Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Štefan Schwarz

Les mesures dans les demi-groupes

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 14, nº 2 (1960-1961), exp. nº 23 bis, p. 9-17

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1960-1961__14_2_A8_0>

LES MESURES DANS LES DEMI-GROUPES

par Štefan SCHWARZ

Je rappelle quelques notions bien connues.

Un demi-groupe S est un ensemble dans lequel est définie une opération univoque associative. Si S est en même temps un espace topologique et si la multiplication est continue, on parle d'un demi-groupe topologique.

La plupart des résultats dont je parlerai dans ce qui suit, peuvent être démontrés pour les demi-groupes compacts. Mais pour simplifier quelques résultats, et pour souligner les méthodes algébriques, je me bornerai dans cette conférence aux demi-groupes <u>finis</u> (en général non commutatifs).

Soit S un demi-groupe fini. Une <u>mesure</u> μ est une fonction d'ensemble non négative définie sur les sous-ensembles de S et telle que $\mu(S) = 1$.

Le support de la mesure μ est l'ensemble

$$c(\mu) = \{x \in S | \mu(x) \neq 0\} \quad .$$

Désignons l'ensemble de toutes les mesures de S par $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(S)$. ν_1 , ν_2 étant éléments de $\mathfrak{M}$, nous définissons le produit $\nu_1 \star \nu_2$ par la relation

$$\nu_1 \star \nu_2(x) = \sum_{uv=x} \nu_1(u) . \nu_2(v) \quad .$$

Avec cette multiplication $\mathfrak{M}$ devient un demi-groupe.

Soit $\mathfrak{A}(S)$ l'algèbre de demi-groupe, c'est-à-dire l'ensemble des formes linéaires réelles $\sum_{x_i \in S} t_i \varkappa_i$ avec la multiplication scalaire naturelle et

$$\sum t'_i \varkappa_i \sum t''_k \varkappa_k = \sum \sum t'_i t''_k \varkappa_i \varkappa_k \quad .$$

Désignons par $\mathfrak{F}(S)$ le sous-ensemble de $\mathfrak{A}(S)$ avec $\sum_{x_i \in S} t_i = 1$. Il est bien connu et on prouve aisément que la correspondance

$$\nu(x) \in \mathfrak{M} \leftrightarrow \nu(x_1) \varkappa_1 + \dots + \nu(x_n) \varkappa_n \in \mathfrak{F}(S)$$

est un isomorphisme de $\mathfrak{M}(S)$ et $\mathfrak{F}(S)$. À une mesure μ , dont le support est un point $\varkappa_i$ (point-masse $\varkappa_i$), correspond, dans cette correspondance, l'élément

x_i. Voilà pourquoi nous pouvons considérer S comme plongé (immergé) dans $\mathfrak{F}(S)$, et désigner cette μ par le même symbole x_i. Sans craindre de malentendu, nous identifierons $\mathfrak{M}(S)$ et $\mathfrak{F}(S)$, et représenterons les mesures par des expressions de la forme $\sum t_i x_i$ avec la multiplication introduite ci-dessus. Nous écrirons aussi $\nu_1 \nu_2$ au lieu de $\nu_1 * \nu_2$.

Il est naturel d'introduire dans $\mathfrak{M}(S)$ une topologie par la définition :

$$\nu_\alpha = \sum_{x_i \in S} t_i^{(\alpha)} x_i$$

converge vers $\nu = \sum\limits_{x_i \in S} t_i x_i$ si et seulement si $t_i^{(\alpha)} \to t_i$. Dans cette topologie $\mathfrak{M}$ devient un demi-groupe compact hausdorffien.

Le but de cette conférence est de donner quelques résultats concernant la structure du demi-groupe $\mathfrak{M}$.

Les résultats ont des applications naturelles dans la théorie des probabilités. Si ν_1 et ν_2 sont considérés comme des fonctions définissant des distributions de probabilité sur S de deux fonctions aléatoires indépendantes, $\nu_1 \nu_2$ définit la distribution de probabilité pour leur produit. On peut considérer par exemple la suite $\nu, \nu^2, \nu^3, \dots$, et un des problèmes fondamentaux est d'étudier l'existence de la limite $\lim\limits_{n=\infty} \nu^n$.

Des cas particuliers de notre problème ont été étudiés dans le cas commutatif par MM. HEWITT et ZUCKERMAN (1955), KLOSS (1959) et GLICKSBERG (1960). Le cas des groupes non commutatifs a été étudié par MM. KLOSS (1959), GLICKSBERG (1960) et STROMBERG (1960).

J'ai trouvé les résultats que je vais énoncer ici pendant ces derniers mois, et ils ne sont pas encore publiés. Les résultats concernant le cas non commutatif sont nouveaux.

I.

On voit que même dans le cas où S est fini, $\mathfrak{M}$ est infini compact. Il est donc nécessaire de rappeler quelques résultats fondamentaux concernant la structure d'un demi-groupe compact hausdorffien.

Les premiers résultats dans cette direction ont été trouvés par NUMAKURA et moi-même (1953 et 1955) et énormément approfondis depuis ce temps par A. D. WALLACE et son école.

Soit M un demi-groupe compact hausdorffien. Construisons le demi-groupe cyclique $A = \{a , a^2 , a^3 , \dots\}$, a étant un élément quelconque de M . La fermeture $\overline{A}$ de A est un demi-groupe contenant un et seulement un idempotent e . En réalité, si l'on pose $A_n = \{a^n , a^{n+1} , \dots\}$, l'intersection $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n$ est un groupe G , et l'élément-unité de ce groupe est l'idempotent contenu dans $\overline{A}$.

Nous dirons que l'élément a appartient à l'idempotent e .

Un demi-groupe compact contient donc toujours au moins un idempotent. Chaque élément $a \in M$ appartient à un et seulement un idempotent. Désignons l'ensemble de tous les éléments appartenant à l'idempotent e_α par K_α . Le demi-groupe M peut être écrit comme réunion des sous-ensembles disjoints $M = \bigcup_{e_\alpha \in S} K_\alpha$. Les ensembles K_α ne sont pas, en général, des demi-groupes, mais cela a lieu certainement si M est commutatif.

Pour chaque idempotent e_α , il existe un groupe unique maximal G_α ayant e_α comme élément-unité (maximal signifie que chaque groupe contenant e_α comme élément-unité est contenu dans G_α). Le groupe G_α est fermé et il est évident que $G_\alpha \subseteq K_\alpha$. En outre il est possible de démontrer que $K_\alpha e_\alpha = e_\alpha K_\alpha = G_\alpha$.

Nous appellerons un élément contenu dans un des groupes G_α élément <u>régulier</u> de S .

Tous ces résultats sont bien connus dans le cas fini ou périodique. Mais ils sont valables aussi dans le cas compact si l'on introduit, comme je l'ai fait, la notion "appartenir à un idempotent".

Rappelons brièvement aussi quelques notions purement algébriques. Si S est un demi-groupe, une partie non-vide $L \subset S$ est dite <u>idéal à gauche</u> dans S si l'on a $SL \subset L$. Un idéal à droite et un idéal bilatère sont définis d'une façon analogue. La notion d'un idéal minimal a un sens bien connu.

Un demi-groupe est dit <u>simple</u>, s'il ne contient pas d'idéaux bilatères différents de S . Un demi-groupe simple qui contient au moins un idéal à gauche minimal est réunion de tous les idéaux à gauche minimaux : $S = \bigcup_k L_k$. Si S contient en même temps un idéal à droite minimal, on a aussi $S = \bigcup_i R_i$. L'intersection $R_i \cap L_k$ est un groupe G_{ik} et on a $S = \bigcup_i \bigcup_k G_{ik}$, S est réunion de groupes disjoints isomorphes entre eux.

Nous appellerons les groupes G_{ik} groupes-composants du demi-groupe simple S.

II.

Retournons maintenant à l'étude du demi-groupe $\mathfrak{M}$, S étant fini, mais sans aucune autre restriction. $\mathfrak{M}$ est compact. Alors, nous pouvons considérer la décomposition en classes $\mathfrak{M} = \bigcup_\alpha K_\alpha$.

Notre but est de caractériser les idempotents, les éléments réguliers et les éléments de K_α.

La première question est comment caractériser les idempotents de $\mathfrak{M}$.

On prouve aisément que, ν_1, ν_2 étant des mesures, on a pour le support de leur produit $c(\nu_1 \nu_2) = c(\nu_1)\, c(\nu_2)$. Il en résulte que le support d'un idempotent ε est un sous-demi-groupe $c(\varepsilon)$ de $\mathfrak{M}$. Mais il est possible de prouver aussi que $c(\varepsilon)$ est nécessairement un demi-groupe simple. C'était le point de départ de mes investigations.

J'ai réussi à prouver par un raisonnement un peu délicat qu'un idempotent $\varepsilon \in \mathfrak{M}$ prend sur chaque groupe-composant de $c(\varepsilon) = \bigcup_i \bigcup_k G_{ik}$ les mêmes valeurs, c'est-à-dire on a $\varepsilon(x) = \varepsilon(y)$ pour $x, y \in G_{ik}$.

Il en résulte qu'il est possible d'obtenir une formule générale pour la construction des idempotents dont le support est $c(\varepsilon)$.

Si le demi-groupe $c(\varepsilon)$ contient s idéaux à droite minimaux et r idéaux à gauche minimaux, on a, comme nous l'avons remarqué plus haut,

$$c(\varepsilon) = \bigcup_{i=1}^{s} \bigcup_{k=1}^{r} G_{ik} .$$

Si $\{g_{ik}^{(1)}, g_{ik}^{(2)}, \dots, g_{ik}^{(m)}\}$ sont les éléments distincts du groupe G_{ik}, nous posons

$$[G_{ik}] = \frac{1}{m}(g_{ik}^{(1)} + g_{ik}^{(2)} + \dots + g_{ik}^{(m)}) .$$

Alors, l'idempotent ε, ayant pour support $c(\varepsilon)$, est de la forme

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{s} \sum_{k=1}^{r} \xi_i \eta_k [G_{ik}] , \tag{1}$$

où ξ_i, η_k sont des nombres positifs réels satisfaisant

$$\sum^{s} \xi_i = \sum^{r} \eta_k = 1 \quad .$$

Inversement, si l'on prend un sous-demi-groupe H simple arbitraire, et si l'on construit une mesure de la forme (1), on obtient un idempotent dont le support est H .

Si l'on prend pour ξ_i , η_i des nombres non-négatifs, on obtient aussi un idempotent, mais le support n'est plus un sous-demi-groupe de H .

En considérant tous les sous-demi-groupes simples de S, on obtient un aperçu complet sur tous les idempotents de $\mathfrak{M}$.

III.

Il est nécessaire maintenant de faire quelques remarques concernant les demi-groupes simples.

1° Chaque sous-demi-groupe d'un demi-groupe simple fini est simple. C'est un théorème assez simple, mais je ne l'ai pas trouvé dans la littérature (notons que ce fait est valable aussi pour les demi-groupes compacts simples si nous restreignons nos considérations aux sous-demi-groupes fermés).

2° Nous ferons une remarque sur la position des demi-groupes simples dans un demi-groupe.

Il est clair que chaque demi-groupe simple de S est contenu dans un sous-demi-groupe simple maximal. Mais il n'est pas vrai que ce sous-demi-groupe maximal est unique et, a fortiori, il n'est pas vrai en général que deux sous-demi-groupes simples maximaux sont disjoints (en passant, je remarque que c'est une réponse négative à une question posée par R. CROISOT dans un de ses travaux).

Mais il est toujours vrai que, H étant un sous-demi-groupe simple, il existe toujours un sous-demi-groupe simple maximal unique H_1 ayant les mêmes idempotents que H .

Soit S donné. Décomposons S en F-classes au sens de GREEN, c'est-à-dire $x \equiv y \pmod F$ si et seulement si x et y engendrent le même idéal principal bilatère. Il est facile de voir que chaque classe contenant un idempotent contient au moins un demi-groupe simple maximal et qu'un tel demi-groupe simple maximal ne peut couper deux F-classes différentes.

La localisation des demi-groupes simples maximaux dans S est donc clarifiée, à un certain degré.

3° Soient H_1 un demi-groupe simple et H un sous-demi-groupe de H_1 ayant les mêmes idempotents que H_1 .

Un autre théorème élémentaire qui ne semble pas être connu est le suivant : on a une décomposition unique de H_1 en classes par rapport à H de la manière suivante :

$$H_1 = H \cup HaH \cup HbH \cup \dots \quad . \tag{2}$$

Ces classes sont disjointes, en particulier $H = HaH$ si et seulement si $a \in H$.

Retournant maintenant à l'étude du demi-groupe $\mathfrak{M}$, nous tâcherons de caractériser les éléments réguliers de $\mathfrak{M}$. Plus précisément : étant donné un idempotent $\varepsilon \in \mathfrak{M}$, nous voulons trouver les éléments μ contenus dans le groupe maximal $g(\varepsilon)$ appartenant à ε .

Soient ε un idempotent appartenant à $\mathfrak{M}$ et $c(\varepsilon) = H = \bigcup\limits_i \bigcup\limits_k G_{ik}$. Construisons le demi-groupe simple maximal $H_1 = \bigcup\limits_i \bigcup\limits_k G'_{ik}$ ayant les mêmes idempotents que H et construisons la décomposition (2). Il est possible de démontrer : <u>si μ est régulier et appartient à</u> ε , $c(\mu)$ <u>est exactement une des classes</u> HaH ($c(\mu) = HaH$ avec a convenablement choisi).

En outre, il existe une seule mesure régulière ayant HaH comme support, et il est possible de donner une formule explicite pour cette mesure. En conservant les mêmes notations, posons $HaH \cap G'_{ik} = T_{ik}$. T_{ik} est un ensemble non-vide pour chaque paire i , k . Posons

$$[T_{ik}] = \frac{1}{\rho}(t_{ik}^{(1)} + t_{ik}^{(2)} + \dots + t_{ik}^{(\rho)}) \quad ,$$

$t_{ik}^{(\alpha)}$ parcourant tous les éléments distincts de T_{ik} . La seule mesure régulière et appartenant à

$$\varepsilon = \sum_i \sum_k \xi_i \eta_k [G_{ik}] \quad ,$$

ayant HaH pour support, est la mesure

$$\mu = \sum \sum \xi_i \eta_k [T_{ik}]$$

(avec les mêmes nombres ξ_i , η_k).

H étant donné, la décomposition (2) a (dans le cas fini) un nombre fini de classes HaH . On peut donc énoncer : <u>le groupe</u> $g(\varepsilon)$ <u>des mesures régulières</u>

<u>appartenant à un idempotent</u> ε <u>fixe est fini</u>.

Je voudrais remarquer que H , et donc H_1 , étant donné, il n'est pas vrai que pour chaque classe $Ha\,H$ il existe une mesure régulière ayant $Ha\,H$ pour support. Ce sont seulement certaines classes <u>distinguées</u> qui sont des supports (i , k étant fixes, les T_{ik} contenus dans ces classes distinguées remplissent exactement le normalisateur de G_{ik} dans le groupe maximal G'_{ik}).

Il n'est pas surprenant que la structure de ce groupe $g(\varepsilon)$ soit étroitement liée à la structure des groupes-composants de H .

Par exemple : si $\varepsilon = e_\alpha$ est un point-masse situé dans un idempotent e_α de S , c'est-à-dire $H = \{e_\alpha\}$, le groupe des mesures régulières appartenant à cet idempotent est isomorphe au groupe maximal G_α de S (si S est plongé en $\mathfrak{M}$, comme nous avons fait, il est identique avec G_α).

Dans l'autre cas extrême, si H est un demi-groupe simple dont les groupes-composants sont des groupes maximaux de S ,

$$H = \bigcup_i \bigcup_k G_{ik} \quad ,$$

le groupe des mesures régulières appartenant à

$$\varepsilon = \sum_i \sum_k \xi_i \, \eta_k [G_{ik}]$$

se réduit à un seul élément, c'est-à-dire à ε lui-même.

Pour donner une application, considérons le problème suivant : soit N le noyau de S et $\mathfrak{N}$ le noyau de $\mathfrak{M}$. Quelle est la relation entre N et $\mathfrak{N}$, et quelle est la structure de $\mathfrak{N}$?

Soit

$$N = \bigcup_i^{\sigma} \bigcup_k^{\rho} G_{ik}$$

la décomposition de N en groupes composants. Les idempotents contenus dans $\mathfrak{N}$ sont exactement les éléments $\sum^{\sigma} \sum^{\rho} \xi_i \, \eta_i [G_{ik}]$, $\sum^{\sigma} \xi_i = \sum^{\rho} \eta_i = 1$, où ξ_i , η_i sont des nombres non-négatifs. En outre les résultats cités entraînent que chaque élément de $\mathfrak{N}$ est un idempotent. La structure de $\mathfrak{N}$ est simple : $\mathfrak{N}$ est isomorphe au demi-groupe des $(\rho + \sigma)$-uples des nombres réels non-négatifs : $(\xi_1 , \dots , \xi_\sigma , \eta_1 , \dots , \eta_\rho)$, $\sum \xi_i = \sum \eta_i = 1$ avec la multiplication

$$(\xi'_1 , \dots , \xi'_\sigma , \eta'_1 , \dots , \eta'_\rho)(\xi''_1 , \dots , \xi''_\sigma , \eta''_1 , \dots , \eta''_\rho) = (\xi'_1 , \dots , \xi'_\sigma , \eta''_1 , \dots , \eta''_\rho) \quad .$$

IV.

Il nous reste maintenant le problème d'étudier les éléments appartenant à $\mathfrak{M}$ non-nécessairement réguliers. Par exemple, trouver tous les éléments appartenant à un idempotent ε donné.

Ce problème est assez compliqué et je n'ai pas réussi à obtenir des résultats absolument satisfaisants. J'ai réussi à obtenir des résultats de caractère plutôt général.

Les **F**-classes, introduites ci-dessus, peuvent être partiellement ordonnées en posant $F_1 < F_2$ si et seulement si $\mathfrak{I}_1 \subseteq \mathfrak{I}_2$, $\mathfrak{I}_1$ étant l'idéal engendré par les éléments de F_1 . Si μ appartient à ε et si $c(\varepsilon)$ est contenu dans la classe F_0 , on peut démontrer qu'on a nécessairement

$$c(\mu) \subset \bigcup_{F \geqslant F_0} F \quad .$$

D'autre part, si μ est un élément appartenant à $\mathfrak{M}$ appartenant à ε , et P le demi-groupe engendré par $c(\mu)$, il est possible de prouver que $c(\varepsilon)$ est contenue dans l'idéal bilatère minimal de P .

Il y a des cas spéciaux dans lesquels les résultats deviennent plus harmonieux ; par exemple, la classe des demi-groupes simples, ou la classe des demi-groupes qui sont réunions de demi-groupes simples.

Pour donner un exemple, soient S un demi-groupe simple, ε un idempotent, $H = c(\varepsilon)$ et H_1 le sous-demi-groupe maximal ayant les mêmes idempotents que H . Considérons de nouveau la décomposition (2). Nous avons vu que pour les éléments réguliers on a $c(\mu) = HaH$ avec un a convenablement choisi. Pour un élément μ_1 non-nécessairement régulier, appartenant à ε, on peut prouver $c(\mu_1) \subset HbH$ avec un b convenablement choisi. En partant de ce fait on peut caractériser, à un certain degré, les éléments appartenant à ε .

Même dans le cas d'un demi-groupe simple idempotent, on obtient des résultats qui ne peuvent pas être considérés comme triviaux.

V.

Pour terminer, je vais mentionner encore le problème déjà souligné ci-dessus, problème de caractère probabiliste.

Considérons la suite $\mu , \mu^2 , \mu^3 , \dots$. Il faut trouver des conditions nécessaires et suffisantes pour que la limite $\lim_{n=\infty} \mu^n$ existe.

Il est facile de démontrer que, si cette limite existe, elle est égale à ε , où ε est l'idempotent contenu dans la fermeture

$$\overline{\{\mu\ ,\ \mu^2\ ,\ \mu^3\ ,\ \dots\}} \quad .$$

Une condition nécessaire et suffisante pour l'existence de cette limite est que le groupe maximal contenu dans cette fermeture se réduise à un seul élément (à savoir ε).

Mais comment peut-on caractériser l'existence de cette limite au moyen des sous-ensembles de S ? Posons $H = c(\varepsilon)$. Une condition nécessaire et suffisante pour que $\lim \mu^n$ existe est la réalisation de la condition $Hc(\mu)\ H = H$. Dans le cas d'un demi-groupe simple cette condition peut être remplacée simplement par $c(\mu) \subseteq H$. Une autre caractérisation est la suivante : Si P est le demi-groupe engendré par $c(\mu)$, H est l'idéal minimal bilatère de P .

Il existe aussi une caractérisation qui n'exige pas la connaissance de H , mais elle n'est pas simple.

Un autre théorème très remarquable est le suivant : Soit μ n'importe quel élément appartenant à $\mathfrak{M}(S)$. Considérons la suite $\sigma_n = \frac{1}{n}(\mu + \mu^2 + \dots + \mu^n)$. Alors $\lim \sigma_n$ existe toujours, et elle est égale à un idempotent $\sigma \in \mathfrak{M}(S)$. Si P est le sous-demi-groupe engendré par $c(\mu)$ et $\mathfrak{I}$ l'idéal minimal bilatère de P , on a $c(\sigma) = \mathfrak{I}$.

Il existe un grand nombre d'autres résultats dans la direction que j'ai mentionnée ici. Mais je me suis borné aux résultats plutôt simples, pour donner une idée d'un nouveau champ, qui me semble fécond, pour les recherches futures, où les méthodes de la théorie des demi-groupes interviennent d'une manière essentielle.