirés du théorème 8.1 de [10]. Dans un anneau artinien à gauche, tout idéal *bilatère propre premier* est *maximal* (en tant qu'idéal bilatère propre).

On en déduit alors que l'ensemble Φ des résiduels à gauche propres premiers d'un sous-module X $\neq$ U est *fini* et *non vide* ($\mathcal{E}$ artinien à gauche). *Tous les résultats* des paragraphes 2 à 7 de [7] sont alors valables, en particulier les théorèmes qui caractérisent les éléments secondaires et primaux par leurs résiduels à gauche propres premiers (théorèmes 6.1 et 4.1 de [7]).

Il est alors aisé de montrer le théorème ci-dessous.

THÉORÈME 3.3. – U étant un $\mathcal{E}$-module à gauche sur l'anneau artinien à gauche $\mathcal{E}$, pour $\mathfrak{P} \neq \mathcal{E}$ les quatre notions de sous-modules ($\neq U$) $\mathfrak{P}$-primal, $\mathfrak{P}$-tertiaire, $\mathfrak{P}$-unirésidué, $\mathfrak{P}$-secondaire coïncident.

COROLLAIRE 3.1. – Si U est unitaire, pour les sous-modules distincts de U, les quatre notions précédentes coïncident..

Deuxième cas.

THÉORÈME 3.4. – Dans un anneau noethérien à gauche $\mathcal{E}$ en lequel tous les idéaux à gauche sont bilatères, les notions d'idéal à gauche propre (bilatère) $\mathfrak{P}$-tertiaire à droite (en tant qu'idéal à gauche) et d'idéal à gauche $\mathfrak{P}$-unirésidué coïncident.

En effet le (c) de la proposition 3.1 s'appliquerait si la conclusion proposée était fausse.

Troisième cas. : $\mathcal{E}$ est un anneau noethérien à droite (et on prend $U = \mathcal{E}$).

Établissons d'abord la proposition suivante.

PROPOSITION 3.3. – Soit $\mathfrak{a}$ un idéal bilatère d'un anneau $\mathcal{E}$, vérifiant la condition (M) maximale pour ses résiduels à droite $\mathfrak{a} \,.^{\bullet}\, S$, où S est un sous-ensemble non vide quelconque de $\mathcal{E}$. L'idéal $\mathfrak{a}$ a la propriété :

$$\mathcal{E}S \not\subseteq \mathfrak{a} \text{ et } \mathfrak{a} \text{ est } \mathfrak{P}\text{-tertiaire (à droite} \implies \mathfrak{a} \,^{\bullet}.\, S \text{ est } \mathfrak{P}\text{-tertiaire (à droite)}$$

(M) équivaut à la condition (μ) minimale sur les résiduels $\mathfrak{a} \,^{\bullet}.\, S$,, car les applications :

$$S \to \mathfrak{a} \,.^{\bullet}\, S \quad \text{et} \quad S \to \mathfrak{a} \,^{\bullet}.\, S \qquad ,$$

définissent (par restriction) une application anti-isotone de l'ensemble des $\mathfrak{a} \,^{\bullet}.\, S$ (qui sont idéaux à gauche) sur l'ensemble des $\mathfrak{a} \,.^{\bullet}\, S$ (qui sont idéaux à droite).

(μ) entraîne alors qu'il existe une partie finie $S_0 \subsetneq S$ telle que

$$\mathcal{E}S_0 \not\subseteq \mathfrak{a} \quad \text{et} \quad \mathfrak{a} \,^{\bullet}.\, S = \mathfrak{a} \,^{\bullet}.\, S_0 \qquad .$$

Il suffit alors d'appliquer le théorème 1.4.

THÉORÈME 3.5. - <u>Soit</u> $\mathcal{E}$ <u>un anneau</u> <u>noethérien à droite</u> ; <u>un idéal propre</u> <u>bilatère</u> $\mathfrak{a}$ <u>de</u> $\mathcal{E}$ <u>est</u> $\mathfrak{P}$-<u>unirésidué</u> <u>si et seulement s'il est</u> $\mathfrak{P}$-<u>tertiaire</u> <u>à droite</u> (<u>en tant qu'idéal à gauche</u>).

La condition (E) est vérifiée par la structure de $\mathcal{E}$-module à gauche de $\mathcal{E}$, et le théorème 2.3 s'applique.

D'autre part, soit $\mathfrak{a} \neq \mathcal{E}$ un idéal bilatère $\mathfrak{P}$-tertiaire. Pour tout résiduel à gauche propre premier $\mathfrak{P}'$ de $\mathfrak{a}$, on a $\mathfrak{P}' = \mathfrak{a} \cdot\!\!. \, Y \subsetneq \mathfrak{P}$. Si $\mathcal{E}Y \subseteq \mathfrak{a}$, $\mathfrak{P}' = \mathcal{E} = \mathfrak{P}$; si $\mathcal{E}Y \not\subseteq \mathfrak{a}$, alors $\mathfrak{P}' = \mathfrak{a} \cdot\!\!. \, Y$ est $\mathfrak{P}$-tertiaire d'après la proposition 3.3, et $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}'$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI (Nicolas). - Algèbre. Chapitre 8. - Paris, Hermann, 1958 (Act. scient. et ind., 1261 ; Éléments de Mathématique, 1).

[2] CARTAN (H.) and EILENBERG (S.). - Homological algebra. - Princeton, University Press, 1956 (Princeton mathematical Series, 19).

[3] DUBREIL (Paul). - Algèbre, I., 2e édition. - Paris, Gauthier-Villars, 1954 (Cahiers scientifiques, 20).

[4] DUBREIL (P.) et DUBREIL-JACOTIN (M.-L.). - Leçons d'algèbre moderne. - Paris, Dunod, 1961 (Coll. univ. Math., 6).

[5] DUBREIL-JACOTIN (M.-L.), LESIEUR (L.) et CROISOT (R.). - Leçons sur la théorie des treillis, des structures algébriques ordonnées et des treillis géométriques. - Paris, Gauthier-Villars, 1953 (Cahiers scientifiques, 21).

[6] FORT (Jacques). - Quelques propriétés des sous-modules tertiaires d'un module sur un anneau non nécessairement commutatif, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 248, 1959, p. 1748-1750.

[7] LESIEUR (L.) et CROISOT (R.). - Théorie noethérienne des anneaux, des demi-groupes et des modules dans le cas non commutatif, I., Colloque d'algèbre supérieure [1956. Bruxelles] ; p. 79-121. - Louvain, Centerick, 1957 (Centre belge de Recherches mathématiques).

[8] LESIEUR (L.) et CROISOT (R.). - La notion de résiduel essentiel, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 246, 1958, p. 357-360.

[9] LESIEUR (L.) et CROISOT (R.). - Une propriété caractéristique des idéaux tertiaires, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 246, 1958, p. 517-520.

[10] LESIEUR (L.) et CROISOT (R.). - Théorie noethérienne des anneaux, des demi-groupes et des modules dans le cas non commutatif, II., Math. Annalen, t. 134, 1958, p. 458-476.

[11] LESIEUR (L.) et CROISOT (R.). - Théorie noethérienne des anneaux, des demi-groupes et des modules dans le cas non commutatif, III., Acad. Royale Belg., t. 44, 1958, p. 75-93.