PIERRE GRILLET

Équivalences compatibles. Équivalences prépermises

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 15, nº 1 (1961-1962), exp. nº 2, p. 1-23

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1961-1962__15_1_A2_0>

ÉQUIVALENCES COMPATIBLES. ÉQUIVALENCES PRÉPERMISES

par Pierre GRILLET

1. Définitions générales.

A. Relations binaires.

Soit E un ensemble ; P désignera l'ensemble de ses parties. On notera, pour tout $x \in E$, x au lieu de $\{x\}$.

L'ensemble A des applications de P dans P peut être ordonné par la relation

$$\varphi \subseteq \psi \iff \varphi \text{ et } \psi \in A \text{ et } (\forall\ X \in P) , \varphi(X) \subseteq \psi(X) .$$

C'est alors un treillis (de Boole) complet ; l'intersection et la réunion d'une famille $(\varphi_\iota)_{\iota\in I} \subseteq A$ sont données par (1) :

(1) $$(\forall\ X \in P) , \Big(\bigcup_{\iota\in I} (\varphi_\iota)\Big)(X) = \bigcup_{\iota\in I} (\varphi_\iota(X)) , \Big(\bigcap_{\iota\in I} (\varphi_\iota)\Big)(X) = \bigcap_{\iota\in I} (\varphi_\iota(X)) .$$

C'est d'autre part un demi-groupe pour la composition des applications, notée $\circ$; ce n'est pas un demi-groupe ordonné ; on a toutefois les formules (2) :

(2) $$(\forall\ \psi \in A) , \Big(\bigcup_{\iota\in I} (\varphi_\iota)\Big) \circ \psi = \bigcup_{\iota\in I} (\varphi_\iota \circ \psi) , \Big(\bigcap_{\iota\in I} (\varphi_\iota)\Big) \circ \psi = \bigcap_{\iota\in I} (\varphi_\iota \circ \psi) .$$

On appelle I l'application identique de P . Un élément φ de A est dit <u>extensif</u> si $I \subseteq \varphi$; <u>préidempotent</u> si $\varphi^2 \subseteq \varphi$; un élément extensif et préidempotent de A est idempotent.

Les homomorphismes du sup-demi-treillis complet P forment une partie U de A . On a, pour $(X_\iota)_{\iota\in I} \subseteq P$, $(\varphi_\iota)_{\iota\in I} \subseteq A$:

(3) $$(\forall\ \psi \in U)\ \psi\Big(\bigcup_{\iota\in I} (X_\iota)\Big) = \bigcup_{\iota\in I} (\psi(X_\iota)) , \psi \circ \Big(\bigcup_{\iota\in I} (\varphi_\iota)\Big) = \bigcup_{\iota\in I} (\psi \circ \varphi_\iota) .$$

La propriété

(3') $$(\forall\ X \in P) , \varphi(X) = \bigcup_{x\in X} \varphi(x)$$

caractérise les éléments de U .

U est un sous-demi-groupe et un sous-sup-demi-treillis complet de A ; et un demi-groupe ordonné en sup-demi-treillis complet d'après (2) et (3). U n'est pas un sous-treillis complet de A ; toutefois le plus petit élément de A appartient à U et U est un treillis complet. On notera $\bigwedge$ l'intersection dans U .

On appelle <u>opérateur</u> sur E tout élément σ de U tel que $(\forall\ x \in E)$, $\sigma(x)$ n'ait qu'un seul élément, qu'on note alors σx . L'ensemble O des opérateurs sur E est un sous-demi-groupe de U .

Soient R l'ensemble des relations binaires sur E , ρ l'application de U dans R définie par

(4) $$(\forall\ \varphi \in U)\ ,\ x\ \rho(\varphi)\ y \iff x \text{ et } y \in E \text{ et } y \in \varphi(x) \quad .$$

α l'application de R dans U définie par :

(4') $$(\forall\ \mathcal{R} \in R)\ ,\ (\forall\ X \in P)\ ,\ \alpha(\mathcal{R})(X) = \{y \in E\ ;\ (\exists\ x \in X)\ ,\ x\mathcal{R}y\} \ .$$

Des formules (4) et (5) résulte que $\rho \circ \alpha$ est l'application identique de R et que $\alpha \circ \rho$ est l'application identique de U ; ρ et α sont donc des bijections inverses ; ρ étant isotone ainsi que α , on peut énoncer :

PROPOSITION 1.1. - R et U sont des treillis isomorphes.

Appliquant (4) à l'intersection, on voit que

(5) $$(\varphi \wedge \psi)(x) = \varphi(x) \cap \psi(x) = (\varphi \cap \psi)(x)$$

ceci, d'après (3'), définit explicitement l'intersection $\bigwedge$; on en déduit la formule

(2') $$(\bigwedge \varphi_\iota) \circ \psi = \bigwedge (\varphi_\iota \circ \psi)$$

pour $(\varphi_\iota) \subseteq U$, $\psi \in U$ en appliquant à un élément.

On a, si $\varphi \in U$, d'après (4) :

φ extensif $\iff$ $\rho(\varphi)$ réflexive

φ préidempotent $\iff$ $\rho(\varphi)$ transitive

ceci amène à poser φ <u>symétrique</u> $\iff$ $\rho(\varphi)$ symétrique, c'est-à-dire si $(\forall\ x\ ,\ y \in E)$,

$$y \in \varphi(x) \implies x \in \varphi(y) \quad .$$

On a alors la proposition :

PROPOSITION 1.2. - Si $\varphi \in U$, $\rho(\varphi)$ est une relation d'équivalence si et seulement si φ est extensif, préidempotent et symétrique.

On appellera équivalence un tel élément de U , et prééquivalence tout élément extensif et préidempotent de U .

PROPOSITION 1.3. - L'ensemble des équivalences est une famille de Moore $\bigcup$-inductive de U ; l'ensemble des prééquivalences un sous-treillis complet de U .

Ceci est évident d'après la proposition 1.1, mais on peut le démontrer directement à l'aide de (5). L'ensemble des équivalences est donc un treillis complet ; on notera $\bigvee$ le sup dans ce treillis.

Les notions de complexe saturé ou indivisible s'étendent ainsi, pour tout $\varphi \in U$ et tout $H \in P$,

H saturé pour $\varphi \iff \varphi(H) \subseteq H$.

H indivisible pour $\varphi \iff (\forall\ x, y \in H)$, $y \in \varphi(x) \iff (\forall\ x \in H)$, $H \subseteq \varphi(x)$.

B. Complexes de prééquivalence.

On se propose d'étudier une condition suffisante commode pour que la borne supérieure d'un complexe de U soit une prééquivalence, ou une équivalence.

Si Φ est un complexe de U , $\sup \Phi \in U$. D'autre part, si Φ contient un élément extensif, $\sup \Phi$ est extensif.

On dira que Φ est globalement symétrique si

$$(\forall\ x , y \in E) , ((\exists\ \varphi \in \Phi) , y \in \varphi(x) \implies (\exists\ \psi \in \Phi) , x \in \psi(y)) .$$

Si Φ est globalement symétrique, $\sup \Phi$ est symétrique : en effet, d'après (1),

$$(\forall\ x \in E) , (\sup \Phi)(x) = \bigcup_{\varphi \in \Phi} (\varphi(x)) \qquad ;$$

d'où

$$y \in \sup \Phi(x) \implies (\exists\ \varphi \in \Phi) , y \in \varphi(x) \implies (\exists\ \psi \in \Phi) , x \in \psi(y)$$
$$\implies x \in \sup \Phi(y) \qquad .$$

Par définition, on appellera complexe de prééquivalence un complexe de U globalement symétrique et contenant un élément extensif. On a donc la

PROPOSITION 1.4. - La borne supérieure d'un complexe de prééquivalence est une prééquivalence.

On dit qu'un complexe Φ de U est <u>préstable</u> si, pour tous φ, $\psi \in \Phi$, il existe $\xi \in \Phi$ tel que $\varphi \circ \psi \subseteq \xi$. Tout complexe stable est préstable. Si Φ est préstable, $\sup \Phi$ est préidempotent :

$$\left(\bigcup_{\varphi\in\Phi} \varphi\right) \circ \left(\bigcup_{\psi\in\Phi} \psi\right) = \bigcup_{\varphi\in\Phi} \left(\varphi \circ \left(\bigcup_{\psi\in\Phi} \psi\right)\right) = \bigcup_{\varphi,\psi\in\Phi} (\varphi \circ \psi) \subseteq \bigcup_{\xi\in\Phi} \xi \quad ,$$

d'après (2) et (3). Donc, si on appelle <u>complexe d'équivalence</u> un complexe de prééquivalence préstable, on a

PROPOSITION 1.5. - La borne supérieure d'un complexe d'équivalence est une équivalence.

Une prééquivalence est un complexe de prééquivalence ; U, 0, une équivalence, un groupe d'opérateurs sur E sont des complexes d'équivalence.

PROPOSITION 1.6. - La fermeture stable (pour $\circ$) d'un complexe de prééquivalence est un complexe d'équivalence.

Il suffit de vérifier que la fermeture stable Ξ du complexe donné Φ est globalement symétrique. Soient x, $y \in E$ et $\xi \in \Xi$;

$$(\exists\ \varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \Phi) \ , \quad \xi = \varphi_1 \circ \ldots \circ \varphi_n \quad ;$$

si $y \in \xi(x)$, il existe $x_1, \ldots, x_n \in E$ tels que

$$y \in \varphi_1(x_1) \ , \ \ldots \ , \ x_{i-1} \in \varphi_i(x_i) \ , \ \ldots \ , \ x_n = x \quad ;$$

or

$$(\exists\ \psi_1, \ldots, \psi_n \in \Phi) \ , \quad x_i \in \psi_i(x_{i-1}) \ , \ \ldots \ , \ x_1 \in \psi_1(y) \quad ;$$

donc il existe $\tau \in \Xi$, à savoir $\psi_n \circ \ldots \circ \psi_1$, tel que $x \in \tau(y)$.

Par exemple, si φ est une prééquivalence, la fermeture stable de $\{\varphi\}$ est un complexe d'équivalence, donc $\bigcup_{n\in N} \varphi^n$ est une équivalence ; c'est évidemment la plus fine contenant φ. On la désigne par <u>fermeture transitive</u> de φ. On vérifie sans peine la proposition suivante.

PROPOSITION 1.7. - Les complexes saturés (resp. indivisibles) pour une prééquivalence sont saturés (resp. indivisibles) pour sa fermeture transitive, et réciproquement.

C. Lois de composition.

Soit maintenant un ensemble D , et une loi de composition $(d , x) \to d.x (d \in D , x \in E)$ sur E . On appelle famille de translations de la loi la famille, indexée par D , des éléments t_d de O définis par $(\forall d \in D) , (\forall X \in P) , t_d(X) = d.X$. Réciproquement, toute partie $\mathcal{T}$ de O est la famille de translations d'une loi de composition sur E , à savoir

$$(\sigma , x) \to \sigma x (\sigma \in \mathcal{T} , x \in E) \quad .$$

On appelle famille de multiplication toute partie stable de O contenant I , et famille de multiplication engendrée par une partie $\mathcal{T}$ de O la fermeture stable de $\mathcal{T} \cup I$. L'intérêt de cette notion apparaîtra dans la suite. On se propose en effet d'étudier des propriétés d'éléments de A dépendant d'une partie $\mathcal{T}$ de O , donc susceptibles de dépendre d'une loi de composition sur E , ou simultanément de plusieurs lois, et telles qu'on y puisse toujours supposer que $\mathcal{T}$ est une famille de multiplication. Si E est muni de plusieurs lois de composition, on pourra, en considérant la famille de multiplication engendrée par les diverses familles de translation, se ramener au cas où E ne possède qu'une loi de composition.

Si E est un groupoïde, on appelle $\mathcal{T}_d$ la famille des translations à droite, $\mathcal{T}_g$ celle des translations à gauche, $\mathcal{M}_d , \mathcal{M}_g , \mathcal{M}_b$ les familles de multiplication engendrées respectivement par $\mathcal{T}_d , \mathcal{T}_g , \mathcal{T}_d \cup \mathcal{T}_g$. Si E est un demi-groupe,

$$\mathcal{M}_d = \mathcal{T}_d \cup I , \quad \mathcal{M}_g = \mathcal{T}_g \cup I \quad ;$$

$\mathcal{M}_d$ et $\mathcal{M}_g$ commutent élément par élément, et

$$\mathcal{M}_b = \mathcal{M}_d \cup \mathcal{M}_g \cup (\mathcal{M}_d \circ \mathcal{M}_g) \quad .$$

D. Résiduel faible.

Soient $A , B \in P$ et $\Sigma \subseteq U$. A côté des résiduels ordinaires :

$$A \cdot\!\!\cdot_{\Sigma} B = \{\sigma \in \Sigma \; ; \; \sigma(B) \subseteq A\}$$

$$A \cdot\!\!\cdot \Sigma = \{b \in E \; ; \; \Sigma(b) \subseteq A\} , \quad (\Sigma(b) = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} (\sigma(b)))$$

on définit les résiduels faibles :

$$A \ddots_{\Sigma} B = \{\sigma \in \Sigma \; ; \; \sigma(B) \text{ rencontre } A\} = (A \ddots_{U} B) \cap \Sigma \quad ,$$

$$A \iddots \Sigma = \{b \in E \;;\; \Sigma(b) \text{ rencontre } A\} \quad .$$

L'opération possède les règles de calcul suivantes, évidentes à partir des définitions :

(6a) $$A \ddots_{\Sigma} \Big(\bigcup_{\iota \in I} B_{\iota}\Big) = \bigcup_{\iota \in I} (A \ddots_{\Sigma} B_{\iota})$$

(6b) $$\Big(\bigcup_{\iota \in I} A_{\iota}\Big) \ddots_{\Sigma} B = \bigcup_{\iota \in I} (A_{\iota} \ddots_{\Sigma} B)$$

(6c) $$A \iddots \Big(\bigcup_{\iota \in I} \Sigma_{\iota}\Big) = \bigcup_{\iota \in I} (A \iddots \Sigma_{\iota})$$

(6d) $$\Big(\bigcup_{\iota \in I} A_{\iota}\Big) \iddots \Sigma = \bigcup_{\iota \in I} (A_{\iota} \iddots \Sigma)$$

(6e) $$(A \iddots \Sigma) \iddots \Sigma' = A \iddots (\Sigma \circ \Sigma')$$

(6f) $$\sigma' \in A \ddots_{U} \sigma(B) \iff \sigma' \circ \sigma \in A \ddots_{U} B$$

(6g) $$\Big(\bigcap_{\iota \in I} A_{\iota}\Big) \iddots \sigma = \bigcap_{\iota \in I} (A_{\iota} \iddots \sigma) \quad \text{si} \quad \sigma \in O$$

(6h) $$A \mathbin{^{\cdot}.}_{\Sigma} B \subseteq A \ddots_{\Sigma} B \quad \text{si} \quad B \neq \emptyset$$

(6i) $$A \mathbin{.^{\cdot}} \Sigma \subseteq A \iddots \Sigma \quad \text{si} \quad \Sigma \neq \emptyset$$

(6j) $$A \ddots_{U} x = A \mathbin{^{\cdot}.}_{U} x \quad \text{si} \quad x \in E$$

(6k) $$A \iddots \sigma = A \mathbin{.^{\cdot}} \sigma \quad \text{si} \quad \sigma \in O$$

avec

$$A \,,\; B \in P \,,\; (A_{\iota})_{\iota \in I} \,,\; (B_{\iota})_{\iota \in I} \subseteq P \,,\; (\Sigma_{\iota})_{\iota \in I} \subseteq \mathcal{P}(U) \quad .$$

Si E est un demi-groupe, on posera, pour A , $B \in P$:

$$A \iddots B = \{x \in E \;;\; Bx \text{ rencontre } A\}$$

$$A \ddots B = \{x \in E \;;\; xB \text{ rencontre } A\} \quad .$$

Ces opérations se distinguent des précédentes en ce qu'elles sont des lois de composition interne sur P ; leur usage ici sera de permettre une écriture élémentaire de résultats où interviennent $\mathfrak{M}_d$ ou $\mathfrak{M}_g$.

On considèrera aussi

$$A \cdots B = \{(x , y) \in E \times E \;;\; xBy \text{ rencontre } A\}$$

qui permettra une écriture élémentaire de certains résultats où intervient $\mathfrak{M}_b$.

2. Équivalences compatibles.

Etant donnés $\sigma \in O$ et $\varphi \in A$, on dit que φ est σ-compatible quand $\sigma \circ \varphi \subseteq \varphi \circ \sigma$. Quand $\varphi \in U$, cette définition équivaut clairement à

$$(\forall\ x, y \in E)\ ,\quad y \in \varphi(x) \implies \sigma y \in \varphi(\sigma x) \quad .$$

Si Σ est une partie de O, φ est dit Σ-compatible s'il est σ-compatible pour tout $\sigma \in \Sigma$. Si $\varphi \in U$, l'ensemble des $\sigma \in O$ tels que φ soit σ-compatible est stable pour $\circ$ et contient I ; par suite, si Σ est une partie de O et $\mathfrak{M}$ la famille de multiplication engendrée par Σ, " φ est Σ-compatible" équivaut à " φ est $\mathfrak{M}$-compatible" ; en d'autres termes, on peut toujours supposer que Σ est une famille de multiplication.

Si E est muni d'une loi de composition externe dont la famille de translations est $\mathcal{T}$, et si $\varphi \in U$, il est clair que " φ est $\mathcal{T}$-compatible" équivaut à " $\rho(\varphi)$ est compatible par rapport à la loi de composition". De même, si E est un groupoïde, φ est $\mathfrak{M}_d$-compatible (resp. $\mathfrak{M}_g$, $\mathfrak{M}_b$) si et seulement si $\rho(\varphi)$ est compatible à droite (resp. à gauche, bilatère). On peut enfin utiliser les remarques de la section 1. C.

Soit donc Σ une famille de multiplication sur E.

PROPOSITION 2.1. - L'ensemble des éléments Σ-compatibles de U est un sous-treillis complet et un sous-demi-groupe de U.

En effet cet ensemble est stable pour $\circ$, et, si $(\varphi_\iota)_{\iota \in I}$ en est une famille, on a, pour tout $\sigma \in \Sigma$, et d'après (2) et (3) :

$$\sigma \circ \Big(\bigcup_{\iota \in I} \varphi_\iota\Big) = \bigcup_{\iota \in I} (\sigma \circ \varphi_\iota) \subseteq \bigcup_{\iota \in I} (\varphi_\iota \circ \sigma) = \Big(\bigcup_{\iota \in I} \varphi_\iota\Big) \circ \sigma$$

$$\sigma \circ \Big(\bigwedge_{\iota \in I} \varphi_\iota\Big) \subseteq \bigwedge_{\iota \in I} (\sigma \circ \varphi_\iota) \subseteq \bigwedge_{\iota \in I} (\varphi_\iota \circ \sigma) = \Big(\bigwedge_{\iota \in I} \varphi_\iota\Big) \circ \sigma \quad .$$

PROPOSITION 2.2. - La fermeture transitive d'une préèquivalence Σ-compatible est une équivalence Σ-compatible.

En effet (prop. 2.1) si φ est cette préèquivalence, φ^n est Σ-compatible et $\bigcup_{n \in N} \varphi^n$ aussi.

PROPOSITION 2.3. - Les équivalences Σ-compatibles forment un sous-treillis complet du treillis des équivalences.

En effet le sup dans ce treillis est la fermeture transitive de la réunion.

Une équivalence φ étant donnée, il existe une plus petite équivalence Σ-compatible contenant φ et une plus grande équivalence Σ-compatible contenue dans φ. Elles seront déterminées ultérieurement (voir proposition 3.3 et théorème 4.2).

Etant donné un complexe H de E, on appelle $\bar{s}_H$ la relation d'équivalence

$$x \,\bar{s}_H\, y \iff x , y \in E \text{ et } H \ddots_{\Sigma} x = H \ddots_{\Sigma} y \qquad .$$

PROPOSITION 2.4. - $\alpha(\bar{s}_H)$ est la plus grande équivalence Σ-compatible pour laquelle H soit saturé.

H est saturé pour $\bar{s}_H$ car

$$x \in H \iff I \in H \ddots_{\Sigma} x \qquad ,$$

donc

$$x \in H \,,\; x \,\bar{s}_H\, y \implies y \in H \qquad .$$

$\bar{s}_H$ est Σ-compatible car si

$$\sigma \in \Sigma \text{ et } H \ddots_{\Sigma} x = H \ddots_{\Sigma} y \,,\; \sigma' \in H \ddots_{\Sigma} \sigma x \iff \sigma'\sigma \in H \ddots_{\Sigma} x$$

à cause de (6f) et de la stabilité de Σ, donc

$$H \ddots_{\Sigma} \sigma x = H \ddots_{\Sigma} \sigma y \qquad .$$

Enfin si H est saturé pour une équivalence Σ-compatible φ et si $y \in \varphi(x)$, $\sigma \in \Sigma$,

$$\sigma x \in H \iff \sigma y \in H \qquad ,$$

donc $x \,\bar{s}_H\, y$.

PROPOSITION 2.5. - Si H et K sont des complexes de E

$$H \,{}^{\bullet}\!\cdot_{\Sigma} K = H \ddots_{\Sigma} K \iff K \text{ est indivisible pour } \alpha(\bar{s}_H) \qquad .$$

En effet

$$H \,{}^{\bullet}\!\cdot_{\Sigma} K = \bigcap_{k \in K} (H \,{}^{\bullet}\!\cdot_{\Sigma} k)$$

$$H \ddots_{\Sigma} K = \bigcup_{k \in K} (H \ddots_{\Sigma} k) \qquad .$$

THÉORÈME 2.1. - Un complexe H de E est classe pour une équivalence Σ-compatible si et seulement si

$$H \mathbin{^{\bullet}\!\cdot}_{\Sigma} H = H \mathbin{\ddots}_{\Sigma} H \quad .$$

En effet, H est classe pour une équivalence Σ-compatible si et seulement s'il est saturé pour $\alpha(\overline{s_H})$ (prop. 2.4), donc si et seulement si

$$H \mathbin{^{\bullet}\!\cdot}_{\Sigma} H = H \mathbin{\ddots}_{\Sigma} H \quad \text{(prop. 2.5)} \quad .$$

Si E est un demi-groupe, on retrouve ainsi, en prenant $\Sigma = \mathfrak{M}_b$, le résultat classique.

3. Équivalences prépermises : exemples.

Etant donnée une application t de A dans A, un élément φ de A est dit <u>t-prépermis</u> si $t(\varphi) \subseteq \varphi$; de même, si T est une famille d'applications de A dans A, un élément φ de A est dit <u>T-prépermis</u> s'il est t-prépermis pour tout $t \in T$. On se propose seulement, dans cette section, de donner des exemples de cette notion et d'en faire une première étude.

A. Exemples.

Soit, pour tout $\sigma \in O$, l'application m_σ de A dans A définie par :

(7) $$(\forall \ \varphi \in A) \ , \quad (\forall \ X \in P) \ , \quad m_\sigma(\varphi)(X) = \sigma\varphi(X \mathbin{\cdot\!^{\bullet}} \sigma) \quad .$$

Supposons $\varphi \in U$, et soient $x, y \in E$ tels que $y \in \varphi(x)$;

$$x \in \sigma x \mathbin{\cdot\!^{\bullet}} \sigma \quad ,$$

d'où

$$\sigma y \in \sigma\varphi(\sigma x \mathbin{\cdot\!^{\bullet}} \sigma)$$

et, si φ est m_σ-prépermis,

$$\sigma y \in \varphi(\sigma x) \quad ;$$

réciproquement, si φ est σ-compatible et si $X \in P$, $z \in E$,

$$z \in \sigma\varphi(X \mathbin{\cdot\!^{\bullet}} \sigma) \implies (\exists \ x, y \in E) \ , \ x \in X \mathbin{\cdot\!^{\bullet}} \sigma \ , \ y \in \varphi(x) \ , \ z = \sigma y$$
$$\implies z \in \varphi(X) \quad ,$$

car $\sigma y \in \varphi(\sigma x)$ et $\sigma x \in X$. Donc, si $\varphi \in U$, " φ est σ-compatible" équivaut à " φ est m_σ-prépermis".

Comme second exemple, soit α un élément quelconque de A, et a_α l'application de A dans A définie par $a_\alpha(\varphi) = \alpha$ pour tout $\varphi \in A$.

Les éléments a_α-prépermis sont ceux qui contiennent α ; on les appellera plutôt α-<u>abélisants</u>. Par exemple, si E est un groupoïde, définissons $\gamma \in A$ par

$$(\forall\ X \in P)\ ,\quad \gamma(X) = \{uv\ ;\ vu \in X\} \qquad ;$$

γ est un élément symétrique de U qu'on appelle <u>réflecteur</u> de E ; un complexe de E est réflectif si et seulement s'il est saturé pour γ. Une équivalence φ est a_γ-prépermise si et seulement si on a identiquement $uv \in \varphi(vu)$ (d'où le terme "abélisant").

Comme troisième exemple, soit, pour tout $\sigma \in O$, l'application s_σ de A dans A définie par :

(8) $$(\forall\ \varphi \in A)\ ,\quad (\forall\ X \in P)\ ,\quad s_\sigma(\varphi)(X) = \varphi(\sigma X) \therefore \sigma \qquad .$$

Supposons $\varphi \in U$, et soient x, $y \in E$ tels que $\sigma y \in \varphi(\sigma x)$; on a $y \in \varphi(\sigma x) \therefore \sigma$, et, si φ est s_σ-prépermise, $y \in \varphi(x)$. Réciproquement, si

$$((\forall\ x\ ,\ y \in E)\ ,\quad (\sigma y \in \varphi(\sigma x) \implies y \in \varphi(x)) \qquad ,$$

φ est s_σ-prépermis, car si $X \in P$, $z \in E$,

$$z \in \varphi(\sigma X) \therefore \sigma \implies (\exists\ x \in X)\ ,\ \sigma z \in \varphi(\sigma x) \implies z \in \varphi(X) \qquad .$$

Les éléments s_σ-prépermis de U sont donc ceux qui sont tels que

$$((\forall\ x\ ,\ y \in E)\ ,\quad (\sigma y \in \varphi(\sigma x) \implies y \in \varphi(x)) \qquad ;$$

on les appellera de préférence σ-<u>simplifiables</u>.

B. Propriétés.

Les propriétés des éléments σ-compatibles ont été étudiées dans la section 2.

Les éléments α-abélisants sont un filtre de A. En conséquence, les équivalences α-abélisantes sont un filtre du treillis des équivalences. Pour étudier celles-ci, on peut remplacer α par la plus fine équivalence contenant α (prop. 1.3), que l'on notera $\bar{\alpha}$. Si E est un groupoïde, on s'assurera que $\bar{\gamma}$ est la fermeture transitive de $\gamma \cup I$.

PROPOSITION 3.1. - Un complexe de E est classe pour une équivalence α-abélisante si et seulement s'il est saturé pour $\bar{\alpha}$.

C'est évidemment nécessaire ; c'est suffisant, car si un complexe H est saturé pour $\bar{\alpha}$, et si $\bar{R}_H$ désigne l'équivalence dont les classes sont H et $E - H$, on a $\bar{\alpha} \subseteq \bar{R}_H$, et $\bar{R}_H$ est α-abélisante.

COROLLAIRE. – Un complexe d'un groupoïde est classe pour une équivalence abélisante si et seulement s'il est réflectif.

En effet un complexe saturé pour γ l'est pour $\gamma \cup I$ et pour $\bar{\gamma}$, et réciproquement (prop. 1.7).

Les éléments σ-simplifiables de U en sont un sous-treillis complet ; par suite les équivalences σ-simplifiables sont une famille de Moore $\cup$-inductive de U. Si $\varphi \in U$, l'ensemble des $\sigma \in O$ tels que φ soit σ-simplifiable est une partie stable de O, car si φ est σ-simplifiable et σ'-simplifiable, et si $x, y \in E$:

$$\sigma'\sigma y \in \varphi(\sigma'\sigma x) \implies \sigma y \in \varphi(\sigma x) \implies y \in \varphi(x) \quad ,$$

donc φ est $\sigma'\sigma$-simplifiable ; de plus φ est toujours I-simplifiable.

Si Σ est une partie de O, un élément φ de A est dit <u>Σ-simplifiable</u> quand il est σ-simplifiable pour tout $\sigma \in \Sigma$; si $\mathfrak{M}$ est la famille de multiplication engendrée par Σ, il résulte de ce qui précède que " φ est Σ-simplifiable" équivaut à " φ est $\mathfrak{M}$-simplifiable" pour tout $\varphi \in U$. Enfin, si $\mathfrak{T}$ est la famille des translations d'une loi de composition externe sur E, il est clair que " φ est $\mathfrak{T}$-simplifiable" équivaut à " $\rho(\varphi)$ est simplifiable pour la loi de composition" dès que φ est une équivalence. De même, si E est un groupoïde et φ une équivalence, " φ est $\mathfrak{M}_d$-simplifiable" (resp. $\mathfrak{M}_g$, $\mathfrak{M}_b$) équivaut à " $\rho(\varphi)$ est simplifiable à droite" (resp. à gauche, bilatère). Les équivalences Σ-simplifiables se comportent donc à cet égard comme les équivalences Σ-compatibles (voir section 2) ; en particulier, on peut leur appliquer les remarques de la section 1, C.

Donnons enfin quelques propriétés des applications m_σ et s_σ, et des familles $M = (m_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}$ et $S = (s_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}$, Σ étant une famille de multiplication sur E.

(9a) $$s_\sigma\Big(\bigcup_{\iota\in I} \varphi_\iota\Big) = \bigcup_{\iota\in I} (s_\sigma(\varphi_\iota)) \ , \quad s_\sigma\Big(\bigcap_{\iota\in I} \varphi_\iota\Big) = \bigcap_{\iota\in I} (s_\sigma(\varphi_\iota)) \quad ,$$

$$m_\sigma\Big(\bigcup_{\iota\in I} \varphi_\iota\Big) = \bigcup_{\iota\in I} (m_\sigma(\varphi_\iota)) \ , \text{ pour } (\varphi_\iota)_{\iota\in I} \subseteq A \quad .$$

(9a') $s_\sigma(\bigwedge \varphi_\iota) = \bigwedge[s_\sigma(\varphi_\iota)]$ pour $(\varphi_\iota)_{\iota\in I} \subseteq U$ d'après (5).

(9b) si $\varphi \in U$, $s_\sigma(\varphi) \in U$ et $m_\sigma(\varphi) \in U$.

(9c) si φ est symétrique, $s_\sigma(\varphi)$ et $m_\sigma(\varphi)$ sont symétriques

(9d) $m_\sigma \circ m_{\sigma'} = m_{\sigma\sigma'}$; $s_\sigma \circ s_{\sigma'} = s_{\sigma'\sigma}$; S et M sont stables .

(9e) $m_I = s_I = I_A$, application identique de A .

(9f) $m_\sigma \circ s_\sigma \subseteq I \subseteq s_\sigma \circ m_\sigma$ si on les restreint à U .

En particulier S et M sont des familles de multiplication sur A , d'après (9d) et (9e).

PROPOSITION 3.2. - Si $\varphi \in U$, φ est Σ-compatible si et seulement si $\varphi \subseteq s_\sigma(\varphi)$, pour tout $\sigma \in \Sigma$.

En effet,

$$m_\sigma(\varphi) \subseteq \varphi \implies \varphi \subseteq s_\sigma \circ m_\sigma(\varphi) \subseteq s_\sigma(\varphi)$$

et

$$\varphi \subseteq s_\sigma(\varphi) \implies m_\sigma(\varphi) \subseteq m_\sigma \circ s_\sigma(\varphi) \subseteq \varphi \quad ,$$

d'après (9f).

PROPOSITION 3.3. - Si Σ est une famille de multiplication, et si $\varphi \in U$, le plus grand élément Σ-compatible de U contenu dans φ est $\bigwedge_{\sigma\in\Sigma} s_\sigma(\varphi)$; si φ est une équivalence, c'est aussi une équivalence.

En effet soit ψ un élément Σ-compatible de U contenu dans φ ; on a

$$(\forall \ \sigma\in\Sigma) \ , \ \psi \subseteq s_\sigma(\psi) \subseteq s_\sigma(\varphi) \quad .$$

Réciproquement, soit $\theta = \bigwedge_{\sigma\in\Sigma} s_\sigma(\varphi)$; $\theta \in U$ d'après (9b) ; $\theta \subseteq \varphi$ d'après (9e) ; θ est Σ-compatible, car

$$(\forall \ \sigma\in\Sigma) \ , \ \theta = \bigwedge_{\sigma\in\Sigma} s_{\sigma'}(\varphi) \subseteq \bigwedge_{\sigma'\in\Sigma} s_{\sigma'\sigma}(\varphi) = s_\sigma(\bigwedge_{\sigma'\in\Sigma} s_{\sigma'}(\varphi))$$

d'après (9d) et (9a), il ne reste qu'à appliquer la proposition 3.2. Enfin, si φ est extensif, θ est extensif, car tout $s_\sigma(I)$ est extensif d'après (8) ; si φ est symétrique, θ est symétrique d'après (9c) et, si $\rho(\varphi)$ est transitif, $\rho(\theta)$ est transitif car $x\ \rho(\theta)\ y$ équivaut à $(\forall \ \sigma\in\Sigma)$, $\sigma x\ \rho(\varphi)\ \sigma y$.

En appliquant ce procédé à $\overline{R}_H$, où H est un complexe de E , on retrouve aisément $\overline{s}_H$, d'où la proposition 2.4.

PROPOSITION 3.4. - Si Φ est un complexe de prééquivalence, il en est de même de $S\Phi$ et de $M\Phi$.

La notation $S\Phi$ (resp. $M\Phi$) désigne l'ensemble des $s_\sigma(\varphi)$ (resp. $m_\sigma(\varphi)$) pour $\sigma \in \Sigma$ et $\varphi \in \Phi$.

Les autres conditions étant aisément remplies d'après (9b) et (9e), il suffit de montrer que $S\Phi$ et $M\Phi$ sont globalement symétriques. Or si $x, y \in E$, $\sigma \in \Sigma$, $\varphi \in \Phi$,

$$y \in s_\sigma(\varphi)(x) \implies \sigma y \in \varphi(\sigma x) \implies (\exists\ \psi \in \Phi),\ \sigma x \in \psi(\sigma y) \quad ,$$

et

$$x \in s_\sigma(\psi)(y) \quad ;$$

de même

$$y \in m_\sigma(\varphi)(x) \implies (\exists\ z, t \in E)\ x = \sigma z,\ y = \sigma t,\ t \in \varphi(z) \implies (\exists\ \psi \in \Phi)\ z \in \psi(t),$$

et

$$x \in m_\sigma(\psi)(y) \quad .$$

4. Équivalences prépermises : propriétés.

Soit T une famille d'applications de A dans A ; dans cette section, on se propose d'étudier les propriétés des équivalences T-prépermises, sans faire d'hypothèses sur la nature particulière de T.

A. Propriétés générales.

Etant donné $\varphi \in A$, φ est I_A-prépermis ; on supposera donc dans cette section que $I_A \in T$. On pourrait faire des hypothèses bien plus fortes sur T, sans changer la généralité du problème mais les familles que l'on rencontrera dans la section 5 ne les vérifieraient pas.

L'ensemble des éléments T-prépermis de A est non vide car il contient le plus grand élément de A. Il possède des propriétés intéressantes si T satisfait à l'axiome :

(A) Tout élément de T est $\cup$-distribuant.

PROPOSITION 4.1. - Moyennant (A), l'ensemble des éléments T-prépermis de A est un sous-treillis complet de A ; l'ensemble des équivalences T-prépermises est une famille de Moore U-inductive de U .

En effet, si $(\varphi_\iota)_{\iota\in I}$ est une famille d'éléments T-prépermis et si $t \in T$:

$$t(\bigcup_{\iota\in I} \varphi_\iota) = \bigcup_{\iota\in I} (t(\varphi_\iota)) \subseteq \bigcup_{\iota\in I} \varphi_\iota \qquad ;$$

et, t étant isotone,

$$t(\bigcap_{\iota\in I} \varphi_\iota) \subseteq \bigcap_{\iota\in I} (t(\varphi_\iota)) \subseteq \bigcap_{\iota\in I} \varphi_\iota \qquad .$$

Si $(\varphi_\iota)_{\iota\in I} \subseteq U$ on a

$$t(\bigwedge \varphi_\iota) \subseteq \bigwedge t(\varphi_\iota) \subseteq \bigwedge \varphi_\iota \qquad .$$

Etant donnée une équivalence, il existe une plus petite équivalence T-prépermise la contenant ; on la désignera par <u>fermeture équivalence</u> T-<u>prépermise</u> de l'équivalence donnée. On se propose de la déterminer effectivement.

B. <u>Opérations de préfermeture</u>.

La solution suivante suppose que T satisfait à l'axiome (A) et à :

(B) Si Φ est un complexe de prééquivalence, $T\Phi$ est un complexe de prééquivalence ($T\Phi$ est l'ensemble des $t(\varphi)$ pour $t \in T$ et $\varphi \in \Phi$).

Etant donné un complexe de prééquivalence Φ , il existe une plus fine équivalence T-prépermise contenant tout élément de Φ ; on l'appelle $f_T(\Phi)$, ou $f(\Phi)$ si aucune confusion n'est à craindre. La fermeture équivalence T-prépermise d'une équivalence φ est alors $f(\varphi)$. On va déterminer l'opération f .

Un complexe Φ de A est dit T-<u>permis</u> si $T\Phi \subseteq \Phi$. U est T-permis d'après (B), car U est un complexe de prééquivalence. Les complexes stables et T-permis de U sont une famille de Moore U-inductive ; on note $F(\Phi)$ la fermeture stable et T-permise d'un complexe Φ ; on note aussi $F_T(\Phi)$ s'il y a risque de confusion. On appelle enfin $P(\Phi)$, ou $P_T(\Phi)$, la fermeture stable de $T\Phi$, et on définit par récurrence $P^n(\Phi)$ avec

$$P^1(\Phi) = P(\Phi) \; , \;\; P^n(\Phi) = P(P^{n-1}(\Phi)) \qquad ,$$

pour tout $n \in N$. On a $\Phi \subseteq T\Phi$, car $I_A \in T$, donc $\Phi \subseteq P(\Phi)$; les $P^n(\Phi)$ sont une chaîne croissante de complexes. Enfin si $\Phi \subseteq U$, $P^n(\Phi) \subseteq U$ car U est T-permis et stable.

LEMME 4.1. - $F(\Phi) = \bigcup_{n\in N} (P^n(\Phi))$.

$(P^n(\Phi))_{n\in N}$ est une chaîne de complexes stables, donc $\bigcup_{n\in N} (P^n(\Phi))$ est stable ; $\bigcup_{n\in N} (P^n(\Phi))$ est T-permis car

$$T\circ\Big(\bigcup_{n\in N} (P^n(\Phi))\Big) = \bigcup_{n\in N} (TP^n(\Phi)) \subseteq \bigcup_{n\in N} (P^n(\Phi)) \quad .$$

Enfin un complexe stable et T-permis, qui contient Φ , contient $T\Phi$, donc $P(\Phi)$, donc tous les $P^n(\Phi)$.

On note $p(\Phi)$, ou $p_T(\Phi)$, la borne supérieure de $P(\Phi)$, et on définit par récurrence $p^n(\Phi)$ avec

$$p^1(\Phi) = p(\Phi) \text{ , et } p^n(\Phi) = p(p^{n-1}(\Phi)) \quad .$$

$p(\Phi)$ contient tout élément de Φ car $\Phi \subseteq P(\Phi)$. D'autre part, si $\Phi \subseteq U$, $p(\Phi) \in U$ ainsi que $p^n(\Phi)$, car $P(\Phi) \subseteq U$. Enfin, si Φ est un complexe de prééquivalence, $T\Phi$ est un complexe de prééquivalence d'après (B), donc (prop. 1.6) $P(\Phi)$ est un complexe d'équivalence et (prop. 1.5) $p(\Phi)$ est une équivalence, ainsi que $p^n(\Phi)$.

LEMME 4.2. - Si Φ est un complexe de prééquivalence,

$$f(\Phi) = \bigcup_{n\in N} (p^n(\Phi)) \quad .$$

$p(\Phi)$ majore tout élément de Φ ; les $p^n(\Phi)$ forment donc une chaîne d'équivalences, et leur réunion est une équivalence (prop. 1.3) ; cette équivalence est T-prépermise car, si $t \in T$,

$$t\Big(\bigcup_{n\in N} (p^n(\Phi))\Big) = \bigcup_{n\in N} (t(p^n(\Phi)))$$

d'après (A) ; or $t(p^n(\Phi)) \in P(p^n(\Phi))$, donc

$$t(p^n(\Phi)) \subseteq p^{n+1}(\Phi) \quad .$$

Et $\bigcup_{n\in N} (p^n(\Phi))$ majore tout élément de Φ . Réciproquement, si une équivalence T-prépermise φ majore tout élément de Φ , elle majore tout élément de $P(\Phi)$ car elle est préidempotente, et elle majore $p(\Phi)$; de même elle majore tous les $p^n(\Phi)$.

LEMME 4.3. – $p(\Phi) = p(\sup \Phi)$, si $\Phi \subseteq U$.

Tout élément de Φ est majoré par $\sup \Phi$, donc tout élément de $T\Phi$ est majoré par un élément de $T \sup \Phi$, et, la multiplication étant isotone entre éléments de U , tout élément de $P(\Phi)$ est majoré par un élément de $P(\sup \Phi)$; d'où $p(\Phi) \subseteq p(\sup \Phi)$. D'autre part, $\sup \Phi \subseteq p(\Phi)$ et $(\forall\ t \in T)$,

$$t(\sup \Phi) = \sup t\Phi \subseteq p(\Phi) \quad ;$$

$p(\Phi)$ est préidempotent car $P(\Phi)$ est stable, donc $p(\Phi)$ majore tout élément de $P(\sup \Phi)$; d'où

$$p(\sup \Phi) \subseteq p(\Phi) \quad .$$

THÉORÈME 4.1. – Si Φ est un complexe de prééquivalence :

$$f(\Phi) = \sup F(\Phi) \quad .$$

Montrons que $\sup P^n(\Phi) = p^n(\Phi)$; c'est vrai pour $n = 1$; et si c'est vrai pour $n - 1$, on a, d'après le lemme 4.3 :

$$\sup P^n(\Phi) = p(P^{n-1}(\Phi)) = p(\sup P^{n-1}(\Phi)) = p(p^{n-1}(\Phi)) = p^n(\Phi) \quad .$$

Et, d'après les lemmes 4.2 et 4.1 :

$$f(\Phi) = \bigcup_{n \in N} (p^n(\Phi)) = \sup_{n \in N} (\sup P^n(\Phi)) = \sup \bigcup_{n \in N} (P^n(\Phi)) = \sup F(\Phi) \quad .$$

PROPOSITION 4.2. – Si Φ et Ψ sont des complexes de prééquivalence, et si $\sup \Phi \subseteq \sup P(\Psi)$, $\sup \Psi \subseteq \sup P(\Phi)$ (en particulier si Ψ est la fermeture stable de Φ), on a

$$f(\Phi) = f(\Psi) \quad .$$

En effet (lemme 4.3), on a

$$p(\Phi) = p(\sup \Phi) \subseteq p^2(\Psi) \quad ;$$

de même

$$p(\Psi) \subseteq p^2(\Phi) \quad ;$$

et

$$p(\Phi) \subseteq p^2(\Psi) \subseteq p^3(\Phi) \ \ldots$$

d'où (lemme 4.2),

$$f(\Phi) = f(\Psi) \quad .$$

C. Cas de simplification.

Supposons que T vérifie l'axiome supplémentaire :

(C) La fermeture transitive de toute prééquivalence T-prépermise est T-prépermise,

et soit $\overline{T}$ la partie stable engendrée par T. Il est clair que " φ est T-prépermis" $\Longleftrightarrow$ " φ est $\overline{T}$-prépermis" pour tout $\varphi \in A$.

THÉORÈME 4.2. - Si Φ est un complexe de prééquivalence, $f(\Phi)$ est la fermeture transitive de $\sup \overline{T}\Phi$.

On démontre aisément que si Ψ est la fermeture stable de Φ, $\sup \Psi$ est la fermeture transitive de $\sup \Phi$. En particulier, $\overline{T}\Phi$ étant de prééquivalence d'après (B), $p_{\overline{T}}(\Phi)$ est la fermeture transitive de $\sup \overline{T}\Phi$; c'est donc une équivalence T-prépermise d'après (C). Il en résulte que

$$p^n_{\overline{T}}(\Phi) = p_{\overline{T}}(\Phi)$$

pour tout n, et (lemme 4.2),

$$p_{\overline{T}}(\Phi) = f_{\overline{T}}(\Phi) \qquad .$$

5. Applications.

A. Généralités.

Etant donnés $\alpha \in A$, Σ, $\Sigma' \subseteq O$ et familles de multiplication, on se propose de caractériser les complexes de E qui sont classes pour une équivalence ayant une propriété (P) ; (P) est une ou plusieurs des propriétés suivantes : α-abélisante, Σ-compatible Σ'-simplifiable.

On fera usage des êtres $a_{\overline{\alpha}}$, m_σ, s_σ, $M = (m_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}$, $S = (s_\sigma)_{\sigma\in\Sigma'}$, définis à la section 3. $(I_A, a_{\overline{\alpha}})$ vérifie (A), ainsi que M et S (9a). $(I_A, a_{\overline{\alpha}})$ vérifie (B), car si Φ est un complexe de prééquivalence, il en est de même de $\Phi \cup \overline{\alpha}$; M et S vérifient (B) d'après la proposition 3.4. Il est clair que l'union de deux familles vérifiant (A) (resp. (B)), vérifie (A) (resp. (B)). En particulier les équivalences ayant une propriété (P) forment une famille de Moore U-inductive (prop. 4.1) ; pour tout complexe H de E, il existe une plus fine équivalence ayant cette propriété et pour laquelle H soit indivisible : on la désignera par <u>fermeture</u> (P) <u>de</u> H .

Soit $\overline{r}_H$ l'élément de A défini par $(\forall X \in P)$, $\overline{r}_H(X) = X$ si X est disjoint de H , $X \cup H$ si X rencontre H . C'est la plus fine équivalence pour laquelle H soit indivisible. La fermeture (P) de **H** est par conséquent la fermeture (P) de $\overline{r}_H$. On a :

LEMME 5.1. - H est classe pour une équivalence ayant une propriété (P) si et seulement s'il est saturé pour la fermeture (P) de $\overline{r}_H$.

B. (P) = <u>α-abélisante, ou Σ-compatible, ou les deux.</u>

M vérifie (C) (prop. 2.2), et il en est évidemment de même de $M \cup a_{\overline{\alpha}}$. De plus M est stable (9d). La fermeture Σ-compatible de $\overline{r}_H$ est donc (théorème 4.2) la fermeture transitive de sup $M\overline{r}_H$. Posons

$$\overline{u}_H = \sup M\overline{r}_H \text{ , } \overline{v}_H = \text{fermeture transitive de } \overline{u}_H \quad ,$$

et soit $u_H \in A$ défini par

$$(\forall \ X \in P) \text{ , } u_H(X) = (X \overset{\circ}{\cdot}_{\Sigma} H) H \quad .$$

On a

$$\overline{u}_H = u_H \cup I \quad ;$$

en effet $u_H \in U$, et si $x , y \in E$:

$$y \in (x \overset{\circ}{\cdot}_{\Sigma} H) H \iff (\exists \ \sigma \in \Sigma) \text{ , } x \in \sigma H \text{ , } y \in \sigma H \quad .$$

$$(\exists \ \sigma \in \Sigma) \text{ , } y \in \sigma\overline{r}_H(x \cdot \sigma) \iff (\exists \ \sigma \in \Sigma) \text{ , } x \in \sigma H \text{ , } y \in \sigma H \text{ , ou } (\text{si } \sigma = I) \ x = y \quad .$$

PROPOSITION 5.1. - $\overline{v}_H$ est la fermeture transitive de $u_H \cup I$.

Le lemme 5.1 donne alors comme condition, compte tenu de la proposition 1.7,

$$(H \overset{\circ}{\cdot}_{\Sigma} H) H \subseteq H \quad ;$$

c'est le théorème 2.1.

LEMME 5.2. - Si Φ est un complexe de prééquivalence, on a, pour tout T :

$$f_{T'}(\Phi) = f_T(\Phi \cup \overline{\alpha}) \text{ , où } T' = T \cup \varepsilon_{\overline{\alpha}} \quad .$$

En effet on a

$$P^n_{T'}(\Phi) \subseteq P^n_T(\Phi \cup \overline{\alpha}) \subseteq P^{n+1}_{T'}(\Phi)$$

pour tout n : c'est vrai pour $n = 0$, avec la convention $P^0(\Phi) = \Phi$; et si c'est vrai pour $n - 1$, on a :

$$T'P^{n-1}_{T'}(\Phi) = \overline{\alpha} \cup TP^{n-1}_{T'}(\Phi) \subseteq TP^{n-1}_T(\Phi \cup \overline{\alpha}) \subseteq TP^n_{T'}(\Phi) \subseteq T'P^n_{T'}(\Phi) \quad ,$$

d'où les inégalités cherchées en prenant la fermeture stable. Par suite

$$\bigcup_{n \in N} P^n_{T'}(\Phi) = \bigcup_{n \in N} P^n_T(\Phi \cup \overline{\alpha})$$

et le lemme résulte du théorème 4.1, et du lemme 4.1.

Puisque M vérifie (C), la fermeture α-abélisante et Σ-compatible de $\overline{r}_H$ est (lemme 5.2 et théorème 4.2) la fermeture transitive de $\sup M\overline{r}_H \cup M\overline{\alpha}$; H est saturé pour cet élément si et seulement si (prop. 1.7), il est saturé pour $\sup M\overline{r}_H$, c'est-à-dire pour u_H, et pour $m_\sigma(\overline{\alpha})$, $(\forall \; \sigma \in \Sigma)$; or $\sigma\overline{c}(H \,.\!\!\cdot^{\bullet}\, \sigma) \subseteq H$ équivaut à $H \,.\!\!\cdot^{\bullet}\, \sigma$ saturé pour $\overline{\alpha}$; d'après le lemme 5.1, on a

THÉORÈME 5.1. – Un complexe H de E est classe pour une équivalence α-abélisante et Σ-compatible si et seulement si :

$$H \,{}^{\bullet}\!\!\cdot_\Sigma\, H = H \,{}^{\bullet}\!\cdot_\Sigma\, H \quad \text{et} \quad (\forall \; \sigma \in \Sigma) \text{ , } H \,.\!\!\cdot^{\bullet}\, \sigma \text{ est saturé pour } \overline{\alpha} \quad .$$

Par exemple, si E est un demi-groupe, en prenant $\alpha = \gamma$ et $\Sigma = \mathcal{M}_g$ (équivalent à $\Sigma = \mathcal{M}_b$), la condition supplémentaire s'écrit :

avec $\sigma = I$, H est saturé pour α ;

avec $\sigma \neq I$, $uv \in H \,.\!\!\cdot^{\bullet}\, \sigma$ implique $vu \in H \,.\!\!\cdot^{\bullet}\, \sigma$, ou encore $duv \in H \Longrightarrow dvu \in H$;

la condition supplémentaire est donc que H soit fortement réflectif.

C. (P) = Σ'-simplifiable et α-abélisante.

Le cas (P) = Σ'-simplifiable s'obtient en prenant $\alpha = I$. S vérifie (A) et (B), mais non (C). D'après le théorème 4.1 et les lemmes 5.1 et 5.2, un complexe H de E est classe pour une équivalence (P) si et seulement s'il est saturé pour tout élément de la fermeture stable et S-permise de $\Phi = \{\overline{r}_H , \alpha\}$.

Pour arriver à une condition plus élémentaire, considérons $\overline{q}_H \in A$ défini par

$$(\forall \ X \in P) \ , \ \overline{q}_H(X) = H \iddots (H \ddots_{\Sigma'} X) \quad ;$$

$y \in \overline{q}_H(x)$ équivaut à $H \ddots_{\Sigma'} x$ rencontre $H \ddots_{\Sigma'} y$; $\overline{q}_H$ est un élément symétrique de U ; $\{\overline{q}_H , \overline{\alpha}\}$ est donc un complexe de prééquivalence Ψ . Or on a :

$$\bigcup_{\sigma\in\Sigma'} (s_\sigma(\overline{r}_H)) = \overline{q}_H \cup \bigcup_{\sigma\in\Sigma'} (s_\sigma(I)) \quad ;$$

en effet si $X \in P$ et $\sigma \in \Sigma'$:

$$\sigma \in H \ddots_{\Sigma'} X \implies s_\sigma(\overline{r}_H)(X) = (\sigma X \cup H) \iddots \sigma = (\sigma X \iddots \sigma) \cup (H \iddots \sigma)$$

$$\sigma\in \Sigma' - H \ddots_{\Sigma'} X \implies s_\sigma(\overline{r}_H)(X) = \sigma X \iddots \sigma \quad ;$$

d'où puisque

$$\bigcup_{\sigma\in\Sigma'} (s_\sigma(\overline{r}_H)(X)) = \bigcup_{\sigma\in H\ddots_{\Sigma'}X} (s_\sigma(\overline{r}_H)(X)) \cup \bigcup_{\sigma\in\Sigma'-H\ddots_{\Sigma'}X} (s_\sigma(\overline{r}_H)(X)) \quad ,$$

$$\bigcup_{\sigma\in\Sigma'} (s_\sigma(\overline{r}_H)(X)) = \bigcup_{\sigma\in H\ddots_{\Sigma'}X} (H \iddots \sigma) \cup \bigcup_{\sigma\in\Sigma'} (\sigma X \iddots \sigma) \quad ,$$

$$\bigcup_{\sigma\in\Sigma'} (s_\sigma(\overline{r}_H)(X)) = \overline{q}_H(X) \cup \bigcup_{\sigma\in\Sigma'} (s_\sigma(I)(X))$$

d'après (9a).

Par suite $\sup \Phi \subseteq \sup P_S(\Psi)$ et $\sup \Psi \subseteq \sup P_S(\Phi)$, et (prop. 4.2) $f_S(\Phi) = f_S(\Psi)$; d'après ce qui précède, on a donc :

THÉORÈME 5.2. - Un complexe H de E est classe pour une équivalence α-abélisante et Σ'-simplifiable si et seulement s'il est saturé pour tout élément de la fermeture stable et S-permise de $\{\overline{q}_H , \overline{\alpha}\}$.

En faisant $\alpha = I$, on a également :

THÉORÈME 5.2 bis. - Un complexe H de E est classe pour une équivalence Σ'-simplifiable si et seulement s'il est saturé pour tout élément de la fermeture stable et S-permise de $(\overline{q}_H , I)$.

D. (P) = Σ-compatible, Σ'-simplifiable et α-abélisante.

$S \cup M$ vérifie (A) et (B) ; d'après le théorème 4.1 et les lemmes 5.1 et 5.2, on a :

THÉORÈME 5.3. - Un complexe H de E est classe pour une équivalence Σ-compatible, Σ'-simplifiable et α-abélisante si et seulement s'il est saturé pour tout élément de la fermeture stable et $M \cup S$-permise de $(\bar{r}_H , \bar{\alpha})$.

Et, en faisant $\alpha = I$, un théorème 5.3 bis pour les équivalences Σ-compatibles et Σ'-simplifiables :

THÉORÈME 5.3 bis. - Un complexe H de E est classe pour une équivalence Σ-compatible et Σ'-simplifiable si et seulement s'il est saturé pour tout élément de la fermeture stable et $M \cup S$-permise de $\bar{r}_H$.

On se restreint maintenant au cas $\alpha = I$, et on étudie un cas où le théorème 5.3 bis se simplifie.

Supposons en effet que Σ et Σ' vérifient l'axiome :

(D) La fermeture Σ'-simplifiable de toute équivalence Σ-compatible est Σ-compatible.

Il est clair alors que la fermeture Σ-compatible et Σ'-simplifiable de $\bar{r}_H$ est la fermeture Σ'-simplifiable de $\bar{v}_H$. Or $\bar{v}_H = I \cup \bigcup_{n \in N} (u_H^n)$ (prop. 5.1), donc (prop. 4.2)

$$f_S(\bar{v}_H) = f_S(\{I , u_H^n\}_{n \in N})$$

et, comme $\{I , u_H^n\}_{n \in N}$ est la fermeture stable de $\{I , u_H\}$ et que $\{I , u_H\}$ est de prééquivalence, u_H étant symétrique,

$$f_S(\bar{v}_H) = f_S(\{I , u_H\}) \quad \text{(prop. 4.2)} \quad .$$

Donc, d'après le théorème 4.1, et le lemme 5.1 :

THÉORÈME 5.4. - Si Σ et Σ' vérifient (D), un complexe H de E est classe pour une équivalence Σ-compatible et Σ'-simplifiable si et seulement s'il est saturé pour tout élément de la fermeture stable et S-permise de $\{I , u_H\}$.

PROPOSITION 5.2. - Si Σ et Σ' commutent élément par élément, ils vérifient (D).

Soit φ une équivalence Σ-compatible ; on a $\varphi \subseteq s_\sigma(\varphi)$ (prop. 3.2) $(\forall \ \sigma \in \Sigma)$. Puisque Σ et Σ' commutent élément par élément, il en est de même de $(s_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}$ et $(s_{\sigma'})_{\sigma'\in\Sigma'}$; par suite tout élément de $S\varphi$ est Σ-compatible, car si $\sigma \in \Sigma$ et $\sigma' \in \Sigma'$,

$$s_{\sigma'}(\varphi) \subseteq s_{\sigma'}(s_\sigma(\varphi)) = s_\sigma(s_{\sigma'}(\varphi)) \qquad ;$$

par suite tout élément de $P_S(\varphi)$ est Σ-compatible (prop. 2.1) et il en est de même de $p_S(\varphi)$. Il en est de même, par récurrence sur n, de tous les $p_S^n(\varphi)$, donc (lemme 4.2) de $f_S(\varphi)$.

Ce cas se présente par exemple si E est un demi-groupe, avec $\Sigma = \mathfrak{M}_d$ et $\Sigma' = \mathfrak{M}_g$. Il se présente aussi si $\Sigma = \Sigma'$ et si Σ est abélien (par exemple si E est un groupoïde abélien avec $\Sigma = \mathfrak{M}_b$), et on a alors quelques simplifications. En effet, si $\varphi \in U$ est préidempotent et Σ-compatible, $\sup S\varphi$ est préidempotent ; car si $x , y \in E$,

$$y \in (\sup S\varphi)(x) \iff (\exists \ \sigma \in \Sigma) \ \sigma y \in \varphi(\sigma x) \qquad ,$$

donc si

$$z \in (\sup S\varphi)(y) \ , \quad (\exists \ \sigma' \in \Sigma) \ , \quad \sigma z \in \varphi(\sigma y) \qquad ,$$

et, φ étant Σ-compatible,

$$\sigma'\sigma z \in \varphi(\sigma'\sigma y) \ , \quad \sigma'\sigma y \in \varphi(\sigma'\sigma x) \qquad ,$$

d'où

$$\sigma'\sigma z \in \varphi(\sigma'\sigma x)$$

et

$$z \in (\sup S\varphi)(x) \qquad .$$

Donc, si φ est une équivalence Σ-compatible, on a

$$f_S(\varphi) = \sup S\varphi \qquad .$$

Prenant

$$\varphi = \bar{v}_H = I \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (u_H^n) \qquad ,$$

on a

$$S\varphi = \{s_\sigma(I) \ , \ s_\sigma(u_H^n)\}_{n\in\mathbb{N},\sigma\in\Sigma} \qquad ,$$

donc :

THÉORÈME 5.5. - Si Σ est abélien, un complexe H de E est classe pour une équivalence Σ-compatible et Σ-simplifiable si et seulement s'il est saturé pour $s_\sigma(I)$ et $s_\sigma(u_H^n)$ $(\forall\ n \in \mathbb{N}\ ,\ \forall\ \sigma \in \Sigma)$.