Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Mario Curzio

Les transporteurs d'un groupe fini dans les sous-groupes de Fitting et Frattini

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 15, nº 1 (1961-1962), exp. nº 1, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1961-1962__15_1_A1_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
15e année, 1961/62, n° 1

6 novembre 1961

LES TRANSPORTEURS D'UN GROUPE FINI DANS LES SOUS-GROUPES DE FITTING ET FRATTINI

par Mario CURZIO

1. - Soit N un sous-groupe du groupe G. Nous appellerons <u>transporteur</u> de G, dans N, l'ensemble $\overline{N}$ des éléments $g \in G$ tels que, pour tout $x \in G$, le commutateur $(x, g) = g^{-1} x^{-1} gx$ appartienne à N. Évidemment, les transporteurs de G, dans ses sous-groupes, forment une famille de Moore dont le centre de G est élément minimum. De plus, $\overline{N}$ est un sous-groupe de G ; en effet, on a :

$$(x, gh^{-1}) = (g, h^{-1})(xh^{-1}, g)(h, xh^{-1})$$

et, si g et h sont en $\overline{N}$, on obtient : $gh^{-1} \in \overline{N}$. Dans cet exposé on étudiera les transporteurs d'un groupe fini dans son sous-groupe de Frattini $\Phi(G)$ et dans son sous-groupe de Fitting $F(G)$. On rappelle que $\Phi(G)$ et $F(G)$ sont nilpotents et que $\Phi(G)$ est l'intersection des sous-groupes maximaux de G, tandis que $F(G)$ est engendré par les sous-groupes distingués nilpotents de G.

2. - Donnons d'abord certaines propriétés élémentaires de $\overline{N}$:

PROPOSITION 1.2. - $\overline{N}$ <u>appartient au normalisateur de</u> N.

<u>Démonstration</u>. - Si $g \in \overline{N}$ et $x \in N$; on a

$$x^{-1} x^{g} = (g, x) \in N \quad .$$

PROPOSITION 2.2. - N <u>est un sous-groupe distingué si (et seulement si)</u> $N \leq \overline{N}$.

<u>Démonstration</u>. - Soit $N \leq \overline{N}$.

Pour tout $g \in N$ et pour tout $x \in G$, on aura :

$$g^{-1} g^{x} = (x, g) \in N$$

$$g^{x} \in N$$

c'est-à-dire que N est distingué.

L'inverse est également évident.

PROPOSITION 3.2. - Si N est un sous-groupe distingué (caractéristique), $\overline{N}$ est distingué (caractéristique).

Démonstration. - Si N est stable pour l'automorphisme ω, et si $g \in \overline{N}$, n aura

$$(g^{\omega}, x) = (g, x^{\omega^{-1}})^{\omega} \in N \quad .$$
$$g^{\omega} \in \overline{N}$$

PROPOSITION 4.2. - Si N est soluble, $\overline{N}$ est soluble.

Démonstration. - Soit N soluble, Le sous-groupe dérivé $K(\overline{N})$ de $\overline{N}$ est soluble, parce que $K(\overline{N}) \leq N$. Puisque $\overline{N}/K(\overline{N})$ est abélien, le groupe $\overline{N}$ est soluble.

PROPOSITION 5.2. - Si N est un sous-groupe distingué de G, $\overline{N}/N$ est le centre de G/N.

Démonstration. - Soient Nx et Ng deux classes d'équivalence par rapport à N. Si $g \in \overline{N}$, on a

$$(Nx, Ng) = N(x, g) = N \quad .$$

Cela signifie que $\overline{N}/N$ est dans le centre de G/N. Inversement si Ng est dans le centre de G/N, on a $(x, g) \in N$ et $g \in \overline{N}$.

COROLLAIRE 1.2. - Un groupe G vérifiant la condition maximale est nilpotent si (et seulement si), pour tout sous-groupe distingué $N \neq G$, on a $N \neq \overline{N}$.

Démonstration. - Il suffit de rappeler que pour les groupes vérifiant la condition maximale, la suite centrale croissante est de longueur finie.

PROPOSITION 6.2. - Soit $Z(N < G)$ le centralisateur de N. Le groupe $Z(N < G) \cap \overline{N}$ est nilpotent de classe ≤ 2.

Démonstration. - Si $g, h \in Z(N < G) \cap \overline{N}$, on a, pour tout $x \in G$,

$$(x^{-1}, g) \in N \qquad x^{g} x^{-1} \in N$$
$$(h, x) \in N \qquad x^{-1} x^{h} \in N$$

et par suite :

$$x^{-1}\, x^{h} = (x^{-1}\, x^{h})^{g} = (x^{-1})^{g}\, x^{hg}$$

$$x^{g}\, x^{-1} = (x^{g}\, x^{-1})^{h} = x^{gh}(x^{-1})^{h} \quad .$$

Par conséquent :

$$x^{hg} = x^{gh}$$

et, puisque x est arbitraire, les automorphismes intérieurs associés aux éléments g et h sont permutables. Étant donné que $Z(N < G) \cap \overline{N}/Z(G < G)$ est isomorphe au groupe des automorphismes intérieurs de G associés aux éléments de $Z(N < G) \cap \overline{N}$, nous avons prouvé que $Z(N < G) \cap \overline{N}/Z(G < G)$ est abélien, en particulier le quotient de $Z(N < G) \cap \overline{N}$ par rapport à son centre sera abélien ; $Z(N < G) \cap \overline{N}$ est donc nilpotent de classe ≤ 2 .

COROLLAIRE 2.2.

1° <u>Si</u> N <u>est distingué,</u> $Z(N < \overline{N})$ <u>est nilpotent de classe</u> ≤ 2 .

2° <u>Si</u> N <u>appartient au centre</u> $Z(G)$ <u>de</u> G , $\overline{N}$ <u>est nilpotent de classe</u> ≤ 2 .

<u>Démonstration.</u>

1° Si N est distingué, on a $N < \overline{N}$ (Proposition 2.2). Alors :

$$Z(N < G) \cap \overline{N} = Z(N < \overline{N}) \quad .$$

2° Dans le cas $N \leq Z(G)$, on a

$$Z(N < \overline{N}) = \overline{N} \quad .$$

et 2° est une conséquence de 1°.

3. - Dans les considérations suivantes, il s'agira toujours de <u>groupes finis</u>.

On a :

THÉORÈME 1.3. - <u>Si</u> $\Phi(N)$ <u>est permutable avec tout sous-groupe maximal de</u> G , $\Phi(N)$ <u>est nilpotent.</u>

Démonstration. - Soit $\Phi(N) \not\leq \Phi(G)$.

Si $\Phi(N)$ est maximal, on voit aisément que $\Phi(N) = \Phi(G) = 1$, ce qui contredit l'hypothèse.

Si $\Phi(N)$ n'est pas maximal, on peut trouver un sous-groupe maximal M tel que

$$G = [\Phi(N) , M] \quad .$$

Étant donné que $\Phi(N) \leq N$, la relation de Dedekind nous assure que

$$[\Phi(N) , M \cap N] = [\Phi(N) , M] \cap [N , \Phi(N)]$$

$$[\Phi(N) , M \cap N] = N$$

$$N = M \cap N \quad ,$$

ce qui contredit l'hypothèse. Alors

$$\Phi(N) \leq \Phi(G) \quad .$$

Cela posé, un résultat dû à R. BAER, [1], nous donne

$$F\left(\frac{G}{\Phi(G)}\right) = \frac{F(G)}{\Phi(G)}$$

en outre (Proposition 5.2) :

$$\frac{\overline{\Phi(G)}}{\Phi(G)} = Z\left(\frac{G}{\Phi(G)}\right) \leq F\left(\frac{G}{\Phi(G)}\right)$$

d'où

$$\overline{\Phi(G)} \leq F(G) \quad .$$

Enfin, $\overline{\Phi(N)}$ est nilpotent car $\Phi(N) \leq \Phi(G)$, et par conséquent $\overline{\Phi(N)}$ appartient au groupe $\overline{\Phi(G)}$ qui est nilpotent puisque $\overline{\Phi(G)} \leq F(G)$.

COROLLAIRE 1.3. - *Soient* G *un groupe hypersoluble,* p *un diviseur premier de l'ordre de* $\Phi(G)$. *Si* N *appartient au sous-groupe dérivé d'un sous-groupe de Sylow* S_p *de* G , $\overline{N}$ *est nilpotent.*

Démonstration. - Comme le dérivé $K(G)$ de G est nilpotent ([4]), $K(Sp)$ est un sous-groupe distingué de G ([5]), c'est-à-dire que $K(Sp)$ est le dérivé de tout p-sous-groupe de Sylow de G. Le seul p-sous-groupe de Sylow de $\Phi(G)$ est l'intersection des sous-groupes $\Phi(Sp)$ ([5]) ; alors, étant donné que $K(Sp) \leq \Phi(Sp)$, on aura :

$$K(Sp) \leq \Phi(G) \quad .$$

Si $N < K(Sp)$, on a

$$\overline{N} \leq \overline{\Phi(G)} \quad .$$

Donc, $\overline{N}$ est nilpotent parce que $\overline{\Phi(G)}$ est nilpotent (Théorème 1.3).

THÉORÈME 2.3. - Soit G un groupe tel que $F(G) = Z(G)$. Alors :

1° $\overline{F(G)} = Z(G)$.

2° Si $M > \Phi(G)$ est un sous-groupe maximal et soluble, on a $\overline{M} < M$.

Démonstration. - Le transporteur $\overline{F(G)}$ est un sous-groupe distingué (Proposition 3,2), de plus $\overline{F(G)}$ est nilpotent (Corollaire 2.2) et $\overline{F(G)} \geq F(G)$ (Proposition 2.2). Par définition de $F(G)$, on a aussi :

$$\overline{F(G)} \leq F(G) \quad .$$

L'égalité 1° est ainsi démontrée.

Soit $A/Z(G)$ le sous-groupe engendré par les sous-groupes abéliens distingués de $G/Z(G)$. On a :

$$A \geq Z(A) \geq Z(G)$$

et :

$$\frac{A}{Z(A)} \simeq \frac{A/Z(G)}{Z(A)/Z(G)} \quad .$$

Cela signifie que $A/Z(A)$ est abélien et que A est nilpotent, alors

$$A \leq F(G) = Z(G) \quad ,$$

et $A/Z(G)$ est le plus petit sous-groupe de $G/Z(G)$. Ce que nous avons démontré tout à l'heure, prouve que $M/Z(G)$ n'est pas un sous-groupe distingué de $G/Z(G)$ et par conséquent M n'est pas un sous-groupe distingué de G ; on a $M \geq \overline{M}$, car M coïncide avec son normalisateur, (Proposition 1.2), et $M \neq \overline{M}$ parce que M n'est pas distingué (Proposition 2.2).

THÉORÈME 3.3. - Si G est un groupe parfait, on a

$$\overline{\Phi(G)} = \Phi(G) , \qquad \overline{Z(G)} \leq \Phi(G) \qquad ?$$

Démonstration. - Il est bien connu ([3]) que

$$K(G) \cap Z(G) \leq \Phi(G) \qquad ,$$

d'où

$$Z(G) \leq \Phi(G) \qquad .$$

Le quotient $G/\Phi(G)$ est parfait parce que

$$K\left(\frac{G}{\Phi(G)}\right) = \frac{[K(G) , \Phi(G)]}{\Phi(G)} = \frac{G}{\Phi(G)} \qquad .$$

Alors :

$$Z\left(\frac{G}{\Phi(G)}\right) \leq \Phi\left(\frac{G}{\Phi(G)}\right) \qquad .$$

Mais

$$\Phi\left(\frac{G}{\Phi(G)}\right) = \frac{\Phi(G)}{\Phi(G)} \qquad .$$

Et d'après cela (Proposition 5.2) :

$$\frac{\overline{\Phi(G)}}{\Phi(G)} = Z\left(\frac{G}{\Phi(G)}\right) = \frac{\Phi(G)}{\Phi(G)} \qquad .$$

Donc :

$$\overline{\Phi(G)} = \Phi(G)$$

et

$$\overline{Z(G)} \leq \overline{\Phi(G)} = \Phi(G) \quad .$$

THÉORÈME 4.3. - <u>Si</u> G <u>n'est pas d'ordre</u> 1 , <u>les propositions suivantes sont équivalentes</u> :

(1)
$$\overline{\Phi(G)} = \Phi(G)$$

(2)
$$K\left(\frac{G}{\Phi(G)}\right) > Z\left(\frac{G}{\Phi(G)}\right) \quad .$$

<u>Démonstration</u>. - (1) ==> (2) .

Soit $\overline{\Phi(G)} = \Phi(G)$. D'après la proposition 5.2, le centre de $G/\Phi(G)$ coïncide avec $\overline{\Phi(G)}/\Phi(G)$, Donc :

$$K\left(\frac{G}{\Phi(G)}\right) \geqslant Z\left(\frac{G}{\Phi(G)}\right) = \frac{\Phi(G)}{\Phi(G)} \quad .$$

On ne peut pas avoir $K(G/\Phi(G)) = \Phi(G)/\Phi(G)$, car dans ce cas

$$\frac{G}{\Phi(G)} = \frac{\Phi(G)}{\Phi(G)} \quad ,$$

et G serait d'ordre 1 .

(2) ==> (1) .

Soit

$$K\left(\frac{G}{\Phi(G)}\right) > Z\left(\frac{G}{\Phi(G)}\right) \quad .$$

Alors, étant donné que ([3])

$$K\left(\frac{G}{\Phi(G)}\right) \cap Z\left(\frac{G}{\Phi(G)}\right) = \frac{\Phi(G)}{\Phi(G)} \quad ,$$

on a

$$Z\left(\frac{G}{\Phi(G)}\right) = \frac{\Phi(G)}{\Phi(G)}$$

et

$$\overline{\Phi(G)} = \Phi(G) \quad .$$

LEMME 1.3. - *Si* $K(G)$ *est nilpotent, il existe en* $G/\Phi(G)$ *un complément* (1) $S/\Phi(G)$ *de* $K(G/\Phi(G))$.

Démonstration. - Puisque $K(G)$ est nilpotent, on a

$$K(\frac{G}{\Phi(G)}) = \frac{[K(G)\ ,\ \Phi(G)]}{\Phi(G)} \leqslant F(\frac{G}{\Phi(G)}) \quad .$$

On sait que $F(G/\Phi(G))$ est abélien ([1]), en particulier $K(G/\Phi(G))$ est de même abélien. Pour cette raison, $K(G/\Phi(G))$ possède un complément ([3]), qui est évidemment abélien.

THÉORÈME 5.3. - *Si* $K(G)$ *est nilpotent, les propositions suivantes sont équivalentes :*

1° $\overline{\Phi(G)} = \Phi(G)$.

2° *Deux éléments* $\alpha \neq \beta$ de $S/\Phi(G)$ *induisent sur* $K(G/\Phi(G))$ *des automorphismes différents.*

Démonstration. - (1) $\Longrightarrow$ (2) .

Soit $\overline{\Phi(G)} = \Phi(G)$. Deux éléments $\alpha \neq \beta$ de $S/\Phi(G)$ ne peuvent induire sur $K(G/\Phi(G))$ le même automorphisme : dans le cas contraire $\alpha\beta^{-1}$ serait permutable avac les éléments de $K(G/\Phi(G))$ et de $S/\Phi(G)$, et $\alpha\beta^{-1} \neq \Phi/\Phi$ serait dans le centre de $G/\Phi(G)$, ce qui est contraire à l'hypothèse $Z(G/\Phi) = \Phi(G)/\Phi(G)$.

(2) $\Longrightarrow$ (1) .

Inversement supposons 2° vraie. Si σ est un élément de $Z(G/\Phi(G))$. On a

$$\sigma = \alpha\beta$$

avec :

$$\alpha \in K(\frac{G}{\Phi(G)}) \ , \qquad \beta \in \frac{S}{\Phi(G)} \quad .$$

---

(1) c'est-à-dire que :

$$[\frac{S}{\Phi(G)}\ ,\ K(\frac{G}{\Phi(G)})] = \frac{G}{\Phi(G)} \ , \qquad \frac{S}{\Phi(G)} \cap K(\frac{G}{\Phi(G)}) = \frac{\Phi(G)}{\Phi(G)} \quad .$$

Si α' parcourt $K(G/\Phi(G))$, on aura

$$\sigma\alpha' = \alpha\beta\alpha' = \alpha'\sigma = \alpha'\alpha\beta$$

et, puisque $K(G/\Phi(G))$ est abélien,

$$\alpha\beta\alpha' = \alpha'\alpha\beta = \alpha\alpha'\beta$$

$$\beta\alpha' = \alpha'\beta$$

et β est permutable avec les éléments de $K(G/\Phi(G))$ et de $S/\Phi(G)$; donc β appartient à $Z(G/\Phi(G))$, et l'effet de β sur $K(G/\Phi(G))$ est la permutation identique. Alors l'hypothèse 2° nous assure que $\beta = \Phi(G)/\Phi(G)$. Nous avons ainsi prouvé que

$$\sigma = \alpha \in K(\frac{G}{\Phi(G)})$$

d'où, puisque $K(G/\Phi) \cap Z(G/\Phi) = \Phi/\Phi$, résulte que $\alpha = \sigma = \Phi/\Phi$ et, σ étant arbitraire :

$$Z(G/\Phi(G)) = \Phi(G)/\Phi(G) \quad .$$

D'après la proposition 5.2

$$\overline{\Phi(G)} = \Phi(G) \quad .$$

THÉORÈME 6.3. - Les propositions suivantes sont équivalentes :

(1) $\overline{F(G)} = F(G)$

(2) $\overline{F(G)}/\Phi(G)$ est abélien élémentaire

(3) $\overline{F(G)}/\Phi(G)$ est abélien

(4) $\overline{F(G)}/\Phi(G)$ est nilpotent .

Démonstration. - Il est évident que (2) ==> (3) et que (3) ==> (4) .

Démontrons que (1) $\Longrightarrow$ (2) .

Soit $\overline{F(G)} = F(G)$. On a

$$\frac{\overline{F(G)}}{\Phi(G)} = \frac{F(G)}{\Phi(G)} \leq F\left(\frac{G}{\Phi(G)}\right)$$

et $\overline{F(G)}/\Phi(G)$ est abélien élémentaire.

Il suffit maintenant de prouver que (4) $\Longrightarrow$ (1) . D'après la proposition 3.2, $\overline{F(G)}$ est un sous-groupe distingué de G , par conséquent $\overline{F(G)}/\Phi(G)$ est un sous-groupe distingué de $G/\Phi(G)$. En outre, puisque $\overline{F(G)}/\Phi(G)$ est supposé nilpotent, on a

$$\frac{\overline{F(G)}}{\Phi(G)} \leq F\left(\frac{G}{\Phi(G)}\right) = \frac{F(G)}{\Phi(G)}$$

$$\overline{F(G)} \leq F(G) \qquad .$$

D'autre part $\overline{F(G)}$ contient $F(G)$ (Proposition 2.2).

THÉORÈME 7.3. - $G = \overline{\Phi(G)}$, si (et seulement si) G est nilpotent.

Démonstration. - Il suffit de rappeler que G est nilpotent ([4]), si (et seulement si) $\Phi(G) \geq K(G)$, et que $\overline{N} = G$ si (et seulement si) $N \geq K(G)$.

THÉORÈME 8.3. - $G = \overline{F(G)}$, si (et seulement si) $\Phi(G) \geq K(K(G))$.

Démonstration. - Il suffit de rappeler que $K(G) \leq F(G)$, si (et seulement si) ([5]) $\Phi(G) \geq K(K(G))$.

Remarque. - Les résultats de cet exposé sont pour la plupart contenus dans un mémoire qui vient d'être publié en Italie ([2]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] BAER (Reinhold). - Nilpotent characteristic subgroups of finite groups, Amer. J. of Math., t. 75, 1953, p. 633-664.

[2] CURZIO (Mario). - Sui trasportatori nei gruppi e nelle algebre di Lie, Ricerche di Mat., t. 10, 1961 (à paraître).

[3] GASCHÜTZ (Wolfgang). - Über die Φ-Untergruppe endlicher Gruppen, Math. Z., t. 58, 1953, p. 160-170.

[4] HALL (Marshall, Jr). - The theory of groups. - New-York, The Mac-Millan Company, 1959.

[5] HUPPERT (Bertram). - Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen, Math. Z., t. 60, 1954, p. 409-434.