Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

René Deheuvels

Théorie de l'homologie

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 14, nº 2 (1960-1961), exp. nº 26, p. 1-40

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1960-1961__14_2_A11_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
14e année, 1960/61, n° 26

29 mai 1961

THÉORIE DE L'HOMOLOGIE

par René DEHEUVELS

INTRODUCTION. - La nature de l'homologie et de la cohomologie a été, depuis la fondation de la Topologie algébrique, l'objet de nombreux travaux (citons, parmi les plus récents : [1], [2], [5], [7], [8], [9], [10] de la Bibliographie). Le fait que, jusqu'à présent, aucun traitement convenable de l'homologie ("de Čech") des espaces topologiques n'avait pu être donné, montre bien l'insuffisance des concepts employés.

Pour définir les foncteurs d'homologie et de cohomologie dans la catégorie $\mathcal{T}$ des espaces topologiques, nous avons été amenés (cf. [3]) à considérer la catégorie que forment les ensembles avec les applications croissantes.

Si $\mathcal{C}$ est une catégorie abélienne, et $\mathcal{E}$ un ensemble ordonné, la catégorie $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ est l'analogue de celle des préfaisceaux d'objets de $\mathcal{C}$ sur les ouverts d'un espace topologique.

Nous définissons deux foncteurs : $\mathcal{C}(\mathcal{E}) \to \mathcal{C}$, le foncteur sections Γ (analogue des sections d'un préfaisceau (§ 3) et cosections L, (§ 4), dual de Γ, dont les dérivés sont les foncteurs de cohomologie et d'homologie de l'ensemble ordonné $\mathcal{E}$ (§ 7).

Deux foncteurs canoniques (§ 9) permettent de passer de la catégorie des ensembles ordonnés à celle des schémas simpliciaux, et vice versa, avec conservation de l'homologie et de la cohomologie, ce qui donne une nouvelle manière de définir l'homologie et la cohomologie d'un schéma simplicial (annoncée dans [3]) valable même si les coefficients sont covariants dans le cas de l'homologie ou contravariants dans le cas de la cohomologie.

Nous obtenons, au § 12 et au § 13, des définitions satisfaisantes de l'homologie et de la cohomologie d'un espace topologique à coefficients dans un préfaisceau, un faisceau, un antifaisceau, ou un cofaisceau dans $\mathcal{C}$. Nous utilisons pour cela la notion d'hyperdérivés d'un foncteur composé (§ 11).

D'une part les ensembles ordonnés se manient beaucoup mieux que les schémas simpliciaux ; d'autre part, c'est très souvent sous la forme d'un ensemble ordonné que se présentent les objets d'étude de l'algèbre ; sous-groupes d'un groupe, familles d'idéaux d'un anneau, sous-variétés d'une variété algébrique, etc.

L'introduction de l'homologie et de la cohomologie d'un ensemble ordonné ouvre donc aux méthodes homologiques un nouveau champ d'applications.

1. Catégories $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ et $\mathcal{C}^*(\mathcal{E})$.

Soit $\mathcal{E}$ un ensemble ordonné. On peut considérer ses éléments : a , b , ... comme les objets d'une catégorie (cf. [6], [7]) dont les morphismes sont les relations d'ordre :

$$\mathrm{Hom}(a\ ,\ b) \text{ est formé de l'élément unique } \prec \text{ si } a \prec b \quad ,$$

$$\mathrm{Hom}(a\ ,\ b) = \emptyset \quad \text{si} \quad a \not\prec b \quad .$$

Nous désignerons par $\mathcal{E}^*$ l'ensemble $\mathcal{E}$ muni de la relation d'ordre opposée, par $\mathcal{C}^*$ la catégorie duale de $\mathcal{C}$ ([7]).

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie quelconque. Désignons par $\mathcal{C}(\mathcal{E})$, (resp. $\mathcal{C}^*(\mathcal{E})$) , la catégorie dont les objets sont les foncteurs covariants (resp. contravariants) de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{C}$, et les morphismes les transformations naturelles de foncteurs.

Un objet $A \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ consiste donc en la donnée, pour chaque $a \in \mathcal{E}$, d'un objet $A(a) \in \mathcal{C}$ et pour chaque couple ordonné $a \prec b$ d'un morphisme $p_{ab} : A(a) \to A(b)$ de telle sorte que, si $a \prec b \prec c$:

$$p_{ac} = p_{bc} \circ p_{ab} \quad .$$

Un morphisme f de A dans B , dans $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ consiste en la donnée, pour chaque $a \in \mathcal{E}$ d'un morphisme $f_a : A(a) \to B(a)$, de telle sorte que, pour tout couple ordonné $a \prec b$, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
A(a) \arrow[r, "p_{ab}"] \arrow[d, "f_a"] & A(b) \arrow[d, "f_b"] \\
B(a) \arrow[r, "q_{ab}"'] & B(b)
\end{tikzcd}$$

soit commutatif :

$$f_b\ p_{ab} = q_{ab}\ f_a \quad .$$

Par exemple, si $\mathcal{O}$ désigne l'ensemble des ouverts d'un espace topologique X , ordonné par : $O_1 < O_2 \iff O_1 \supset O_2$, $\mathcal{C}(\mathcal{O})$ est la catégorie des <u>préfaisceaux</u> sur X , $\mathcal{C}^*(\mathcal{O})$ la catégorie des <u>antifaisceaux</u> sur X , à valeurs dans $\mathcal{C}$.

PROPOSITION 1.1. - Si $\mathcal{C}$ est abélienne (cf. [6], [7]), $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ est abélienne.

PREUVE. - L'objet nul de $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ s'obtient évidemment en prenant, pour chaque $a \in \mathcal{E}$, l'objet nul de $\mathcal{C}$, un morphisme nul, en prenant, pour chaque $a \in \mathcal{E}$, un morphisme nul dans $\mathcal{C}$.

Si f et g sont deux morphismes de A dans B , la collection des $(f_a + g_a)$ définit un morphisme $f + g$; pour cette addition, $\mathrm{Hom}(A ; B)$ est un groupe abélien, et la composition des morphismes est bilinéaire.

Si f est un morphisme de A dans B , on vérifie immédiatement que les $\mathrm{Ker}\, f_a$ forment avec les restrictions des p_{ab} un objet de $\mathcal{C}(\mathcal{E})$, le <u>noyau</u> $\mathrm{Ker}\, f$ de f . De même les $\mathrm{Coker}\, f_a$ forment un objet de $\mathcal{C}(\mathcal{E})$, le <u>conoyau</u> $\mathrm{Coker}\, f$. $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Coker}\, f$ satisfont aux propriétés voulues ([6], p. 13).

Il en résulte que f est un <u>monomorphisme</u> de A dans B , A et $B \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$, si et seulement si tous les f_a sont des monomorphismes ; c'est un <u>épimorphisme</u>, si et seulement si tous les f_a sont des épimorphismes.

Si J est un ensemble d'indices tel que, pour toute famille d'objets de $\mathcal{C}$ indexés sur J , leur somme directe existe, alors, pour toute famille d'objets A_j , $j \in J$, de $\mathcal{C}(\mathcal{E})$, la somme directe $\bigoplus_{j\in J} A_j$ existe et est définie par

$$\Big(\bigoplus_{j\in J} A_j\Big)(a) = \bigoplus_{j\in J} A_j(a) \quad , \quad p_{ab} = \bigoplus_{j\in J} p^j_{ab} \qquad .$$

Propriété analogue pour le produit.

Nous appellerons, pour éviter des répétitions, objet <u>élémentaire</u> de $\mathcal{C}(\mathcal{E})$, en $a \in \mathcal{E}$, un objet $E^a = \{E^a(c) , q_{cd}\}$ tel que

1° q_{cd} soit un isomorphisme, si $c < d < a$ (donc $E^a(c)$ est "constant et égal à $E^a(a)$ " , si $c < a$).

2° $E^a(c)$ soit l'objet nul si $c \not< a$.

Dualement, un objet <u>coélémentaire</u> de $\mathcal{C}(\mathcal{E})$, en $a \in \mathcal{E}$ est un objet $E_a = \{E_a(c) , r_{cd}\}$ tel que

1° r_{cd} soit un isomorphisme si $a < c < d$.

2° $E_a(c)$ soit l'objet nul si $a \not< c$.

Si $A = \{A(c)\ ,\ p_{cd}\}$ est un objet de $\mathcal{C}(\mathcal{E})$, chaque $a \in \mathcal{E}$, fait correspondre à A :

1° L'objet élémentaire A^a tel que $A^a(a) = A(a)$, et un morphisme canonique f de A dans A^a défini par : $f_b = p_{ba}$ si $b < a$ (de $A(b)$ dans $A^a(b) = A(a)$), et $f_b = 0$ si $b \not< a$.

2° L'objet coélémentaire A_a tel que $A_a(a) = A(a)$, et un morphisme canonique g de A_a dans A défini par : $g_b = p_{ba}$ si $a < b$, et $g_b = 0$ si $a \not< b$.

La proposition suivante est évidente :

PROPOSITION 1.2. - Si E^a est un objet élémentaire, $B \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$,

$$\mathrm{Hom}(B\ ;\ E^a) = \mathrm{Hom}(B(a)\ ;\ E^a(a)) \quad .$$

Si E_a est un objet coélémentaire, $\mathrm{Hom}(E_a\ ;\ B) = \mathrm{Hom}(E_a(a)\ ;\ B(a))$.

Il en résulte qu'un objet élémentaire, E^a est un injectif de $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ si et seulement si $E^a(a)$ est un injectif de $\mathcal{C}$, et qu'un objet coélémentaire E_a est un projectif de $\mathcal{C}(\mathcal{E})$, si et seulement si $E_a(a)$ est un projectif de $\mathcal{C}$.

PROPOSITION 1.3. - Si dans la catégorie abélienne $\mathcal{C}$, le produit direct d'une famille quelconque d'objets existe, et si tout objet se plonge dans un objet injectif, alors tout objet de $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ se plonge dans un objet injectif, produit direct d'objets injectifs élémentaires.

PREUVE. - Soient $A \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ et, pour chaque $a \in \mathcal{E}$, $J(a)$ un objet injectif de $\mathcal{C}$ contenant $A(a)$, J^a l'objet élémentaire de $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ défini par $J^a(a) = J(a)$. J^a est injectif. $I = \prod_{a\in\mathcal{E}} J^a$ est donc également un injectif de $\mathcal{C}(\mathcal{E})$. Le produit j des morphismes canoniques $j^a : A \to A^a \to J^a$, de A dans I est un monomorphisme puisque, chaque $b \in \mathcal{E}$:

$$A(b) \to \prod_{a\in\mathcal{E}} J^a(b) = \prod_{\substack{a\in\mathcal{E}\\ b<a}} j(a) \text{ est un monomorphisme} \quad .$$

Dualement :

PROPOSITION 1.4. - Si dans la catégorie abélienne $\mathcal{C}$, la somme directe d'une famille quelconque d'objets existe, et si tout objet est image d'un objet projectif, alors tout objet de $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ est image d'un objet projectif, somme directe d'objets projectifs coélémentaires.

2. Opérations dans $\mathcal{C}(\mathcal{E})$.

Un foncteur covariant F de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}'$ induit un foncteur covariant de $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ dans $\mathcal{C}'(\mathcal{E})$ par :

$$A = \{ A(a) , p_{ab} \} \longrightarrow \{ FA(a) , Fp_{ab} \} \quad .$$

Appelons ordre ρ (cf. [4], chapitre I) de l'ensemble ordonné $\mathcal{E}$ dans l'ensemble ordonné $\mathcal{E}'$, une relation d'ordre sur la réunion $\mathcal{E} \cup \mathcal{E}'$ induisant les relations d'ordres données sur $\mathcal{E}$ et sur $\mathcal{E}'$, et telle que les seules relations d'ordre entre un élément de $\mathcal{E}$ et un élément de $\mathcal{E}'$ soient du type : $a \prec a'$ (on ne considère aucune relation du type $a' \prec a$!). Lorsqu'il y a lieu de considérer des ensembles non disjoints, il est nécessaire de distinguer $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$. L'ordre canonique de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'$, si $\mathcal{E}' \subset \mathcal{E}$ ou si $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}'$ par exemple, exclut les relations d'ordre du type $a' \prec a$, $a' \in \mathcal{E}'$, $a \in \mathcal{E}$. ρ^* est l'ordre dual de $\mathcal{E}'^*$ dans $\mathcal{E}^*$.

EXEMPLES.

a. Une application croissante f de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'$ détermine un ordre de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'$ par : $a \prec a'$ si $f(a) \prec a'$ et un ordre de $\mathcal{E}'$ dans $\mathcal{E}$ par : $a' \prec a \iff a' \prec f(a)$.

b. L'addition d'un premier élément x à $\mathcal{E}$ détermine un ordre de x dans $\mathcal{E}$.

c. Une application quelconque ψ d'un espace topologique X dans un autre X' détermine un ordre de l'ensemble ordonné des ouverts de X' : $\mathcal{O}'$, dans celui $\mathcal{O}$ de X par : $O' \prec O \iff O' \supset \psi O$. L'application de X sur un point x revient donc à ajouter un premier élément x à $\mathcal{O}$. Mais l'addition d'un dernier élément à $\mathcal{O}$, naturelle du point de vue des ensembles ordonnés, ne se décrit pas par une application ponctuelle.

Un morphisme f de $A \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ dans $B \in \mathcal{C}(\mathcal{E}')$ au-dessus d'un ordre de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'$ est tout simplement un objet $C \in \mathcal{C}(\mathcal{E} \cup \mathcal{E}')$ qui induit A sur $\mathcal{E}$ et B sur $\mathcal{E}'$.

3. Foncteur "sections" Γ sur $\mathcal{C}(\mathcal{E})$.

Nous allons donner du foncteur sections : Γ sur $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ plusieurs descriptions valables à des degrés divers de généralité.

3.1. – Supposons que les objets de $\mathcal{C}$ soient des ensembles, et appelons section de $A \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ toute fonction σ qui, à chaque $a \in \mathcal{E}$ attache un élément $\sigma(a) \in A(a)$ de telle sorte que si $a \prec b$: $\sigma(b) = p_{ab}\,\sigma(a)$.

Soit ΓA l'ensemble des sections. C'est un sous-ensemble de l'ensemble $\prod_{a \in \mathcal{E}} A(a)$ des fonctions arbitraires de $\mathcal{E}$ dans A.

On est assuré que ΓA est un objet de $\mathcal{C}$ dans tous les cas usuels. C'est évident si $\mathcal{C}$ est la catégorie des ensembles. Si $\mathcal{C}$ est la catégorie des groupes abéliens, on définit naturellement sur ΓA une addition par addition des composantes : $(\sigma + \sigma')(a) = \sigma(a) + \sigma'(a)$, qui fait de ΓA un groupe abélien. Raisonnement analogue si $\mathcal{C}$ est la catégorie des modules sur un anneau, des anneaux unitaires, etc.

L'application qui, à chaque section σ, fait correspondre sa composante $\sigma(a) \in A(a)$ est un morphisme (dans $\mathcal{C}$) de ΓA dans $A(a)$ tel que si $a \prec b$: $p^b = p_{ab} \circ p^a$.

Si f est un morphisme : $A \to B$ dans $\mathcal{C}(\mathcal{E})$, l'image par f d'une section σ de A est une section $f\sigma$ de B. Cette application définit un morphisme $\Gamma f : \Gamma A \to \Gamma B$ tel que, pour chaque $a \in \mathcal{E}$, le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\Gamma A \arrow[r, "p^a"] \arrow[d, "\Gamma f"'] & A(a) \arrow[d, "f_a"] \\
\Gamma B \arrow[r, "q^a"] & B(a)
\end{tikzcd}$$

3.2. – De la même façon que l'on peut considérer l'ensemble des sections d'un faisceau sur un espace topologique X comme l'image directe du faisceau par l'application de X sur un point x (qui revient, comme nous l'avons vu au § 2 à l'addition d'un premier élément à l'ensemble ordonné des ouverts $\mathcal{O}$ de X), nous allons considérer le foncteur sections sur $\mathcal{E}$ comme le foncteur image inverse par l'ordre ξ du point x dans $\mathcal{E}$. ξ : $x \prec \mathcal{E}$, où x est un premier élément ajouté à $\mathcal{E}$ (§ 2).

Comme $\mathcal{C}(x) = \mathcal{C}$, un morphisme de $S \in \mathcal{C} = \mathcal{C}(x)$, dans $A \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ au-dessus de ξ, est un élément h de $\prod_{a \in \mathcal{E}} \mathrm{Hom}(S\,;A(a))$ tel que $h_b = p_{ab} \cdot h_a$, pour tous les couples ordonnés $a \prec b$.

DÉFINITION. - Soit $\xi : x \prec \mathcal{E}$, un premier élément de $\mathcal{E}$. Appelons <u>foncteur sections</u> Γ ou <u>foncteur image inverse par</u> ξ, un foncteur qui fait correspondre :

à chaque objet $A \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$, un objet de $\mathcal{C}$, noté ΓA ou $\xi^{-1} A$: <u>objet des sections de</u> A, et un morphisme p_A au-dessus de $\xi : \Gamma A \to A$ (§ 2.2)

à chaque morphisme $f : A \to B$ dans $\mathcal{C}(\mathcal{E})$, un morphisme Γf ou $\xi^{-1} f : \Gamma A \to \Gamma B$, tel que le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \xi^{-1} A = \Gamma A & \xrightarrow{p_A} & A \\ {\scriptstyle \xi^{-1} f = \Gamma f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \xi^{-1} B = \Gamma B & \xrightarrow{p_B} & B \end{array}$$

soit commutatif, de telle sorte que la condition suivante soit vérifiée :

Tout morphisme $S \to A$ de $\mathcal{C}(x) = \mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ au-dessus de ξ a une factorisation unique par p_A : $S \to \Gamma A \to A$, autrement dit, le morphisme induit par p_A :

$$\mathrm{Hom}(S\ ;\ \Gamma A) \equiv \mathrm{Hom}(S\ ;\ \xi^{-1} A) \xrightarrow{p_A} \prod_{a \in \mathcal{E}} \mathrm{Hom}(S\ ;\ A(a))$$

<u>est un monomorphisme dont l'image soit exactement formée des morphismes de</u> S <u>dans</u> A <u>au-dessus de</u> ξ :

$$\mathrm{Hom}_{\xi}(S\ ;\ A) = \mathrm{Hom}(S\ ;\ \xi^{-1} A) \quad .$$

Il est clair que si un tel foncteur existe, il est unique à un automorphisme près de $\mathcal{C}$, et que si E^a est un objet élémentaire de $\mathcal{C}(\mathcal{E})$, nécessairement $\Gamma E^a = E^a(a)$.

Nous allons, sans faire d'hypothèse <u>sur les objets</u> de $\mathcal{C}$, démontrer l'existence de Γ pour $\mathcal{C}(\mathcal{E})$, lorsque $\mathcal{C}$ est une catégorie abélienne avec produits.

Supposons la catégorie $\mathcal{C}$ <u>additive</u>, et soit, pour tout couple ordonné $(a \prec b)$ de $\mathcal{E}$: $A(a\ ,\ b) = A(b)$. On peut alors interpréter simplement les conditions que doit vérifier h, en posant :

$$\delta_S : \prod_{a\in\mathcal{E}} \mathrm{Hom}(S\ ;\ A(a)) \xrightarrow{\delta_S} \prod_{\substack{a,b\\ a<b}} \mathrm{Hom}(S\ ;\ A(a\ ,\ b))$$

$$(\delta_S\ h)_{a,b} = h_b - p_{ab}\ h_a$$

h définit un morphisme de S dans A si et seulement si $\delta_S\ h = 0$.

<u>Si les produits existent dans</u> $\mathcal{C}$, on a :

$$\prod_{a\in\mathcal{E}} \mathrm{Hom}(S\ ;\ A(a)) = \mathrm{Hom}(S\ ;\ \prod_{a\in\mathcal{E}} A(a)) \xrightarrow{\delta_S}$$

$$\mathrm{Hom}(S\ ;\ \prod_{\substack{a,b\\ a<b}} A(a\ ,\ b)) = \prod_{\substack{a,b\\ a<b}} \mathrm{Hom}(S\ ;\ A(a\ ,\ b))$$

δ_S induit par un morphisme δ indépendant de S :

$$\prod_{a\in\mathcal{E}} A(a) \xrightarrow{\delta} \prod_{\substack{a,b\\ a<b}} A(a\ ,\ b)$$

ainsi défini : δ est le produit des morphismes $\delta_{a,b}$, où $\delta_{a,b}$ est la "composante" de δ appliquée dans $A(a\ ,\ b)$:

$$\delta_{a,b} = 1_{A(b)} - p_{ab} \cdot 1_{A(a)}$$

$$\delta = \prod_{a<b} \delta_{a,b}$$

autrement dit $\delta_{a,b}$ est nul sur tous les $A(c)$, $c \in \mathcal{E}$ sauf sur $A(b)$ où il est l'identité sur $A(a\ ,\ b) = A(b)$ et sur $A(a)$ où il est $-p_{ab}$.

Lorsque la catégorie $\mathcal{C}$ est abélienne, définissons $\Gamma A = \mathrm{Ker}\ \delta$:

$$0 \rightarrow \Gamma A \rightarrow \prod_{a\in\mathcal{E}} A(a) \xrightarrow{\delta} \prod_{\substack{a,b\\ a<b}} A(a\ ,\ b)$$

est exacte.

Il en résulte que la suite :

$$0 \to \mathrm{Hom}(S\ ;\ \Gamma A) \to \mathrm{Hom}(S\ ;\ \prod_{a\in\mathcal{E}} A(a)) \xrightarrow{\ \delta\ } \mathrm{Hom}(S\ ;\ \prod_{\substack{a,b\\ a<b}} A(a\ ,\ b))$$

est aussi exacte. Donc, un élément

$$h \in \mathrm{Hom}(S\ ;\ \prod_{a\in\mathcal{E}} A(a))$$

est un morphisme de S dans A si et seulement s'il se laisse factoriser par ΓA :

$$h \in \mathrm{Ker}\ \delta \iff h \in \mathrm{Hom}(S\ ;\ \Gamma A) \quad .$$

Soient p_A le morphisme canonique de ΓA dans A que définit l'inclusion :

$$\Gamma A \to \prod_{a\in\mathcal{E}} A(a) \quad ,$$

et, si f est un morphisme : $A \to B$, Γf le morphisme canonique :

$$\Gamma A = \mathrm{Ker}\ \delta^A \to \mathrm{Ker}\ \delta^B = \Gamma B$$

déterminé par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\prod_{a\in\mathcal{E}} A(a) \arrow[r, "\delta^A"] \arrow[d, "\pi f"'] & \prod_{\substack{a,b\\ a<b}} A(a\ ,\ b) \arrow[d, "\pi f"] \\
\prod_{a\in\mathcal{E}} B(a) \arrow[r, "\delta^B"] & \prod_{\substack{a,b\\ a<b}} B(a\ ,\ b)
\end{tikzcd} \quad .$$

Les conditions de la définition du foncteur sections sont vérifiées, et l'on a démontré :

PROPOSITION 3. - Soit $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne avec produits quelconques. Si $\mathcal{E}$ est un ensemble ordonné, il existe sur $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ un foncteur sections Γ (définition ci-dessus). Ce foncteur Γ est additif et exact à gauche (comme on le vérifie immédiatement).

Lorsque la catégorie $\mathcal{C}$ est une sous-catégorie ([7], p. 137) de la catégorie $\mathcal{G}$ des groupes abéliens, le morphisme δ défini ci-dessus est l'homomorphisme :

$$\alpha \in \prod_{a \in \mathcal{E}} A(a) \ : \quad (\delta\alpha)_{a,b} = \alpha(b) - p_{ab}\, \alpha(a) \qquad .$$

3.3. - Autre définition de Γ . - Nous supposerons maintenant que $\mathcal{C}$ est une catégorie abélienne avec produits dont tout objet se plonge dans un objet injectif. Considérons la catégorie $\mathcal{C}(x \cup \mathcal{E})$, ($x \cup \mathcal{E}$ représente $\mathcal{E}$ auquel on a ajouté un premier élément x), et le foncteur : $\mathcal{C}(x \cup \mathcal{E}) \to \mathcal{C}$ que nous noterons Im :

$$A \in \mathcal{C}(x \cup \mathcal{E}) \implies \mathrm{Im}[A(x) \to \prod_{a \in \mathcal{E}} A(a)] = \mathrm{Im}\, A \in \mathcal{C}$$

$$\varphi : A \to B \implies \mathrm{Im}\, \varphi : \mathrm{Im}\, A \to \mathrm{Im}\, B \qquad .$$

On peut construire les dérivées à droite $r^n\, \mathrm{Im}$, $n \geq 0$, d'après la proposition 1.3. Par composition avec le foncteur de restriction : $\mathcal{C}(x \cup \mathcal{E}) \to \mathcal{C}(\mathcal{E})$, Γ (défini par 3.2) devient un foncteur : $\mathcal{C}(x \cup \mathcal{E}) \to \mathcal{C}$. On prouve que :

$$r^n \Gamma = r^n\, \mathrm{Im} , \quad n \geq 0 \quad \text{et en particulier} \quad \Gamma = r^0\, \mathrm{Im} \qquad .$$

4. Foncteur "cosections" L sur $\mathcal{C}(\mathcal{E})$.

Nous allons définir dualement un foncteur cosections L sur $\mathcal{C}(\mathcal{E})$.

Considérons l'ordre de $\mathcal{E}$ dans un point y , obtenu en ajoutant un dernier élément y à $\mathcal{E}$: $\mathcal{E} \cup y$. Comme $\mathcal{C}(y) = \mathcal{C}$, un morphisme k de $A \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ dans $S \in \mathcal{C}(y)$ est un élément k de $\prod_{a \in \mathcal{E}} \mathrm{Hom}(A(a)\, ;\, S)$ tel que $k_b \cdot p_{ab} = k_a$.

DÉFINITION. - Soit $\eta : \mathcal{E} \prec y$ un dernier élément de $\mathcal{E}$. Appelons foncteur cosections L , ou foncteur image directe par η , un foncteur qui fait correspondre :

à chaque objet $A \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$, un objet de $\mathcal{C}$ noté LA ou ηA : objet des cosections de A , et un morphisme p^A au-dessus de η : $A \to LA = \eta A$ (§ 2)

à chaque morphisme $f : A \to B$ dans $\mathcal{C}(\mathcal{E})$, un morphisme Lf ou ηf : $LA \to LB$ dans $\mathcal{C}$, tel que le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{p^A} & LA = \eta A \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Lf = \eta f} \\ B & \xrightarrow{p^B} & LB = \eta B \end{array}$$

soit commutatif, de telle sorte que la condition suivante soit vérifiée :

Tout morphisme $A \to S$ de $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ dans $\mathcal{C}(y) = \mathcal{C}$, au-dessus de η a une factorisation unique par p^A : $A \to LA \to S$, autrement dit, le morphisme induit par p^A :

$$\mathrm{Hom}(LA\ ;\ S) \equiv \mathrm{Hom}(\eta A\ ;\ S) \xrightarrow{p^A} \prod_{a\in\mathcal{E}} \mathrm{Hom}(A(a)\ ;\ S)$$

est un <u>monomorphisme dont l'image soit exactement formée des morphismes de</u> A <u>dans</u> S <u>au-dessus de</u> η :

$$\mathrm{Hom}_\eta(A\ ;\ S) = \mathrm{Hom}(\eta A\ ;\ S) \quad .$$

Un tel foncteur, s'il existe, est unique à un automorphisme près de $\mathcal{C}$, et si E_a est un objet coélémentaire de $\mathcal{C}(\mathcal{E})$: $LE_a = E_a(a)$. Nous allons démontrer la proposition suivante :

PROPOSITION 4. - Soient $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne avec sommes directes, et $\mathcal{E}$ un ensemble ordonné. Il existe sur $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ un foncteur cosections L (définition ci-dessus). Ce foncteur L est additif et exact à droite.

PREUVE. - Supposons la catégorie $\mathcal{C}$ additive, et soit, pour tout couple ordonné $a < b$ de $\mathcal{E}$: $A^*(a\ ,\ b) = A(a)$. On peut alors interpréter simplement les conditions que doit vérifier k en posant :

$$\delta^* :\ \prod_{a\in\mathcal{E}} \mathrm{Hom}(A(a)\ ;\ S) \xrightarrow{\delta^*_S} \prod_{\substack{a,b \\ a<b}} \mathrm{Hom}(A^*(a\ ,\ b)\ ;\ S)$$

$$(\delta^*_S\ k)_{a,b} = k_b \cdot p_{ab} - k_a$$

k définit un morphisme de A dans S si et seulement si $\delta_S^* k = 0$. Si les sommes directes existent dans $\mathcal{C}$, on a :

$$\prod_{a \in \mathcal{E}} \mathrm{Hom}(A(a) \; ; S) = \mathrm{Hom}(\bigoplus_{a \in \mathcal{E}} A(a) \; ; S) \xrightarrow{\delta_s^*} \mathrm{Hom}(\bigoplus_{\substack{a,b \\ a<b}} A^*(a , b) \; ; S)$$

$$= \prod_{\substack{a,b \\ a<b}} \mathrm{Hom}(A^*(a , b) \; ; S)$$

δ_s^* est induit par un morphisme ∂ indépendant de S :

$$\bigoplus_{\substack{a,b \\ a<b}} A^*(a , b) \xrightarrow{\partial} \bigoplus_{a \in \mathcal{E}} A(a)$$

ainsi défini : ∂ est la somme des morphismes $\partial_{a,b}$ où $\partial_{a,b}$ est la "composante" de ∂ induite sur $A^*(a , b)$:

$$\partial_{a,b} = 1_{A(b)} \cdot p_{ab} - 1_{A(a)} \qquad \partial = \oplus \, \partial_{a,b}$$

autrement dit, $\partial_{a,b}$ applique $A^*(a , b)$ dans $A(b) \oplus A(a) \subset \bigoplus_{a \in \mathcal{E}} A(a)$ par p_{ab} dans $A(b)$ et moins l'identité dans $A(a)$.

Lorsque $\mathcal{C}$ est une sous-catégorie ([7], p. 137) de la catégorie $\mathcal{G}$ des groupes abéliens, si $\alpha(a , b) \in A^*(a , b)$:

$$\partial\alpha(a , b) = p_{ab} \, \alpha(a , b) - \alpha(a , b) \qquad .$$

Si la catégorie $\mathcal{C}$ est abélienne, définissons $LA = \mathrm{Coker}\, \partial$.

La suite

$$\bigoplus_{\substack{a,b \\ a<b}} A^*(a , b) \xrightarrow{\partial} \bigoplus_{a \in \mathcal{E}} A(a) \to LA \to 0$$

est exacte. Il en résulte que la suite

$$0 \to \mathrm{Hom}(LA\ ;\ S) \to \mathrm{Hom}(\bigoplus_{a\in\mathcal{E}} A(a)\ ;\ S) \xrightarrow{\delta^*} \mathrm{Hom}(\bigoplus_{\substack{a,b\\ a\prec b}} A^*(a\ ,\ b)\ ;\ S)$$

est aussi exacte. Donc un élément

$$k \in \mathrm{Hom}(\bigoplus_{a\in\mathcal{E}} A(a)\ ;\ S) = \prod_{a\in\mathcal{E}} \mathrm{Hom}(A(a)\ ;\ S)$$

est un morphisme de A dans S si et seulement s'il se laisse factoriser par LA :

$$k \in \mathrm{Ker}\ \delta^* \iff k \in \mathrm{Hom}(LA\ ;\ S) \quad .$$

A un morphisme $f : A \to B$, la suite exacte précédente fait correspondre un morphisme $Lf : LA \to LB$. L est donc un foncteur covariant de $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ dans $\mathcal{C}$, et l'on vérifie aisément que L est <u>exact à droite</u>. On a de plus :

$$L \bigoplus_j A_j = \bigoplus_j LA_j \quad .$$

Lorsque $\mathcal{C}$ est une sous-catégorie de la catégorie des groupes abéliens, on peut donner de LA une définition directe duale de celle de 4.1 :

LA <u>est le quotient de</u> $\bigoplus_{a\in\mathcal{E}} A(a)$ <u>par le sous-groupe engendré par les</u> $\alpha(a) - p_{ab}\,\alpha(a)$ (où $\alpha(a) \in A(a)$).

5. <u>Cas particuliers et exemples</u>.

5.1. – <u>L'ensemble ordonné $\mathcal{E}$ a un premier ou un dernier élément</u>. – La proposition suivante est évidente, vu les définitions des foncteurs Γ et L.

PROPOSITION 5.1. – Si l'ensemble ordonné $\mathcal{E}$ a un <u>premier</u> élément x_0, le foncteur Γ fait correspondre à $A \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$, l'objet $A(x_0) \in \mathcal{C}$, et au morphisme $f : A \to B$, le morphisme $f_{x_0} : A(x_0) \to B(x_0)$. Donc Γ est <u>exact</u>. Si $\mathcal{E}$ a un <u>dernier</u> élément y_0, le foncteur L fait correspondre à $A \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$, l'objet $A(y_0) \in \mathcal{C}$, et à $f : A \to B$, $f_{y_0} : A(y_0) \to B(y_0)$. Alors L est <u>exact</u>.

5.2. – <u>Ordre trivial</u>. – Un ensemble ordonné trivial est un ensemble ordonné dont les seules relations d'ordre sont les identités : $a \prec a$. Un élément, $A \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ est alors simplement une collection d'objets de $\mathcal{C}$ indexés par $\mathcal{E}$, et

$$\Gamma A = \prod_{a\in\mathcal{E}} A(a)\ , \qquad LA = \bigoplus_{a\in\mathcal{E}} A(a) \quad .$$

La propriété d'exactitude de L dans ce cas est l'axiome AB 3 de [7] : une somme directe de monomorphismes est un monomorphisme. La propriété d'exactitude de Γ dans ce cas est l'axiome AB 3^* de [7] : un produit direct d'épimorphismes est un épimorphisme.

5.3. - Limites directe et inverse. - Il est clair que lorsque $\mathcal{E}$ est filtrant à droite, LA = limite directe $\{A(a) , p_{ab}\}$ au sens usuel, lorsque $\mathcal{E}$ est filtrant à gauche, ΓA = limite inverse $\{A(a) , p_{ab}\}$ au sens usuel.

5.4. - Soit $\mathcal{O}$ l'ensemble des ouverts d'un espace topologique X, ordonné par $0 < 0'$ si $0 \supset 0'$. $\mathcal{C}(\mathcal{O})$ est la catégorie des préfaisceaux sur X à valeurs dans $\mathcal{C}$, et $\mathcal{C}(\mathcal{O}^*)$ celle des antifaisceaux. Si R est un recouvrement ouvert de X et $\mathcal{R}$ l'ensemble des ouverts de X contenus dans les ouverts de $\mathcal{R}$, les foncteurs $\Gamma_{\mathcal{R}}$ et $L_{\mathcal{R}}$, composés du foncteur restriction : $\mathcal{C}(\mathcal{O}) \to \mathcal{C}(\mathcal{R})$ et des foncteurs Γ et L sur $\mathcal{R}$ sont les foncteurs sections et cosections sur le recouvrement R des préfaisceaux sur X.

De même, $\Gamma_{\mathcal{R}^*}$ et $L_{\mathcal{R}^*}$ composés de $\mathcal{C}(\mathcal{O}^*) \to \mathcal{C}(\mathcal{R}^*)$ et des foncteurs Γ et L sur $\mathcal{R}^*$ sont les foncteurs sections et cosections sur le recouvrement R des antifaisceaux sur X.

6. Morphismes et connexion.

6.1. - Soient $\mathcal{E}'$, $\mathcal{E}''$ deux parties de $\mathcal{E}$, $\Gamma_{\mathcal{E}'}$, $L_{\mathcal{E}'}$, $\Gamma_{\mathcal{E}''}$, $L_{\mathcal{E}''}$ leurs foncteurs sections et cosections. A chaque $A \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ on peut faire correspondre ses restrictions $A|\mathcal{E}'$ et $A|\mathcal{E}''$ à $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{E}''$, et considérer ainsi $\Gamma_{\mathcal{E}'}$ et $\Gamma_{\mathcal{E}''}$ comme des foncteurs sur $\mathcal{C}(\mathcal{E})$. Alors, une inclusion $\mathcal{E}' \supset \mathcal{E}''$, détermine les transformations naturelles (de foncteurs sur $\mathcal{C}(\mathcal{E})$) :

$$\mathcal{E}' \supset \mathcal{E}'' : \Gamma_{\mathcal{E}'} \to \Gamma_{\mathcal{E}''} \qquad L_{\mathcal{E}'} \leftarrow L_{\mathcal{E}''} \quad .$$

Soient maintenant $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$ deux ensembles ordonnés, ρ un ordre de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'$ (§ 2), $A \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$, $A' \in \mathcal{C}(\mathcal{E}')$ et f un morphisme de A dans A' au-dessus de ρ, c'est-à-dire un objet de $\mathcal{C}(\mathcal{E} \cup \mathcal{E}')$ induisant A sur $\mathcal{E}$ et A' sur $\mathcal{E}'$.

Pour tout $a \in \mathcal{E}$, désignons par ρa l'ensemble des $a' \in \mathcal{E}'$ tels que $a < a'$, et de la même façon, pour tout $a' \in \mathcal{E}'$, désignons par $\rho^{-1} a'$ l'ensemble des $a \in \mathcal{E}$ tels que $a < a'$ (ces ensembles peuvent être vides). Si $a < b$, $\rho a \supset \rho b$, et si $a' < b'$, $\rho^{-1} a' \supset \rho^{-1} b'$.

Supposons $\mathcal{C}$ abélienne et désignons par $\rho^{-1} A'(a)$ <u>l'objet</u> $\Gamma_{\rho a} A'$ des sections de la restriction de A' à ρa <u>si</u> $\rho a \neq \emptyset$, et <u>l'objet nul si</u> $\rho a = \emptyset$.

Les $\rho^{-1} A'(a)$ forment un objet de $\mathcal{C}(\mathcal{E})$: <u>l'image inverse de</u> A' <u>par</u> ρ, et tout morphisme f de A dans A' au-dessus de ρ se factorise canoniquement en un morphisme de A dans $\rho^{-1} A'$ dans $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ et le morphisme de $\rho^{-1} A'$ dans A'. On a donc :

$$\mathrm{Hom}_{\rho}(A \; ; A') = \mathrm{Hom}(A \; ; \rho^{-1} A') \qquad .$$

De la même façon, si l'on pose $\rho A(a') = L_{\rho^{-1} a'} A$, les $\rho A(a')$ forment un objet de $\mathcal{C}(\mathcal{E}')$: <u>l'image directe de</u> A <u>par</u> ρ et :

$$\mathrm{Hom}_{\rho}(A \; ; A') = \mathrm{Hom}(\rho A \; ; A') \qquad .$$

Les morphismes canoniques : $\Gamma_{\mathcal{E}'} A' \to \Gamma_{\rho a} A'$ déterminant, en vertu de la propriété universelle de Γ, un morphisme canonique :

$$\Gamma_{\mathcal{E}'} A' \to \Gamma_{\mathcal{E}} \rho^{-1} A' \qquad .$$

On a de même

$$L_{\mathcal{E}'} \rho A \to L_{\mathcal{E}} A \qquad .$$

6.2. <u>Connexion et théorème d'isomorphisme.</u>

DÉFINITION. - Un ensemble ordonné $\mathcal{E}$ est dit <u>connexe</u> si, quels que soient a, $b \in \mathcal{E}$, il existe une suite d'éléments : $c_0, c_1, \dots, c_n$ de $\mathcal{E}$, tels que $c_0 = a$, $c_n = b$, et qu'entre deux éléments consécutifs c_i, c_{i+1}, il y ait une relation d'ordre : $c_i < c_{i+1}$ ou $c_{i+1} < c_i$.

EXEMPLE. - Un ensemble ordonné filtrant (à gauche ou à droite) est connexe. Il est clair que si $\mathcal{E}$ est connexe, il existe un morphisme canonique :

$$\Gamma A \to LA \qquad .$$

THÉORÈME d'isomorphisme 6.2. - Si ρ est un ordre (§ 2) de l'ensemble ordonné $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'$ tel que pour tout $a' \in \mathcal{E}'$, $\rho^{-1} a'$ (§ 6.1) soit une partie non vide connexe de $\mathcal{E}$, le morphisme canonique (§ 6.1) : $\Gamma_{\mathcal{E}'} A' \to \Gamma_{\mathcal{E}} \rho^{-1} A'$ est un isomorphisme : $\Gamma_{\mathcal{E}'} A' \cong \Gamma_{\mathcal{E}} \rho^{-1} A'$. Dualement, si pour tout $a \in \mathcal{E}$, a est une partie non vide connexe, le morphisme canonique : $L_{\mathcal{E}'} \rho A \to L_{\mathcal{E}} A$ est un isomorphisme $L_{\mathcal{E}'} \rho A \equiv L_{\mathcal{E}} A$.

6.3. – Foncteur restriction. – Soient $\mathcal{R}$ une partie de l'ensemble ordonné $\mathcal{E}$, γ le foncteur de restriction : $\mathcal{C}(\mathcal{E}) \to \mathcal{C}(\mathcal{R})$ qui à chaque objet $A \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ fait correspondre sa restriction $\gamma A = A|\mathcal{R}$. γ est un foncteur exact, mais si I est injectif de $\mathcal{C}(\mathcal{E})$, sa restriction γI n'est pas en général un objet injectif de $\mathcal{C}(\mathcal{R})$, ni même un objet $\Gamma_{\mathcal{R}}$-acyclique ; si P est projectif, γP n'est pas en général $L_{\mathcal{R}}$-acyclique. Mentionnons deux cas où il en est ainsi :

PROPOSITION 6.3A. – Si pour chaque $a \in \mathcal{E}$, l'ensemble des $r \in \mathcal{R}$ tels que $r < a$ est vide ou possède un plus grand élément $\lambda(a)$ (c'est le cas par exemple si $\mathcal{R}$ est clos à droite : $c < d$ et $c \in \mathcal{R}$ entraînent $d \in \mathcal{R}$), alors A élémentaire (§ 1) $\Longrightarrow$ γA élémentaire, A injectif $\Longrightarrow$ γA injectif, et l'on a entre les dérivés à droite de $\Gamma_{\mathcal{R}}\gamma$ sur $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ et de $\Gamma_{\mathcal{R}}$ sur $\mathcal{C}(\mathcal{R})$, l'isomorphisme :

$$r^n(\Gamma_{\mathcal{R}} \circ \gamma) = (r^n \Gamma_{\mathcal{R}}) \cdot \gamma \quad .$$

Dualement, si pour chaque $a \in \mathcal{E}$, l'ensemble des $r \in \mathcal{R}$ tels que $a < r$ est vide ou possède un plus petit élément (c'est le cas si $\mathcal{R}$ est clos à gauche), alors : A coélémentaire $\Longrightarrow$ γA coélémentaire, A projectif $\Longrightarrow$ γA projectif, et l'on a, entre les dérivés à gauche de $L_{\mathcal{R}}\gamma$ sur $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ et de $L_{\mathcal{R}}$ sur $\mathcal{C}(\mathcal{R})$, l'isomorphisme :

$$\ell_n(L_{\mathcal{R}} \cdot \gamma) = (\ell_n L_{\mathcal{R}}) \cdot \gamma \quad .$$

REMARQUE. – Si ρ est un ordre de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'$ et ρ^{-1} le foncteur $\mathcal{C}(\mathcal{E}') \Longrightarrow \mathcal{C}(\mathcal{E})$ défini au § 6.1, il en résulte que :

$$(r^n \rho^{-1})\, A'(a) = (r^n \Gamma_{\rho a})\,(A'|\rho a) \quad .$$

De même pour le foncteur ρ de $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ dans $\mathcal{C}(\mathcal{E}')$:

$$(\ell_n \rho)\, A(a') = (\ell_n L_{\rho^{-1} a'})\,(A|\rho^{-1} a') \quad .$$

PROPOSITION 6.3B. – Soient $\mathcal{E}$ filtrant à gauche, $\mathcal{E}'$ cofinal, s le foncteur restriction $\mathcal{C}(\mathcal{E}) \to \mathcal{C}(\mathcal{E}')$, $A \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$: $(r^n \Gamma_{\mathcal{E}})\, A = (r^n \Gamma_{\mathcal{E}'})\, sA$. Si $\mathcal{E}$ est filtrant à droite, $\mathcal{E}'$ cofinal : $(\ell_n L_{\mathcal{E}})\, A = (\ell_n L_{\mathcal{E}'})\, sA$.

7. Homologie et cohomologie d'un ensemble ordonné.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne avec sommes directes dont tout objet est image d'un objet projectif. On peut définir pour tout ensemble ordonné $\mathcal{E}$, les foncteurs $\ell_n L$, dérivés gauches de L, de $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ dans $\mathcal{C}$. Si $A \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$, $\ell_n LA \in \mathcal{C}$ est le n-ième objet d'homologie $H_n(\mathcal{E} ; A)$ de $\mathcal{E}$ relativement à A.

Dualement, soit $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne avec produits dont tout objet se plonge dans un injectif. On peut définir les dérivés à droite du foncteur Γ de $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ dans $\mathcal{C}$. Si $A \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$, $r^n \Gamma A$ est le n-ième objet de cohomologie $H^n(\mathcal{E} ; A)$ de $\mathcal{E}$ relativement à A.

Suites exactes. - Les $\ell_n L$ sont des foncteurs homologiques ([7] p. 140, 143), les $r^n \Gamma$, des foncteurs cohomologiques. A une suite exacte $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ d'objets de $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ correspondent donc des suites exactes d'homologie et de cohomologie :

$$\left\{\begin{array}{l} \to H_n(\mathcal{E} ; A') \to H_n(\mathcal{E} ; A) \to H_n(\mathcal{E} ; A'') \to H_{n-1}(\mathcal{E} ; A') \to \cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \to H_1(\mathcal{E} ; A'') \to LA' \to LA \to LA'' \to 0 \qquad . \\ \\ 0 \to \Gamma A' \to \Gamma A \to \Gamma A'' \to H^1(\mathcal{E} ; A') \to \cdots \to H^n(\mathcal{E} ; A) \to H^n(\mathcal{E} ; A'') \to H^{n+1}(\mathcal{E} ; A') \to \cdots \end{array}\right.$$

8. Résolutions standards dans $\mathcal{C}(\mathcal{E})$.

8.1. - Soient $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne avec produits, σ le foncteur qui à chaque objet $A \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ fait correspondre l'objet $\sigma A \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ ainsi défini :

$$\sigma A = \prod_{b \in \mathcal{E}} A^b$$

où A^b est l'objet élémentaire (§ 1) défini par $A^b(b) = A(b)$.

$$\sigma \sigma A = \sigma^2 A = \prod_{\substack{b,c \\ b<c}} A^{b,c}$$

où $A^{b,c} \equiv A^c$ si $b < c$.

$$\Gamma \sigma^2 A = \prod_{\substack{a,b \\ a<b}} A(a , b) \qquad (A(a , b) = A(b)) \qquad .$$

La suite exacte de définition de ΓA suggère la considération de la résolution suivante de A, Γ-acyclique, dans $\mathcal{C}(\mathcal{E})$, ou Γ-résolution standard de A

$$0 \to A \to \sigma A \xrightarrow{\delta_0} \sigma^2 A \xrightarrow{\delta_1} \cdots \sigma^{n+1} A \xrightarrow{\delta_n} \sigma^{n+2} A \to \cdots$$

où

$$\sigma^{n+1} A = \prod_{a_0 < a_1 < \cdots < a_n} A^{a_0, a_1, \ldots, a_n}$$

avec $A^{a_0, a_1, \ldots, a_n} \equiv A^{a_n}$ si $a_0 < a_1 < \cdots < a_n$, et δ_n est défini par le produit de ses composantes appliquées dans chaque $A^{a_0, a_1, \ldots, a_n}$:

$$\delta_{n, A^{a_0, a_1, \ldots, a_{n+1}}} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \, 1_{A^{a_0, a_1, \ldots, \hat{a}_i, \ldots, a_{n+1}}}$$

$$+ (-1)^{n+1} p_{a_n, a_{n+1}} \, 1_{A^{a_0, a_1, \ldots, a_n}} .$$

Cette résolution est acyclique dans $\mathcal{C}(\mathcal{E})$, ce qui veut dire qu'elle l'est en chaque $b \in \mathcal{E}$, et les objets de cohomologie de $\mathcal{E}$ relativement à $A \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ sont les objets de cohomologie du complexe dans $\mathcal{C}$ obtenu en appliquant Γ à la Γ-résolution standard de A définie ci-dessus, soit, en notant

$$C^n(\mathcal{E} \; ; A) = \Gamma\sigma^{n+1} A = \prod_{a_0 < a_1 \cdots < a_n} A(a_0 , a_1 , \ldots, a_n)$$

les cochaînes de degré n de $\mathcal{E}$ relativement à A du complexe (qui est un foncteur résolvant pour Γ : ([7] p. 149).

$$0 \to C^0(\mathcal{E} \; ; A) \xrightarrow{\delta_0} C^1(\mathcal{E} \; ; A) \xrightarrow{\delta_1} \cdots \to C^n(\mathcal{E} \; ; A) \xrightarrow{\delta_n} C^{n+1}(\mathcal{E} \; ; A) \to \cdots .$$

8.2. - Dualement, on considère le foncteur τ qui à chaque $A \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ fait correspondre l'objet $\tau A \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$;

$$\tau A = \bigoplus_{b \in \mathcal{E}} A_b$$

où A_b est l'objet coélémentaire (§ 1) défini par $A_b(b) = b$.
D'où l'introduction naturelle de la L-résolution standard de A

$$\cdots \to \tau^{n+1} A \xrightarrow{\partial_n} \tau^n A \to \cdots \xrightarrow{\partial_1} \tau A \to A \to 0$$

avec

$$\tau^{n+1} A = \bigoplus_{a_0 < a_1 \cdots < a_n} A_{a_0, \ldots, a_n}$$

avec $A_{a_0, a_1, \ldots, a_n} = A_{a_0}$ et ∂_n, défini par la somme directe de ses composantes sur chaque $A_{a_1, a_2, \ldots, a_n}$:

$$\partial_{n, A_{a_0, a_1, \ldots, a_n}} = 1_{A_{a_1 \ldots a_n}} \cdot p_{a_0 a_1} + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \, 1_{A_{a_0, \ldots, \hat{a}_i, \ldots, a_n}} .$$

Cette résolution de A par des objets L-acycliques, est acyclique dans $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ et les objets d'homologie de $\mathcal{E}$ relativement à $A \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ sont les objets d'homologie du complexe dans $\mathcal{C}$ obtenu en appliquant L à la L-résolution standard de A définie ci-dessus, soit, en notant

$$C_n(\mathcal{E} ; A) = L\tau^{n+1} A = \bigoplus_{a_0 < a_1 \cdots < a_n} A^*(a_0 , a_1 , \ldots , a_n)$$

les chaînes de degré n de $\mathcal{E}$ relativement à A du complexe :

$$0 \leftarrow C_0(\mathcal{E} ; A) \xleftarrow{\partial_1} C_1(\mathcal{E} ; A) \leftarrow \cdots C_{n-1}(\mathcal{E} ; A) \xleftarrow{\partial_n} C_n(\mathcal{E} ; A) \leftarrow \cdots$$

qui est un foncteur résolvant pour L ([7], p. 149).

8.3. - Application : homologie et cohomologie de l'ensemble ordonné N des entiers ≥ 0 et des ensembles filtrants de type dénombrable.

D'après la proposition 6.3B, l'homologie et la cohomologie d'un ensemble filtrant de type dénombrable sont les mêmes que celle d'un ensemble cofinal que l'on peut choisir isomorphe à N.

Or, on a dans ce cas des foncteurs résolvants très simples de Γ_{N^*} et L_N :

si $A \in \mathcal{C}(N^*)$,

$$0 \to \Gamma_{N^*} A \to \prod_n A(n) \xrightarrow{\delta} \prod_n A(n) \to 0 \to 0 \dots$$

avec, si $\alpha = \{\alpha_n\}$, $(\delta\alpha)_n = p_{n+1,n}\,\alpha_{n+1} - \alpha_n$;

si $A \in \mathcal{C}(N)$,

$$\dots 0 \to \bigoplus_n A(n) \xrightarrow{\partial} \bigoplus_n A(n) \to LA \to 0$$

avec, si $\alpha = \Sigma\,\alpha_n$, $\partial\alpha = \Sigma\,(\alpha_n - p_{n-1,n}\,\alpha_{n-1})$.

Si A est un objet élémentaire de $\mathcal{C}(N^*)$, δ est un épimorphisme (c'est d'ailleurs un épimorphisme si tous les $p_{n+1,n}$ sont des épimorphismes).

Si A est un objet coélémentaire de $\mathcal{C}(N)$, ∂ est un monomorphisme.

Les complexes sont donc bien acycliques dans le premier cas pour les produits d'objets élémentaires, dans le second cas pour les sommes d'objets coélémentaires. On a donc :

$$r^n(N^* \,;\, A) = 0 \quad \text{si} \quad n \geqslant 2$$

$$r^1(N^* \,;\, A) = H^1(N^* \,;\, A) = \prod_{n\in N} A(n) / \delta \prod_{n\in N} A(n)$$

$$\ell_n(N \,;\, A) = 0 \quad \text{si} \quad n \geqslant 2$$

$$\ell_1(N \,;\, A) = H_1(N \,;\, A) = \operatorname{Ker}[\bigoplus_n A(n) \xrightarrow{\partial} \bigoplus_n A(n)]$$

$H^1(N^* \,;\, A)$ avait déjà été utilisé par STEENROD ([11] p. 845) et nous le retrouverons au § 13.

9. Foncteurs canoniques entre ensembles ordonnés et schémas simpliciaux.

9.1. - Rappelons qu'un <u>schéma simplicial</u> M ([6] p. 37) est un ensemble muni de la structure définie par un ensemble de parties finies, appelées simplexes, de telle sorte que toute partie finie non vide d'un simplexe soit encore un simplexe.

Un schéma simplicial M est <u>ordonné</u> s'il est muni d'une relation d'ordre telle que tout simplexe soit totalement ordonné.

Les schémas simpliciaux forment une <u>catégorie</u> $\mathbb{S}$: un morphisme ou <u>application simpliciale</u> de M dans M' est une application qui transforme tout simplexe de M en simplexe de M'.

Les schémas simpliciaux ordonnés forment une <u>catégorie</u> $\mathbb{S}_0$ dans laquelle les morphismes sont les <u>applications simpliciales croissantes</u>. $\mathbb{S}_0$ est naturellement plongée dans $\mathbb{S}$.

9.2. - <u>Foncteurs</u> α, $\bar{\alpha}$ <u>et</u> β. - A tout schéma simplicial M faisons correspondre l'ensemble ordonné αM dont les éléments sont les simplexes de M et la relation d'ordre l'inclusion : si $s, t \in M$, $s \prec t \iff s \subset t$. Si f est une application simpliciale de M dans M', αf est une application croissante de αM dans $\alpha M'$. α <u>est donc un foncteur de la catégorie</u> $\mathbb{S}$ <u>dans la catégorie</u> $\mathcal{O}$ des ensembles ordonnés et applications croissantes.

A tout ensemble ordonné $\mathcal{E}$ faisons correspondre le schéma simplicial ordonné $\beta\mathcal{E}$ obtenu en appelant simplexe de $\mathcal{E}$ toute suite finie totalement ordonnée d'éléments distincts de $\mathcal{E}$: $a_0 \prec a_1 \dots \prec a_n$. Si g est une application croissante de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'$, βg est une application simpliciale ordonnée de $\beta\mathcal{E}$ dans $\beta\mathcal{E}'$: β <u>est donc un foncteur de la catégorie</u> $\mathcal{O}$ <u>dans la catégorie</u> $\mathbb{S}_0$.

Le composé $\beta\alpha : \mathbb{S} \to \mathbb{S}_0$ n'est autre que la <u>subdivision barycentrique. Nous nous restreindrons dans ce qui suit à</u> $\mathbb{S}_0$.

Si M_n est l'ensemble des simplexes de degré n de $M \in \mathbb{S}_0$, c'est-à-dire des simplexes comptant $n+1$ éléments de M :

$$\alpha M = \bigcup_{n \geqslant 0} M_n \quad .$$

Soit $\Delta_n = (0, 1, 2, \dots, n)$ la suite des $(n+1)$ premiers nombres entiers $\geqslant 0$. $\Delta_n \in \mathcal{O}$, et il est d'usage de noter encore Δ_n le schéma simplicial ordonné $\beta\Delta_n$. Désignons par

$$\mathfrak{M}_n = \mathrm{Hom}_{\mathbb{S}_0}(\Delta_n, M)$$

l'ensemble des simplexes singuliers de degré n de M ([6], p. 39), c'est-à-dire des applications croissantes au sens large) de Δ_n dans les simplexes de M, et par

$$\overline{\alpha}M = \bigcup_{n\geqslant 0} \mathfrak{M}_n \quad .$$

Ordonnons $\overline{\alpha}M$ par :

$$\sigma_m \in \mathfrak{M}_m ,\ \sigma_n \in \mathfrak{M}_n ,\ \sigma_m \prec \sigma_n \iff \left\{ \begin{array}{l} \text{il existe au moins une} \\ \text{application croissante} \\ \varphi_{mn} \text{ de } \Delta_m \text{ dans } \Delta_n \\ \text{telle que } \sigma_n \cdot \varphi_{mn} = \sigma_m \end{array} \right\} \quad .$$

Si f est une application simpliciale ordonnée de M dans M' , $\overline{\alpha}f$ est une application croissante de $\overline{\alpha}M$ dans $\overline{\alpha}M'$: $\overline{\alpha}$ est donc un foncteur de $\mathcal{S}_0$ dans $\mathcal{O}$.

A tout $s_n \in M_n$ correspond une application croissante unique σ_n de Δ_n sur s_n d'où une injection : $M_n \to \mathfrak{M}_n$ et

$$\alpha M \to \overline{\alpha}M \quad .$$

Réciproquement, à tout simplexe singulier σ correspond un simplexe $\lambda(\sigma)$ de M : l'image de σ . Dans l'ensemble ordonné $\overline{\alpha}M$, λ est une "rétraction" de $\overline{\alpha}M$ sur le sous-ensemble αM (λ est croissante, $\lambda(\sigma) \prec \sigma$, λ = identité sur αM). λ est une transformation naturelle de foncteurs (sur $\mathcal{S}_0$) : $\overline{\alpha} \to \alpha$.

9.3. - Conservation de l'homologie et de la cohomologie par β . - Soit, pour $i = 0 , 1 , 2 , \ldots , n$, f_i l'application strictement croissante de Δ_{n-1} dans Δ_n qui ne prend pas la valeur i , et F_i l'application (i-ième face) de $\mathfrak{M}_n$ dans $\mathfrak{M}_{n-1}$ (notation ci-dessus) définie par : $F_i\,\sigma_n = \sigma_n\, f_i$. On a donc $F_i\,\sigma_n \prec \sigma_n$, et F_i applique M_n dans M_{n-1} .

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne. Un système de coefficients covariants dans $\mathcal{C}$ sur le schéma simplicial $M \in \mathcal{S}$ est, par définition, un objet de $\mathcal{C}(\alpha M)$, un système contravariant, un élément de $\mathcal{C}^*(\alpha M) = \mathcal{C}(\alpha M^*)$.

En posant $A(\sigma) = A(\lambda\sigma)$, pour $\sigma \in \overline{\alpha}M$, on étend aux simplexes singuliers, c'est-à-dire à $\overline{\alpha}M$, le système de coefficients : cela revient indifféremment à prendre $\lambda^{-1}A$ image inverse de A par l'ordre λ de $\overline{\alpha}M$ dans αM , défini par la rétraction λ , ou jA , image directe de A par l'ordre j de αM dans $\overline{\alpha}M$ que détermine l'inclusion.

Les objets de cohomologie de $M \in \mathcal{S}_0$ relativement à un système covariant $A \in \mathcal{C}(\alpha M)$ sont par définition les objets de cohomologie du complexe des cochaînes singulières de M relativement à A :

$$\prod_{\sigma_0 \in \mathfrak{M}_0} A(\sigma_0) \xrightarrow{\delta_0} \prod_{\sigma_1 \in \mathfrak{M}_1} A(\sigma_1) \xrightarrow{\delta_1} \cdots \prod_{\sigma_n \in \mathfrak{M}_n} A(\sigma_n) \xrightarrow{\delta_n} \prod_{\sigma_{nn} \in \mathfrak{M}_{nn}} A(\sigma_{nn}) \to \cdots$$

où la composante de δ_n appliquée dans $A(\sigma_{n+1})$ est :

$$\delta_{n, A(\sigma_{n+1})} = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \, p_{F_i\sigma_{n+1}, \sigma_{n+1}} \, 1_{A(F_i\sigma_{n+1})}$$

$p_{F_i\sigma_{n+1}, \sigma_{n+1}}$ est le morphisme de A : $A(F_i\,\sigma_{n+1}) \to A(\sigma_{n+1})$.

$\prod_{\sigma_n \in \mathfrak{M}_n} A(\sigma_n) = C^n(M \,;\, A)$ est l'objet des <u>cochaînes singulières de degré</u> n <u>de</u> M <u>relativement à</u> A .

Dualement, <u>les objets</u> d'homologie <u>de</u> $M \in \mathcal{S}_0$ <u>relativement à un système</u> contravariant $A^* \in \mathcal{C}(\alpha M^*)$ sont ceux du <u>complexe des chaînes singulières de</u> M <u>relativement à</u> A :

$$\cdots \to \bigoplus_{\sigma_n \in \mathfrak{M}_n} A^*(\sigma_n) \xrightarrow{\partial_n} \bigoplus_{\sigma_{n-1} \in \mathfrak{M}_{n-1}} A^*(\sigma_{n-1}) \cdots \to \bigoplus_{\sigma_1 \in \mathfrak{M}_1} A^*(\sigma_1) \to \bigoplus_{\sigma_0 \in \mathfrak{M}_0} A^*(\sigma_0)$$

avec la composante de ∂_n définie sur $A^*(\sigma_n)$:

$$\partial_{n, A^*(\sigma_n)} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \, 1_{A^*(F_i\sigma_n)} \, p_{\sigma_n, F_i\sigma_n}$$

$\bigoplus_{\sigma_n \in \mathfrak{M}_n} A^*(\sigma_n)$ est l'objet des chaînes singulières de degré n de M relativement à A .

Si $\mathcal{E}$ est un ensemble ordonné, un objet $A \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ définit un système covariant sur le schéma simplicial ordonné associé $\beta\mathcal{E}$ par

$$A(a_0\,,\, a_1\,,\, \ldots\,,\, a_n) = A(a_n) \qquad ,$$

et un système contravariant par

$$A^*(a_0\,,\, a_1\,,\, \ldots\,,\, a_n) = A(a_0) \qquad .$$

Les définitions du § 7 montrent alors que <u>les objets d'homologie et de cohomologie de</u> $\mathcal{E}$ <u>relativement à</u> A <u>sont respectivement ceux du schéma simplicial</u>

$\beta\mathcal{E}$ relativement aux systèmes de coefficients A^* et A définis par $\mathbf{A}$ sur $\beta\mathcal{E}$. Nous exprimerons cette propriété en disant que le foncteur β conserve l'homologie et la cohomologie.

9.4. - Conservation de l'homologie et de la cohomologie par α et $\bar{\alpha}$. - Partons réciproquement d'un schéma simplicial ordonné M et d'un système covariant $A \in \mathcal{C}(\alpha M)$ ou contravariant $A^* \in \mathcal{C}(\alpha M^*)$. On prouve alors aisément les isomorphismes naturels, en utilisant le théorème d'isomorphisme 6.2.

$$H^n(M ; A) = H^n(\alpha M ; A) = H^n(\bar{\alpha} M ; A)$$

$$H_n(M ; A^*) = H_n(\alpha M^* ; A^*) = H_n(\bar{\alpha} M^* ; A^*) \quad .$$

Résumons la discussion précédente :

THÉORÈME 9.4. - Avec les notations de ce § 9 :

1° Foncteur $\beta : \mathcal{O} \to \mathcal{S}_0$. - Pour chaque ensemble ordonné $\mathcal{E} \in \mathcal{O}$, β détermine deux foncteurs : $\mathcal{C}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\beta} \mathcal{C}(\beta\mathcal{E})$, $\mathcal{C}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\beta^*} \mathcal{C}(\beta\mathcal{E}^*)$ et identifie

$$H^n(\mathcal{E} ; A) = H^n(\beta\mathcal{E} ; \beta A)$$

$$H_n(\mathcal{E} ; A) = H_n(\beta\mathcal{E} , \beta^* A) \quad .$$

2° Foncteurs α, $\bar{\alpha} : \mathcal{S}_0 \to \mathcal{O}$. - α et $\bar{\alpha}$ identifient :

pour A système covariant sur le schéma simplicial ordonné M

$$H^n(M ; A) = H^n(\alpha M ; A) = H^n(\bar{\alpha} M ; A)$$

pour A^* système contravariant sur M

$$H_n(M ; A^*) = H_n(\alpha M^* ; A^*) = H_n(\bar{\alpha} M^* ; A^*) \quad .$$

Il en résulte que n'importe quel composé successif de β et de α ou $\bar{\alpha}$, en particulier la subdivision barycentrique, conserve l'homologie et la cohomologie "à coefficients".

Or, à l'aide de la formation usuelle du bord des simplexes, on ne sait définir directement sur un schéma simplicial, ni son homologie relativement à un système covariant, ni sa cohomologie relativement à un système contravariant, tandis que ces définitions sont naturelles pour un ensemble ordonné. Nous poserons donc, par définition, pour un schéma simplicial ordonné M :

si A est un système covariant sur M :

$$H_n(M ; A) = H_n(\alpha M ; A)$$

si A^* est un système contravariant :

$$H^n(M ; A^*) = H^n(\alpha M^* ; A^*)$$

et l'on prouve comme précédemment que $H_n(\alpha M ; A) = H_n(\overline{\alpha}M ; A)$ et $H^n(\alpha M^* ; A^*) = H^n(\overline{\alpha}M^* ; A^*)$.

10. Catégories de complexes.

10.1. – Soient $[a , b]$ un intervalle de l'ensemble Z des entiers $\gtrless 0$, tel que $a + 2 \leqslant b$, (a peut être $-\infty$, b peut être $+\infty$), $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne. Un complexe sur $[a , b]$ est un objet de $\mathcal{C}([a , b])$ (notation du § 1) tel que $p_{nn'} = 0$, si $n' \geqslant n + 2$, soit encore tel que $p_{n+1,n+2} \cdot p_{n,n+1} = 0$, pour tout n tel que $a \leqslant n \leqslant b - 2$. Munis des morphismes de $\mathcal{C}([a , b])$ les complexes sur $[a , b]$ forment une catégorie $\mathcal{C}_{[a,b]}$, sous-catégorie de $\mathcal{C}([a , b])$. C'est une catégorie abélienne.

NOTATIONS. – Pour abréger, nous noterons $\mathcal{C}_c = \mathcal{C}_{[-\infty,+\infty]}$, $\mathcal{C}_r = \mathcal{C}_{[0,\infty]}$, les complexes positifs, $\mathcal{C}_\ell = \mathcal{C}_{[-\infty,0]}$, les complexes négatifs.

Les objets projectifs de $\mathcal{C}_{[a,b]}$ sont les complexes $P = (P_n)$ du type suivant : soit (Q_n) , $a \leqslant n \leqslant b$ une famille d'objets projectifs de $\mathcal{C}$, et $P_a = Q_a$, $P_n = Q_{n-1} + Q_n$ si $a + 1 \leqslant n$, $p_{n,n+1}$ est un isomorphisme sur Q_n , nul sur Q_{n-1} .

Les objets injectifs sont du type suivant : si (J_n) , $a \leqslant n \leqslant b$ est une famille d'objets injectifs de $\mathcal{C}$: $I_n = J_n + J_{n+1}$ si $n + 1 \leqslant b$; $I_b = J_b$.

Dès lors, il est facile de voir que si $\mathcal{C}$ satisfait à la propriété :

(P) Tout objet est image d'un objet projectif, ou

(I) tout objet se plonge dans un objet injectif, $\mathcal{C}_{[a,b]}$ y satisfait aussi.

10.2. – Complexes doubles. – Pour des raisons de cohérence avec ce qui précède nos conventions diffèrent de celles de [5]. Si $[a , b] \times [c , d]$ est un intervalle de $\underset{\sim}{Z} \times \underset{\sim}{Z}$, nous notons $d_I^{n,m} = p_{(n,m)(n+1,m)}$ la différentielle "horizontale",

$d_{II}^{n,m} = p_{(n,m)(n,m+1)}$ la différentielle "verticale", Δ_I le premier degré, Δ_{II} le second degré, d'un complexe double de $\mathcal{C}_{[a,b]\times[c,d]}$, qui vérifient

$$d_I \cdot d_I = 0 \qquad d_{II} \cdot d_{II} = 0 \qquad d_I \cdot d_{II} = d_{II} \cdot d_I \quad .$$

Il y a isomorphisme des catégories $\mathcal{C}_{[a,b]\times[c,d]}$ et $(\mathcal{C}_{[a,b]})_{[c,d]}$. Deux morphismes homotopes dans $(\mathcal{C}_{[a,b]})_{[c,d]}$ sont homotopes au sens de l'homotopie des complexes doubles dans $\mathcal{C}_{[a,b]\times[c,d]}$.

Nous noterons donc $\mathcal{C}_{cc} = (\mathcal{C}_c)_c$, $(\mathcal{C}_\ell)_\ell = \mathcal{C}_{\ell\ell}$, etc. .

10.3. - Foncteur $\mathcal{K}$. - Supposons que dans $\mathcal{C}$ les produits infinis existent, et que π soit un foncteur exact. A chaque complexe double $A = (A^{pq})$, faisons correspondre le complexe simple $\mathcal{K}A$ défini par

a.
$$\mathcal{K}A^n = \prod_{p+q=n} A^{p,q}$$

p , q varient dans les intervalles de définition du premier et du second "degré" de A).

b.
$$\delta_n : \mathcal{K}A^n \to \mathcal{K}A^{n+1} \qquad ,$$

si $k \in \prod_{p+q=n} A^{p,q}$, et $r + s = n + 1$:

$$(\delta k)^{r,s} = d_{II}\, k^{r,s-1} + (-1)^s\, d_I\, k^{r-1,s}$$

et à chaque morphisme : $A \to B$, le morphisme $\mathcal{K}A \to \mathcal{K}B$ induit. Le foncteur $\mathcal{K}$ possède les propriétés suivantes :

1. c'est un foncteur exact,

2. c'est un invariant d'homotopie.

11. Hyperdérivés d'un foncteur composé.

11.1. - Soient $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$, $\mathcal{C}''$ trois catégories abéliennes, $F : \mathcal{C} \Longrightarrow \mathcal{C}'$ et $G : \mathcal{C}' \Longrightarrow \mathcal{C}''$ deux foncteurs additifs, A un objet de $\mathcal{C}$, $\mathcal{P}A$ et $\mathcal{J}A$ des résolutions projective et injective de A . $F\mathcal{P}A$ et $F\mathcal{J}A$ sont des complexes dans $\mathcal{C}'$. On peut en prendre, dans $\mathcal{C}'_c$ (ou indifféremment d'ailleurs dans $\mathcal{C}'_\ell$ pour $F\mathcal{P}A$ ou $\mathcal{C}'_r$ pour $F\mathcal{J}A$) des résolutions projectives et injectives :

$\mathcal{P}F\mathcal{P}A$, $\mathcal{J}F\mathcal{J}A$, $\mathcal{J}F\mathcal{P}A$, $\mathcal{P}F\mathcal{J}A$. En leur appliquant G on obtient des complexes doubles dans $\mathcal{C}^{2}$ auxquels on peut appliquer le foncteur $\mathcal{K}$.

DÉFINITION 11.1. - En utilisant les notations ci-dessus, les hyperdérivés du foncteur composé GF sont les foncteurs qui à chaque objet $A \in \mathcal{C}$ font correspondre les objets d'homologie suivants :

$$(\ell\ell_n\ GF)\ A = H^n(\mathcal{K}G\mathcal{P}F\mathcal{P}A)$$

$$(r\ell_n\ GF)\ A = H^n(\mathcal{K}G\mathcal{J}F\mathcal{P}A) \qquad n \gtrless 0$$

$$(\ell r_n\ GF)\ A = H^n(\mathcal{K}G\mathcal{P}F\mathcal{J}A) \qquad n \gtrless 0$$

$$(rr_n\ GF)\ A = H^n(\mathcal{K}G\mathcal{J}F\mathcal{J}A)$$

et à chaque morphisme : $A \to A'$, les morphismes induits.

11.2. - Propriétés des hyperdérivés.

a. Justification de la définition. - Il faut prouver que la définition est bien indépendante du double choix de résolutions. Or, si f est un morphisme : $A \to A'$ dans $\mathcal{C}$, tous les morphismes $\mathcal{P}A \to \mathcal{P}A'$ relevant f sont homotopes entre eux dans $\mathcal{C}_\ell$, donc aussi les morphismes images par F : $F\mathcal{P}A \to F\mathcal{P}A'$. Les morphismes les relevant : $\mathcal{P}F\mathcal{P}A \to \mathcal{P}F\mathcal{P}A'$ sont également homotopes entre eux, donc aussi les morphismes images par G , puis $\mathcal{K}$. On a donc un morphisme unique :

$$H^n(\mathcal{K}G\mathcal{P}F\mathcal{P}A) \to H^n(\mathcal{K}G\mathcal{P}F\mathcal{P}A') \qquad .$$

Raisonnement analogue dans les autres cas.

b. Suites exactes. - Soit $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ une suite exacte d'objets de $\mathcal{C}$. On peut en choisir des résolutions projectives ou injectives qui forment des suites exactes de complexes, qui restent exactes lorsqu'on applique le foncteur F

$$0 \to F\mathcal{P}A' \to F\mathcal{P}A \to F\mathcal{P}A'' \to 0$$

et

$$0 \to F\mathcal{J}A' \to F\mathcal{J}A \to F\mathcal{J}A'' \to 0 \qquad .$$

Dans $\mathcal{C}'_c$ (ou $\mathcal{C}'_\ell$, ou $\mathcal{C}'_r$) on peut alors choisir des résolutions des complexes précédents de telle sorte qu'aux suites exactes de complexes correspondent des suites exactes de complexes doubles, qui restent exactes lorsqu'on applique le foncteur G

$$0 \to G\mathcal{P}F\mathcal{P}A' \to G\mathcal{P}F\mathcal{P}A \to G\mathcal{P}F\mathcal{P}A'' \to 0 \text{ , etc.} \quad .$$

Le foncteur $\mathcal{K}$ étant un foncteur exact, on obtient ainsi des suites exactes de complexes :

$$0 \to \mathcal{K}G\mathcal{P}F\mathcal{P}A' \to \mathcal{K}G\mathcal{P}F\mathcal{P}A \to \mathcal{K}G\mathcal{P}F\mathcal{P}A'' \to 0 \text{ , etc.}$$

d'où des suites exactes d'homologie :

$$\dots \to (\ell\ell_n\ GF)\ A' \to (\ell\ell_n\ GF)\ A \to (\ell\ell_n\ GF)\ A''$$
$$\to (\ell\ell_{n+1}\ GF)\ A' \to \dots \text{ etc.} \quad .$$

c. Utilisation de foncteurs résolvants. - Supposons par exemple F et G exacts à droite (le même raisonnement vaut pour F et G indépendamment exacts à gauche ou à droite). Soient $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{G}$ des foncteurs résolvants ([7]) de F et G . On a l'isomorphisme

$$H^*(\mathcal{K}\mathfrak{G}\mathfrak{F}A) = H^*(\mathcal{K}G\mathcal{P}F\mathcal{P}A) \quad .$$

PROPOSITION 11.2. - On peut, dans le calcul des hyperdérivés d'un foncteur composé GF , où G et F sont indépendamment exacts à gauche ou à droite, utiliser des foncteurs résolvants.

11.3. - Foncteurs composés associés à un ordre. - Soient ρ un ordre (§ 2) de l'ensemble ordonné $\mathcal{E}$ dans l'ensemble ordonné $\mathcal{E}'$, ρ le foncteur "image directe par ρ " (§ 6) : $\mathcal{C}(\mathcal{E}) \to \mathcal{C}(\mathcal{E}')$, et ρ^{-1} le foncteur image inverse : $\mathcal{C}(\mathcal{E}') \to \mathcal{C}(\mathcal{E})$. On peut appliquer ce qui précède aux foncteurs composés : $L_{\mathcal{E}'}\rho$, $\Gamma_{\mathcal{E}'}\rho$, $L_{\mathcal{E}}\rho^{-1}$, $\Gamma_{\mathcal{E}}\rho^{-1}$.

De même, les foncteurs $\rho^* : \mathcal{C}(\mathcal{E}) \to \mathcal{C}(\mathcal{E}'^*)$ et $\rho^{-1*} : \mathcal{C}(\mathcal{E}') \to \mathcal{C}(\mathcal{E}^*)$ sont définis par

$$A \in \mathcal{C}(\mathcal{E}) \ , \quad (\rho^* A)(a') = \Gamma_{\rho^{-1}a'}\ A$$

$$A' \in \mathcal{C}(\mathcal{E}') \ , \quad (\rho^{-1*} A')(a) = L_{\rho a}\ A' \quad .$$

D'où les foncteurs composés

$$\mathcal{C}(\mathcal{E}) \to \mathcal{C} : \Gamma_{\mathcal{E}'*}\, \rho^* \quad \text{et} \quad L_{\mathcal{E}'*}\, \rho^*$$

(1)

$$\mathcal{C}(\mathcal{E}') \to \mathcal{C} : \Gamma_{\mathcal{E}*}\, \rho^{-1*} \quad \text{et} \quad L_{\mathcal{E}*}\, \rho^{-1*} \quad .$$

Mais, si s est le foncteur de restriction de $\mathcal{E}$ à $\rho^{-1}\, a' = \{a \in \mathcal{E}\ ;\ a \prec a'\}$ par exemple, la restriction sI d'un injectif de $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ n'est pas en général un objet $\Gamma_{\rho^{-1} a'}$ - acyclique dans $\mathcal{C}(\rho^{-1}\, a')$, donc les dérivés à droite $r^n(\Gamma_{\rho^{-1} a'} \cdot s)$ sur $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ sont différents des foncteurs $(r^n\, \Gamma_{\rho^{-1} a'})\ s$ où la dérivation est prise dans $\mathcal{C}(\rho^{-1}\, a')$. Or, ce sont ces derniers qui sont importants dans les applications. Nous allons donc <u>considérer les foncteurs</u> ρ^* <u>et</u> ρ^{-1*} <u>comme des</u> collections de foncteurs :

$$\rho^* = \{\Gamma_{\rho^{-1} a'}\}\ ;\quad \rho^{-1*} = \{L_{\rho a}\} \quad .$$

Un foncteur $\mathfrak{F} : \mathcal{C}(\mathcal{E}) \to \mathcal{C}(\mathcal{E}'^*)$ sera un foncteur résolvant de ρ^* si, pour tout $a' \in \mathcal{E}'$, le foncteur $A|\rho^{-1}\, a' \to (\mathfrak{F}A)\,(a')$ est un foncteur résolvant pour $\Gamma_{\rho^{-1} a'}$. Nous prendrons

$$(\mathfrak{F}A)\,(a') = C^*(\rho^{-1}\, a'\ ;\ A) \quad \text{complexe des cochaînes de } \rho^{-1}\, a' \text{ relativement à } A \quad .$$

De même un foncteur $\mathfrak{G} : \mathcal{C}(\mathcal{E}') \to \mathcal{C}(\mathcal{E}^*)$ sera un foncteur résolvant de ρ^{-1*} si, pour tout $a \in \mathcal{E}$, le foncteur $A'|\rho a \to (\mathfrak{G}A'(a)$ est un foncteur résolvant pour $L_{\rho a}$. Nous prendrons :

$$(\mathfrak{G}A')\,(a) = C_*(\rho a\ ;\ A') \quad \text{complexe des chaînes de } \rho a \text{ relativement à } A' \quad .$$

$\mathfrak{F}$ <u>et</u> $\mathfrak{G}$ <u>étant ainsi choisis, nous</u> définissons <u>alors les hyperdérivés des foncteurs composés</u> (1) <u>par</u> :

$$\overline{rr}_n(\Gamma_{\mathcal{E}'*}\, \rho^*)\ A = H^n(\mathcal{K}\Gamma_{\mathcal{E}'*}\, \mathfrak{J}\mathfrak{F}A)$$

$$\overline{\ell r}_n(L_{\mathcal{E}'*}\, \rho^*)\ A = H^*(\mathcal{K}L_{\mathcal{E}'*}\, \mathfrak{P}\mathfrak{F}A)$$

$$\overline{r\ell}_n(\Gamma_{\mathcal{E}^*}\,\rho^{-1*})\ A' = H^n(\mathcal{K}\Gamma_{\mathcal{E}^*}\,\mathcal{J}\mathcal{S}\ A')$$

$$\overline{\ell\ell}_n(L_{\mathcal{E}^*}\,\rho^{-1*})\ A' = H^*(\mathcal{K}L_{\mathcal{E}^*}\,\mathcal{P}\mathcal{S}\ A')$$

en surlignant les notations précédentes rr_n , etc. afin d'éviter toute confusion.

Si $0 \to A \to B \to C \to 0$ est une suite exacte d'objets de $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ ou de $\mathcal{C}(\mathcal{E}')$, le foncteur $\mathcal{F}$ ou le foncteur $\mathcal{S}$ la transforme en une suite exacte de complexes, d'où une suite exacte de complexes par application d'un foncteur $\mathcal{K}G\mathcal{J}$ ou $\mathcal{K}G\mathcal{P}$, G foncteur additif, d'où des suites exactes d'homologie analogues à celles de 11.2(b).

12. Homologie et cohomologie des espaces topologiques à coefficients dans un préfaisceau ou un antifaisceau.

Soit $\mathcal{Q}$ le sous-ensemble de $P(\mathcal{E})$ formé des parties $\mathcal{R}$ de $\mathcal{E}$, que nous appellerons recouvrements à droite de $\mathcal{E}$, satisfaisant à :

$$(\mathcal{Q})\qquad \mathcal{R} \in \mathcal{Q} \iff \begin{cases} \mathcal{R} \text{ est clos à droite } \ (r \prec a \text{ et } r \in \mathcal{R} \text{ entraînent } a \in \mathcal{R}) \\ \forall\ a \in \mathcal{R}\ , \text{ il existe } r \in \mathcal{R} \text{ tel que } a \prec r \end{cases}.$$

$\mathcal{Q}$ est ordonné par inclusion, (ordre induit par celui de $P(\mathcal{E})$), et n'est pas vide puisqu'il contient $\mathcal{E}$, qui en est le premier élément.

$\mathcal{Q}$ est filtrant à droite.

Il existe un ordre canonique ρ de $\mathcal{Q}$ dans $\mathcal{E}$: $\mathcal{R} \prec a \iff \mathcal{R} \ni a$. Nous appellerons sections et cosections de Čech (sous-entendu à droite) sur $\mathcal{E}$, les foncteurs composés :

$$\check{\Gamma} = L_{\mathcal{Q}}\,\rho^{-1} \text{ soit } \check{\Gamma}A = \varinjlim_{\mathcal{R}\in\mathcal{Q}} \Gamma_{\mathcal{R}}\,A \qquad \check{L} = \Gamma_{\mathcal{Q}^*}\cdot\rho^{-1*} \text{ soit } \check{L}A = \varprojlim_{\mathcal{R}\in\mathcal{Q}} L_{\mathcal{R}}\,A\ .$$

12.1. - Soient X un espace topologique, $\mathcal{E}$ l'ensemble ordonné de ses ouverts $(O_1 \prec O_2 \iff O_1 \supset O_2)$, $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne, $A \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ un préfaisceau sur X dans $\mathcal{C}$, $\mathcal{Q}$ l'ensemble ordonné filtrant des recouvrements ouverts clos de X : si un ouvert O appartient au recouvrement $\mathcal{R}$, tout ouvert $O' \subset O$ appartient également à $\mathcal{R}$). Si ρ est l'ordre canonique de $\mathcal{Q}$ dans $\mathcal{E}$, les foncteurs sections et cosections de Čech (à droite) sur $\mathcal{E}$:

$$\check{\Gamma} = L_{\mathcal{Q}} \cdot \rho^{-1} = \varinjlim_{\mathcal{R} \in \mathcal{Q}} \Gamma_{\mathcal{R}} \qquad \check{L} = \Gamma_{\mathcal{Q}^*} \cdot \rho^{-1*} = \varprojlim_{\mathcal{R} \in \mathcal{Q}} L_{\mathcal{R}}$$

seront appelés les <u>foncteurs sections et cosections de Čech sur les préfaisceaux de</u> X .

$\check{\Gamma} A \in \mathcal{C}$ et $\check{L}A \in \mathcal{C}$ sont les <u>sections et cosections de Čech du préfaisceau</u> $A \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$. <u>Les objets de cohomologie et d'homologie de</u> X <u>relativement au préfaisceau</u> A <u>sont, par définition, les hyperdérivés</u> (§ 11.3 et 11.4) :

$$H^n(X\ ;\ A) = \ell r_n\, \check{\Gamma} A = \ell r_n\, L_{\mathcal{Q}} \cdot \rho^{-1} \qquad n \gtrless 0$$

$$H_n(X\ ;\ A) = r\ell_n\, \check{L} A = \overline{r\ell}_n\, \Gamma_{\mathcal{Q}^*} \cdot \rho^{-1*} \qquad n \gtrless 0 \qquad .$$

A une suite exacte de préfaisceaux, $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$, correspondent des suites exactes de cohomologie et d'homologie (§ 11.2(b) et 11.4), en général illimitées dans les deux sens.

On peut considérer l'homologie et la cohomologie ainsi définies comme <u>l'homologie et la cohomologie de Čech corrigées</u> de façon que l'axiome de la suite exacte soit satisfait.

Lorsque $\mathcal{C}$ est la catégorie des groupes abéliens, et que l'espace X est paracompact, la cohomologie à coefficients dans le préfaisceau A coïncide avec la cohomologie usuelle à coefficients dans le faisceau associé $\mathcal{A}$, dont il est question au paragraphe suivant.

Soient maintenant $B \in \mathcal{C}(\mathcal{E}^*)$ un antifaisceau sur X dans $\mathcal{C}$, $\mathcal{Q}^*$ l'ensemble $\mathcal{Q}$ muni de la relation d'ordre opposée, ρ^* l'ordre canonique de $\mathcal{E}^*$ dans $\mathcal{Q}^*$ (dual de ρ ci-dessus). Les <u>foncteurs sections et cosections de Čech (à gauche) sur</u> $\mathcal{E}^*$:

$$\check{\Gamma}^* = L_{\mathcal{Q}} \cdot \rho'^* = \varinjlim_{\mathcal{R} \in \mathcal{Q}} \Gamma_{\mathcal{R}^*} \qquad \check{L}^* = \Gamma_{\mathcal{Q}^*} \cdot \rho' = \varprojlim_{\mathcal{R} \in \mathcal{Q}} L_{\mathcal{R}^*}$$

seront appelés les <u>foncteurs sections et cosections de Čech sur les antifaisceaux de</u> X .

<u>Les objets de cohomologie et d'homologie de</u> X <u>relativement à l'antifaisceau</u> B <u>sont, par définition, les hyperdérivés,</u> (§ 11.3 et 11.4).

$$H^n(X\ ;\ B) = \overline{\ell r}_n\, L_{\mathfrak{O}}.\rho'^*$$

$$H^n(X\ ;\ B) = \overline{r\ell}_n\, \Gamma_{\mathfrak{O}^*}.\rho' \qquad .$$

A une suite exacte d'antifaisceaux, $0 \to B' \to B \to B'' \to 0$, correspondent des suites exactes de cohomologie et d'homologie (§ 11.3 et 11.4) en général illimitées dans les deux sens.

12.2. - Cas d'un espace métrique compact. Identité avec l'homologie de Steenrod [11] lorsque les "coefficients" sont constants. - Lorsque X est métrique compact, l'ensemble filtrant $\mathfrak{O}$ des recouvrements ouverts de X (que nous supposons toujours clos) est de type dénombrable : soit

(N) : $\mathcal{R}_0 \supset \mathcal{R}_1 \supset \dots \supset \mathcal{R}_i \supset \dots$ une suite cofinale de $\mathfrak{O}$.

On peut remplacer $\mathfrak{O}$ par N (§ 4) et, d'après le § 11, utiliser des foncteurs résolvants pour le calcul de l'homologie de X relativement à un préfaisceau ou un antifaisceau A (dans la catégorie $\mathcal{C}$). Nous supposerons dans le reste de ce paragraphe que $\mathcal{C} = \mathcal{G}$.

Soit $C_p(\mathcal{R}_i\ ;\ A)$ l'objet des chaînes (§ 8.2) de degré p de $\mathcal{R}_i$ relativement à A . Les chaînes des $\mathcal{R}_i$ forment sur N^* l'objet de $\mathcal{C}_\ell(N^*)$:

$$C_*(\mathcal{R}_0\ ;\ A) \to C_*(\mathcal{R}_1\ ;\ A) \to \dots \to C_*(\mathcal{R}_i\ ;\ A) \to \dots$$

où les $p_{i+1,i} : C_*(\mathcal{R}_{i+1}\ ;\ A) \to C_*(\mathcal{R}_i\ ;\ A)$ sont des monomorphismes, auxquels nous allons appliquer le foncteur résolvant du § 8.3.

Nous obtenons ainsi le complexe double (le degré Δ_{II} de la ligne du bas est zéro, celui de la ligne du dessus est un) :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\cdots \xrightarrow{\partial} & \prod_i & C_n(\mathcal{R}_i\ ;\ A) & \xrightarrow{\partial} \prod_i & C_{n-1}(\mathcal{R}_i\ ;\ A) & \to \cdots \xrightarrow{\partial} \prod_i & C_0(\mathcal{R}_i\ ;\ A) \\
 & & \uparrow{\scriptstyle\delta} & & \uparrow{\scriptstyle\delta} & & \uparrow{\scriptstyle\delta} \\
\cdots \xrightarrow{\partial} & \prod_i & C_n(\mathcal{R}_i\ ;\ A) & \xrightarrow{\partial} \prod_i & C_{n-1}(\mathcal{R}_i\ ;\ A) & \to \cdots \xrightarrow{\partial} \prod_i & C_0(\mathcal{R}_i\ ;\ A)
\end{array}$$

où $d_I = \partial$ est la différentielle des chaînes et $d_{II} = \delta$ la différentielle du § 8.3.

La différentielle du complexe simple associé K est

$$D = d_I + \beta d_{II} = \partial + \beta\delta$$

avec $\beta = (-1)^{\Delta_I}$: on prend δ sur les colonnes de degré Δ_I pair, $-\delta$ sur celles de degré Δ_I impair.

Un cycle z de K de degré $n-1$ est donc formé d'une double famille :
$z = \{(d_n^i)_{i\in N}, (c_{n-1}^i)_{i\in N}\}$ telle que :

$$\begin{cases} \partial c_{n-1}^i = 0 \,, \quad \forall \ i : \text{les } c_{n-1}^i \text{ sont des cycles} \\ \partial d_n^i = (-1)^n [p_{i+1,i}\, c_{n-1}^{i+1} - c_{n-1}^i] \end{cases} .$$

Les cycles c_{n-1}^i forment donc avec les homologies de liaison des d_n^i <u>un cycle de X du type de Vietoris</u>.

Mais (on sait que l'homologie de Vietoris ne satisfait pas à l'axiome de la suite exacte), la condition pour un cycle d'être homologue à zéro dans K est plus forte que celle qui est utilisée dans l'homologie de Vietoris. On obtient donc un objet d'homologie "plus grand". En effet, le cycle
$z = \{(d_n^i)_{i\in N}, (c_{n-1}^i)_{i\in N}\}$ est un bord Du, $u = \{(a_{n+1}^i)_{i\in N}, (b_n^i)\}$ si

$$\begin{cases} d_n^i = (-1)^n [p_{i+1,i}\, b_n^{i+1} - b_n^i] + \partial a_{n+1}^i \\ c_{n-1}^i = \partial b_n^i \end{cases}$$

c'est-à-dire que tous les cycles c_{n-1}^i sont des bords (condition de Vietoris), mais en plus, on impose aux d_n^i (qui font partie de la définition du cycle) d'être homologues aux différences $p_{i+1,i}\, b_n^{i+1} - b_n^i$ (au signe près) des chaînes b_n^i ayant pour bords les cycles c_{n-1}^i.

Lorsque A est un objet constant formé d'un groupe abélien, on peut exprimer cette construction comme le fait STEENROD ([11]) en associant à un cycle $\{(d_n^i)_{i\in N}, (c_{n-1}^i)_{i\in N}\}$ un cycle infini d'un complexe simplicial attaché à X, obtenu en recollant les d_n^i suivant les cycles c_{n-1}^i. L'homologie entre ces cycles infinis est l'homologie décrite ci-dessus.

Si $\mathfrak{a}$ désigne le complexe double ci-dessus, et $\mathcal{H}_n(\mathcal{R} ; A)$ l'objet sur N formé des $H_n(\mathcal{R}_i ; A)$, $i \in N$:

$$h_{II}\, h_I\, \mathfrak{a}^{0,n} = H^0(N^* ; \mathcal{H}_n(\mathcal{R} ; A)) = \Gamma_{N^*}\, \mathcal{H}_n(\mathcal{R} ; A) = \varprojlim H^n(\mathcal{R}_i ; A) = \check{H}_n(X ; A)$$

c'est l'homologie de Čech classique lorsque A est un préfaisceau.

$$h_{II}\, h_I\, \mathfrak{a}^{1,n} = H^1(N^* ; \mathcal{H}_{n+1}(\mathcal{R} ; A)) = \tilde{H}_n(X ; A)$$

c'est, lorsque A est constant, formé d'un groupe abélien, l'objet d'homologie des "cycles faiblement homologues à zéro" de Steenrod ([11]).

La suite spectrale correspondante donne les suites exactes

$$0 \to \tilde{H}_n(X ; A) \to H_n(X ; A) \to \tilde{H}_n(X ; A) \to 0$$

qui peuvent être obtenus directement en associant à tout cycle

$$z = \{ (d_n^i) \; , \; (c_{n-1}^i) \} \text{ de } K \text{ le cycle de Vietoris } V = (c_{n-1}^i) \qquad .$$

13. Faisceaux et cofaisceaux.

13.1. - Soient $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne dans laquelle les sommes et produits infinis existent et sont des foncteurs exacts, $\mathcal{E}$ un ensemble ordonné, $\mathfrak{D}$ l'ensemble ordonné filtrant des recouvrements à droite de $\mathcal{E}$.

Appelons filtre sur $\mathcal{E}$ toute partie Φ, filtrante à droite, et close à gauche ($a , b \in \Phi \implies \exists\ c , a < c , b < c , c \in \Phi$ et $a < \Phi , b < a \implies b \in \Phi$). Soit X un ensemble de filtres de $\mathcal{E}$ satisfaisant aux deux conditions :

1. X recouvre $\mathcal{E}$: $\mathcal{E} \subset \bigcup_{x \in X} x$

2. $\forall\ \mathcal{R} \in \mathfrak{D} , \forall\ x \in X , \mathcal{R} \cap x \neq \emptyset$.

La considération d'un tel couple $(\mathcal{E} , X)$ généralise le cas où $\mathcal{E}$ est l'ensemble des ouverts d'un espace topologique X , chaque point $x \in X$ étant représenté par le filtre de ses voisinages. La notion de point d'un espace topologique trouve donc ici sa généralisation dans celle d'ensemble filtrant à droite.

LEMME 13. – Sur $\mathcal{E}$ filtrant à droite, $\check{\Gamma} = \check{L} = L$ et $\check{\Gamma}^* = \check{L}^* = \Gamma^*$.

PREUVE. – L'application ordonnée qui, à tout $a \in \mathcal{E}$, fait correspondre le recouvrement à droite de $\mathcal{E}$: $\mathcal{R}_a = \{b \in \mathcal{R}_a \iff a < b\}$ est un isomorphisme de $\mathcal{E}$ sur une partie $\mathcal{E}_0$ cofinale de $\mathfrak{Q}$. Comme, si $A \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$, $\Gamma_{\mathcal{R}_a} A = A(a)$, il en résulte que $\check{\Gamma} A = L_{\mathcal{E}_0} \rho^{-1} A = L_{\mathcal{E}_0}\{\Gamma_{\mathcal{R}_a} A\} = LA$.

D'autre part, si $\mathcal{R}$ est un recouvrement à droite quelconque de $\mathcal{E}$, $LA \leftarrow L_{\mathcal{R}} A$ est un isomorphisme, et $\check{L}A = \Gamma_{\mathfrak{Q}^*}\{L_{\mathcal{R}} A\} = LA$.

Preuve analogue pour $\check{\Gamma}^*$ et $\check{L}^*$.

COROLLAIRE. – Il est équivalent de dire que la catégorie $\mathcal{C}$ satisfait à l'axiome AB 5, ou que l'homologie et la cohomologie de tout ensemble filtrant à droite $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ est triviale (c'est-à-dire nulle en degrés $\neq 0$). Dualement, $\mathcal{C}$ satisfait à AB 5^* si et seulement si l'homologie et la cohomologie de tout ensemble filtrant à droite $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{C}(\mathcal{E}^*)$ est triviale. On n'obtiendra donc une théorie de l'homologie et de la cohomologie satisfaisant à l'usuelle trivialité locale qu'en prenant des coefficients covariants, $\mathcal{C}$ satisfaisant à AB 5, ou contravariants, $\mathcal{C}$ satisfaisant à AB 5^*.

X étant muni de l'ordre trivial (aucune relation d'ordre), soit β l'ordre canonique de $\mathcal{E}$ dans X

$$a < x \iff x \ni a \quad .$$

Si $A \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$,

$$\beta A(x) = L_x A = \varinjlim_{a \in x} A(a)$$

et

$$\beta^{-1} \beta A(a) = \prod_{x \ni a} L_x A \quad .$$

Si $\mathcal{R} \in \mathfrak{Q}$, β induit un ordre de $\mathcal{R}$ dans X, et, d'après le théorème 6.2 et la condition 2° ci-dessus :

$$\Gamma_{\mathcal{R}} \beta^{-1} \beta A = \prod_{x \in X} L_x A$$

est indépendant de $\mathcal{R}$.

Dualement, si $A^* \in \mathcal{C}(\mathcal{E}^*)$,

$$\beta^{-1*} A^*(x) = \Gamma_x A^* = \varprojlim_{a \in x} A^*(a)$$

$$\beta^* \beta^{-1*} A^*(a) = \bigoplus_{x \ni a} \Gamma_x A^*$$

et

$$L^*_{\mathcal{R}} \beta^* \beta^{-1*} A^* = \bigoplus_{x \in X} \Gamma_x A^* \quad .$$

13.2. DÉFINITION. - <u>Faisceaux et cofaisceaux sur un ensemble ordonné</u> $\mathcal{E}$ <u>dans une catégorie abélienne</u> $\mathcal{C}$: Un objet $A \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ est un <u>faisceau</u> si, quels que soient $a \in \mathcal{E}$, $\mathcal{R}_a$, recouvrement à droite de $\overline{a}$ (clôture à droite de a : $b \in \overline{a} \iff a < b$, $A(a) \equiv \Gamma_{\mathcal{R}_a} A$ (Cette définition est celle de GODEMENT, [6] p. 109, dans le cas des faisceaux d'ensembles sur un espace topologique).

Un objet $A^* \in \mathcal{C}(\mathcal{E}^*)$ est un <u>cofaisceau</u>, si, quels que soient a et $\mathcal{R}_a$ comme ci-dessus : $A^*(a) = L_{\mathcal{R}^*_a} A^*$.

<u>Conséquences de la définition précédente</u>. - Si $\mathcal{R}$ est un recouvrement à droite de $\mathcal{E}$, soit ρ l'ordre canonique de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{R}$. Si A est un faisceau

$$\rho^{-1}(A|\mathcal{R})(a) = \Gamma_{\rho a}(A|\mathcal{R}) = \Gamma_{\mathcal{R} \cap \overline{a}} A = A(a) \quad .$$

D'après le théorème 7.2, il en résulte que

$$\Gamma_{\mathcal{E}} A = \Gamma_{\mathcal{E}} A = \check{\Gamma}_{\mathcal{E}} A \quad .$$

Quelle que soit la partie de $\mathcal{E}$ close à droite $\mathcal{E}'$

$$\Gamma_{\mathcal{E}'} A = \Gamma_{\mathcal{E}'} A = \check{\Gamma}_{\mathcal{E}'} A \quad ,$$

car la restriction à $\mathcal{E}'$ du faisceau A est un faisceau sur $\mathcal{E}'$.

Dualement, si A^* est un cofaisceau, et ρ^* l'ordre dual de $\mathcal{R}^*$ dans $\mathcal{E}^*$

$$L_{\mathcal{E}^*} A^* = L_{\mathcal{R}^*} A^* = \check{L}^* A^* \quad .$$

EXEMPLE. - A la fin du § 8.1, $\beta^{-1}\beta A$ est un faisceau, $\beta^{*}\beta^{-1*}A$ un cofaisceau.

Un produit de faisceaux est un faisceau. Une somme directe de cofaisceaux est un cofaisceau. Le noyau d'un morphisme (dans $\mathcal{C}(\mathcal{E})$) de faisceaux est un faisceau. Le conoyau d'un morphisme (dans $\mathcal{C}(\mathcal{E}^{*})$) de cofaisceaux est un cofaisceau. L'intersection d'une famille de faisceaux sous-objets d'un objet A de $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ est un faisceau contenu dans A : il en résulte que si $B \subset C$ est un sous-objet (dans $\mathcal{C}(\mathcal{E})$) d'un faisceau C, l'intersection de tous les faisceaux contenus dans C et contenant B (famille non vide puisqu'elle contient C) est un faisceau appelé faisceau engendré par B dans C.

Si f est un morphisme d'un objet $B \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ dans un faisceau C, le faisceau engendré par $f(B)$ est le faisceau image par f de B.

De même, le sup d'une famille de cofaisceaux est un cofaisceau, et un épimorphisme f d'un cofaisceau C^{*} sur un objet B^{*} de $\mathcal{C}(\mathcal{E}^{*})$ se factorise en $C^{*} \to B_0^{*} \to B^{*}$, où B_0^{*} est le quotient de C^{*} par le plus grand cofaisceau contenu dans le noyau de f.

13.3. - Si à chaque $a \in \mathcal{C}$, on fait correspondre $\check{\Gamma}_{\bar{a}} A$, objet des sections de Čech de A sur la clôture à droite $\bar{a}$ de a, on détermine ainsi un objet de $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ que l'on peut désigner par $\tilde{\Gamma}A$.

Mais, (sauf dans des cas particuliers comme celui des espaces paracompacts, $\mathcal{C} = \mathcal{S}$), le morphisme $\check{\Gamma}_{\mathcal{E}} A \to \Gamma_{\mathcal{R}}\{\tilde{\Gamma}A\}$ n'est pas un isomorphisme, ce que l'on pourrait exprimer en disant que le foncteur $\check{\Gamma}$ n'est pas localisable, ou que $\tilde{\Gamma}A$ n'est pas un faisceau.

Or, considérons le foncteur qui, à tout A, fait correspondre le faisceau ${}^{0}A$ image du morphisme $A \to \beta^{-1}\beta A$ (pour $a \in \mathcal{E}$: $A(a) \to \prod_{x \ni a} L_x A$) de A dans le faisceau $\beta^{-1}\beta A$, et posons :

$$ {}^{0}\Gamma_X A = \Gamma_{\mathcal{E}}\, {}^{0}A \left(= \Gamma_{\mathcal{R}}\, {}^{0}A = \check{\Gamma}\, {}^{0}A\right) $$

${}^{0}A$ peut être appelé le premier faisceau associé à A, et on peut l'utiliser au lieu de A dans la définition de l'homologie et de la cohomologie du § 14, ce qui revient à composer avec $A \to {}^{0}A$ les foncteurs d'homologie et de cohomologie, ou à utiliser ${}^{0}\Gamma_X$, foncteur localisable, au lieu de $\check{\Gamma}_{\mathcal{E}}$.

On peut considérer de même le foncteur qui, à tout A , fait correspondre le faisceau ${}^{00}A$, image du morphisme : $A \to \beta^{-1}\beta I$ où I est un objet injectif de $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ contenant A (${}^{00}A$ ne dépend pas de I), et poser :

$$ {}^{00}\Gamma_X A = \Gamma\, {}^{00}A $$

${}^{00}A$ peut être appelé le second faisceau associé à A et on peut aussi l'utiliser au lieu de A dans la définition de l'homologie et de la cohomologie du § 12, ce qui revient à utiliser le foncteur localisable ${}^{00}\Gamma_X$ au lieu de $\check{\Gamma}_{\mathcal{E}}$. La théorie de l'homologie et de la cohomologie obtenue dans ce cas élimine l'homologie locale provenant de la non-exactitude des L_x , $x \in X$.

Les constructions duales pour les cofaisceaux s'explicitent immédiatement.

Lorsque la catégorie $\mathcal{C}$ satisfait à AB 5, il est clair que ${}^{0}A = {}^{00}A$ coïncident, et lorsque $\mathcal{C}$ est la catégorie des groupes abéliens, on obtient l'usuelle construction du faisceau des sections d'un préfaisceau, et ${}^{0}\Gamma_X = {}^{00}\Gamma_X$ est le foncteur "sections sur X ".

Nous allons démontrer que dans ce cas <u>la cohomologie qui vient d'être décrite coïncide avec la cohomologie usuelle</u> (dérivés à droite du foncteur "sections sur X " sur la catégorie des faisceaux de groupes abéliens). Il suffit pour cela de prouver que si I est un objet injectif de $\mathcal{S}(\mathcal{E})$, le faisceau associé $\mathcal{J}$ sur X est "flasque" ([6], p. 147).

Nous allons prouver plus généralement, que, si $A \in \mathcal{S}(\mathcal{E})$ est un produit d'objets élémentaires (§ 1) : $A = \prod_{a \in \mathcal{E}} A_a$, le faisceau associé est flasque. Une section de ce faisceau sur une partie $\mathcal{E}'$ de $\mathcal{E}$, close à droite, est définie par la donnée, pour $x \in X'$, $\{x \in X' \iff x \cap \mathcal{E}' \neq \emptyset\}$ d'un $a_x \in x$ de $\mathcal{E}'$ et d'une fonction s_x qui, à chaque b : $a_x \prec b$, associe un élément $s_x(b)$ de A_b , de telle sorte que, pour tout z tel que $z \supset a_x$, $z \supset a_y$, il existe $c_{xyz} \in z$, $a_x \prec c_{xyz}$, $a_y \prec c_{xyz}$ sur lequel les fonctions s_x et s_y coïncident.

Etablissons un bon ordre sur les points x de x' (tels que $x \cap \mathcal{E}' \neq \emptyset$). Changeons la valeur de la fonction s_{x_2} sur tous les c tels que $a_{x_1} \prec c$ et $a_{x_2} \prec c$ en prenant pour nouvelle valeur $\overline{s_{x_2}}(c) = s_{x_1}(c) \in A_c$, et conservons $\overline{s_{x_2}}(c) = s_{x_2}(c)$ si $a_{x_2} \prec c$ et $a_{x_1} \not\prec c$.

$\bar{s}_{x_1} = s_{x_1}$ et $\bar{s}_{s_2}$ coïncident dans leur domaine commun de définition.

Supposons choisies les nouvelles fonctions $\bar{s}_{x_i}$ pour les $i \leq \alpha$, coïncidant toutes sur les éléments communs des domaines de définition. On modifie alors $s_{x_{\alpha+1}}$ comme précédemment en $\bar{s}_{x_{\alpha+1}}$. On obtient ainsi une fonction unique s qui, à tout c tel qu'il existe au moins un a_x : $a_x \prec c$, attache un élément $s(c) \in A_c$.

Si a est un élément quelconque de $\mathcal{E}$, complétons s, si elle n'est pas déjà définie sur a, en prenant pour $s(a)$ un élément arbitraire de A_a. On obtient ainsi un élément de $\prod_{a\in\mathcal{E}} A_a = \Gamma_{\mathcal{E}} \prod_{a\in\mathcal{E}} A_a$ qui définit sur X une section étendant la section donnée.

13.4. - Ce qui précède montre que sur une catégorie abélienne quelconque la théorie des faisceaux perd sa simplicité : on n'obtient en effet, d'après la fin du § 13.1, de "trivialité locale", qu'avec des faisceaux sur $\mathcal{C}$ satisfaisant à AB 5, ou des cofaisceaux sur $\mathcal{C}$ satisfaisant à AB 5*.

Nous avons laissé le soin au lecteur d'expliciter les innombrables suites spectrales qui prennent naissance lorsqu'on compose un foncteur avec une limite directe ou inverse, celles qui, dans les hypothèses du théorème 6.2, donnent des théorèmes du type "théorème de Leray pour un recouvrement acyclique", celles qui permettent d'étudier le produit de deux ensembles ordonnés (que relie éventuellement un ordre), etc., les homologie et cohomologie relatives et avec supports.

Nous expliciterons dans une prochaine publication quelques applications à l'algèbre et à la géométrie algébrique.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOREL (A.) and MOORE (J. C.). - Homology theroy for locally compact spaces, Mich. math. J., t. 7, 1960, p. 137-159.

[2] CARTAN (H.) and EILENBERG (S.). - Homological algebra. - Princeton, Princeton University Press, 1956 (Princeton mathematical Series, 19).

[3] DEHEUVELS (René). - Homologie à coefficients dans un antifaisceau, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 250, 1960, p. 2492-2494.

[4] DEHEUVELS (René). - Topologie d'une fonctionnelle, Annals of Math., t. 61, 1955, p. 13-72.

[5] EILENBERG (S.) and STEENROD (N.). - Foundations of algebraic topology. - Princeton, Princeton University Press, 1952 (Princeton mathematical Series, 15).

[6] GODEMENT (Roger). - Topologie algébrique et théorie des faisceaux. - Paris, Hermann, 1958 (Act. scient. et ind., 1252 ; Publ. Inst. math. Univ. Strasbourg, 13).

[7] GROTHENDIECK (Alexander). - Sur quelques points d'algèbre homologique, Tohoku math. J., t. 9, 1957 ; p. 119-221.

[8] LEFSCHETZ (Solomon). - Algebraic topology. - New York ; American mathematical Society (Amer. math. Soc., Coll. Publ., 27).

[9] LERAY (Jean). - L'anneau spectral et l'anneau fibré d'homologie d'un espace localement compact et d'une application continue, J. Math. pures et appl., Serie 9, t. 29, 1950, p. 1-139.

[10] Séminaire H. Cartan, t. 3, 1950/51 : Cohomologie des groupes, suite spectrale, faisceaux, 2e édition. - Paris, Secrétariat mathématique, 1955.

[11] STEENROD (N.). - Regular cycles of compact metric spaces, Annals of Math., Series 2, t. 41, 1940, p. 833-851.

[12] VIETORIS (L.). - Über den höheren Zusammenhang kompakter Räume und eine Klasse von zusammenhangstreuen Abbildungen, Math. Annalen, t. 97, 1927, p. 454-472.