

SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

ANTONIO ALMEIDA COSTA

Sur la théorie générale des demi-anneaux, II

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 14, n° 2 (1960-1961), exp. n° 25,
p. 1-12

http://www.numdam.org/item?id=SD_1960-1961__14_2_A10_0

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1960-1961, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LA THÉORIE GÉNÉRALE DES DEMI-ANNEAUX, II.

par Antonio ALMEIDA COSTA

DEMI-ANNEAUX RÉTICULÉS. DEMI-ANNEAUX \mathcal{G} .
 μ -SYSTÈMES ET π -SYSTÈMES D'IDÉAUX. μ -DEMI-ANNEAUX.

1. Demi-anneaux réticulés.

Un demi-anneau \mathcal{G} est dit réticulé, s'il vérifie les deux conditions suivantes :

(i) \mathcal{G} est un treillis ;

(ii) en désignant par \vee et \wedge les opérations du treillis, et par \preceq la relation d'ordre (partiel) correspondante, on a

$$x + y = x \vee y ; \quad xy \preceq x \wedge y \quad .$$

EXEMPLE. - Le demi-anneau des idéaux d'un demi-anneau quelconque.

On sait qu'un idéal du treillis peut être caractérisé des deux façons suivantes :

1° Comme l'ensemble des éléments qui, avec a et b , contient $a \vee b$, ainsi que $x \wedge a$, quel que soit x appartenant au treillis ;

2° comme l'ensemble des éléments qui, avec a et b , contient $a \vee b$, ainsi que chaque $x \preceq a$. On voit que [3] :

(i') Si \mathcal{G} est un demi-anneau réticulé, tout idéal du treillis correspondant est un idéal de \mathcal{G} . On dit qu'il s'agit d'un idéal réticulé de \mathcal{G} .

(ii') Si \mathcal{G} est un demi-anneau réticulé, et si l'on a $x \preceq y$, on a aussi $ax \preceq ay$, $xa \preceq xy$ [par exemple : $x \vee y = y$, $a(x + y) = ay = ax + ay$, $ax \vee ay = ay$, $ax \preceq ay$].

(iii') $ax \preceq a$, $xa \preceq a$.

2. Idéaux réticulés premiers et semi-premiers.

Dans les raisonnements qui vont suivre il sera question, en général, d'idéaux réticulés. C'est pour eux qu'on peut établir des résultats semblables à ceux de la théorie des anneaux associatifs, [4], [5] et [6].

THÉOREME 1. - Un idéal réticulé est premier, si et seulement s'il est complètement premier. Nous savons qu'un idéal complètement premier est premier. Réciproquement, si g est premier, supposons $ab \in g$. Alors, on va montrer qu'on a aussi $(a)(b) \subseteq g$. En fait, un élément de $(a)(b)$ est une somme de produits de la forme

$$\sum (na + ar + sa + paq) \cdot \sum (n'b + br' + s'b + p' bq')$$

Etudions, par exemple, le terme $paq \cdot p' bq'$ de ce produit. On a

$$paq \cdot p' bq' \leq paq \cdot p' b \leq aq p' b \leq ap' b \leq ab$$

Comme g est réticulé, on en conclut $paq \cdot p' bq' \in g$. Tous les termes appartiennent à g , donc $(a)(b) \subseteq g$. Ce dernier est premier, par conséquent $(a) \subseteq g$ ou $(b) \subseteq g$. Alors, ou $a \in g$ ou bien $b \in g$.

THÉOREME 2. - Un idéal réticulé est semi-premier, si et seulement s'il est complètement semi-premier.

Afin de rattacher aux considérations précédentes la caractérisation du seul idéal semi-premier minimal appartenant à un idéal réticulé, on doit commencer par ce

LEMME. - Si α est un idéal réticulé et si $v^\rho \in \alpha$, alors $(v)^\rho \subseteq \alpha$. En fait, les éléments de $(v)^\rho$ sont des sommes d'éléments dans chacune desquelles figurent des produits qui contiennent ρ fois l'élément v . Par conséquent, le lemme est valable.

THÉOREME 3. - Si α est réticulé, pour que $v \in B(\alpha)$, il faut et il suffit qu'on ait $v^\rho \in \alpha$.

La condition est nécessaire. - En supposant $v \in B(\alpha)$, le p -système de la forme $\{v, v^2, v^3, \dots\}$ contient un élément de α ; donc $v^\rho \in \alpha$, pour un certain ρ .

La condition est suffisante. - Si $v^\rho \in \alpha$, alors $(v)^\rho \subseteq \alpha$, donc $(v)^\rho \subseteq B(\alpha)$, c'est-à-dire $(v) \subseteq B(\alpha)$, $v \in B(\alpha)$.

COROLLAIRE 1. - Le radical $B(\alpha)$ de l'idéal réticulé α est un idéal réticulé. Prenons $v \in B(\alpha)$, et supposons $x \leq v$. On a $x^2 \leq v^2$, ..., $x^\rho \leq v^\rho$. Si $v^\rho \in \alpha$, on a aussi $x^\rho \in \alpha$, c'est-à-dire $x \in B(\alpha)$. On peut ajouter que $B(\alpha)$ est complètement demi-premier.

3. Éléments et idéaux d'un demi-anneau réticulé en relation avec un idéal réticulé.

Dans un demi-anneau réticulé \mathcal{G} , on dit que $(\alpha : b)_d$ est le quotient à droite d'un idéal réticulé α par un élément $b \in \mathcal{G}$, s'il se compose de tous les éléments $x \in \mathcal{G}$ pour lesquels $xb \in \alpha$ [on vérifie que $xs \in (\alpha : b)_d$, si $s \in \mathcal{G}$ et $x \in (\alpha : b)_d$, compte tenu de la relation $xsb \leq xb$]. On définit aussi le quotient à droite $(\alpha : \mathfrak{b})_d$, d'un idéal α par un autre idéal \mathfrak{b} , comme l'ensemble des éléments $x \in \mathcal{G}$ pour lesquels $x\mathfrak{b} \subseteq \alpha$.

Un élément b est en relation avec notre idéal réticulé α , si on a $(\alpha : b)_d \supset \alpha$; autrement, si $(\alpha : b)_d = \alpha$, alors b n'est pas en relation avec α . Un idéal \mathfrak{b} est en relation avec α par éléments, s'il est un ensemble d'éléments en relation avec α . Nous dirons simplement "idéal en relation avec α ", en supprimant les mots "par éléments".

\mathfrak{M}' et \mathfrak{M} désigneront, respectivement, l'ensemble des éléments en relation et l'ensemble des éléments qui ne sont pas en relation avec α . On peut affirmer ce qui va suivre :

(i) Si $\alpha \neq \mathcal{G}$, on a $\alpha \subseteq \mathfrak{M}'$.

(ii) \mathfrak{M} et \mathfrak{M}' sont des systèmes multiplicatifs.

(iii) Si $ab \in \mathfrak{M}$, alors $a \in \mathfrak{M}$ et $b \in \mathfrak{M}$.

(iv) Si $ab \in \mathfrak{M}'$, alors $a \in \mathfrak{M}'$ ou $b \in \mathfrak{M}'$.

(v) En supposant $\alpha \neq \mathcal{G}$, on a $\alpha = \mathfrak{M}'$ si et seulement si α est complètement premier.

(vi) En supposant $\alpha \neq \Phi$, on a $\alpha = \mathfrak{M}$ si et seulement si $\alpha = \mathcal{G}$.

(vii) La relation $(\alpha : b)_d = (\alpha : (\mathfrak{b}))_d$ est valable. Le quotient est aussi un idéal réticulé.

(viii) Si \mathfrak{b} est en relation avec α , (\mathfrak{b}) est aussi en relation avec α . De cette façon, \mathfrak{M}' contient les idéaux engendrés par ses éléments.

(ix) Si $a \in \mathfrak{M}'$, pour chaque $x \leq a$, on a aussi $x \in \mathfrak{M}'$.

Nous nous bornerons à analyser l'affirmation (v). Si on suppose $\alpha \neq \mathcal{G}$, nous commençons par admettre qu'on a aussi $\alpha \neq \Phi$. Alors, si $\alpha = \mathfrak{M}'$, nous allons reconnaître que α est complètement premier. De $yx \in \alpha$, si $y \notin \alpha$ on tire $(\alpha : x)_d \supset \alpha$, c'est-à-dire $x \in \mathfrak{M}'$, par conséquent $x \in \alpha$. Dans le cas $\alpha = \Phi$

et $\mathfrak{M}' = \Phi$, $\alpha = \mathfrak{M}'$, et on considère Φ complètement premier. Réciproquement, si $\alpha \neq \mathfrak{G}$ est complètement premier, supposons $\alpha \neq \Phi$. On a toujours $\alpha \subseteq \mathfrak{M}'$. Maintenant, si on prend $x \in \mathfrak{M}'$, alors $(\alpha : x)_d \supset \alpha$; donc il existe $y \notin \alpha$ tel que $yx \in \alpha$. On en conclut $x \in \alpha$ et $\alpha = \mathfrak{M}'$.

Prenons un idéal réticulé α . Si un idéal g a les deux propriétés suivantes : 1° il est en relation avec α ; 2° un idéal $g \supset g$ n'est pas en relation avec α ; alors g est dit idéal maximal appartenant à α . Il s'agit d'un idéal qui est maximal dans l'ensemble des idéaux en relation avec α .

L'existence de tels idéaux peut être assurée par une des deux méthodes suivantes. On considère l'idéal α et l'ensemble \mathfrak{M} des éléments qui ne sont pas en relation avec α . Un idéal maximal g qui contient α et n'a aucun élément dans \mathfrak{M} est idéal maximal appartenant à α . Comme deuxième façon, on prend l'ensemble des idéaux en relation avec α . Cet ensemble est inductif, donc contient des idéaux maximaux g .

Chaque idéal g est premier, car si $bc \subseteq g$, avec $b \notin g$, $c \notin g$, les deux idéaux (g, b) et (g, c) contiendraient des éléments non en relation avec α , par exemple x et y , respectivement. On aurait $xy \in g$ et en même temps $(\alpha : xy)_d = \alpha$. Il y a une contradiction.

On peut affirmer que tout idéal maximal appartenant à α contient nécessairement ce dernier idéal; il suffit de remarquer que du fait que la somme est commutative on conclut que la somme (g, α) est un idéal en relation avec α . On donnera l'énoncé suivant :

THÉORÈME 1. - Si $\alpha \neq \mathfrak{G}$ est un idéal réticulé d'un demi-anneau réticulé, il existe des idéaux maximaux g appartenant à α . Chacun d'eux est premier, contient α et est un idéal réticulé. En ce qui concerne la dernière partie de l'énoncé, nous considérons un idéal $b \in \mathfrak{B} =$ ensemble des idéaux en relation avec α . On obtient un idéal $b' \in \mathfrak{B}$, en prenant l'ensemble des éléments $x \in b$, où b est un élément quelconque de b . Si g est maximal dans \mathfrak{B} , g est déjà un idéal réticulé.

REMARQUES.

1° Dans le cas $\alpha = \Phi$, on a $g = \Phi$.

2° Tout idéal b en relation avec α est contenu dans un idéal maximal appartenant à α .

5. Composantes isolées.

La notion de composante isolée a surtout un intérêt dans deux cas particuliers dont nous nous occuperons plus loin. Dans ce paragraphe, il s'agit de la définition générale. Soit α un idéal réticulé, et prenons un m -système M . La composante isolée de α , définie par M , est l'idéal α_M , ensemble réunion de α et des éléments b pour lesquels il existe effectivement $m \in M$ tel que $bm \in \alpha$.

α_M est un idéal réticulé. Il y a trois hypothèses particulières pour lesquelles on le reconnaît immédiatement :

- 1° si $M = \Phi$, on a $\alpha_M = \alpha$;
- 2° si $\alpha = \Phi$, on a aussi $\alpha_M = \alpha$;
- 3° si $M = \mathcal{G}$ et $\alpha \neq \Phi$, on a $\alpha_M = \mathcal{G}$.

En supposant maintenant $\alpha \neq \Phi$, $\Phi \neq M \neq \mathcal{G}$, l'existence d'éléments b est assurée. Si $b_1, b_2 \in \alpha_M$, soient $m_1, m_2 \in M$ tels que $b_1 m_1 \in \alpha$, $b_2 m_2 \in \alpha$. Posons $m_3 = m_1 y m_2 \in M$. Alors, $(b_1 + b_2) m_3 = b_1 m_3 + b_2 m_3 \leq b_1 m_1 + b_2 m_2 \in \alpha$. D'autre part, si $x \leq b_1$, $x m_2 \leq b_1 m_1 \in \alpha$ et $x \in \alpha_M$. D'où

THÉORÈME 1. - La composante isolée définie par le m -système M et relative à l'idéal réticulé α est un idéal réticulé α_M .

REMARQUES.

- 1° Le fait que α est réticulé a eu un rôle pour établir que α_M est un idéal.
- 2° En supposant $M \neq \Phi$, la définition de α_M peut être donnée comme ensemble des éléments b .

6. Composantes principales.

Prenons pour m -système le complémentaire $\mathcal{C}(g)$ d'un idéal maximal g appartenant à α . La composante isolée correspondante est représentée par $\alpha(g)$, et reçoit le nom de composante principale. Nous nous bornons au théorème que voici :

THÉORÈME 1. - L'idéal réticulé α est intersection de toutes ses composantes principales. La relation $\alpha = \bigcap \alpha(g)$, dont on représente le deuxième membre par Δ , sera démontrée si, pour chaque $a \in \Delta$, on a aussi $a \in \alpha$. S'il y a un $g = \mathcal{G}$ ou si $\alpha = \Phi$, le théorème est trivial. S'il n'en n'est pas ainsi, soit $a \in \Delta$. On aura $a \in \alpha(g)$, quel que soit g . En choisissant g , il existe

$c \in \mathcal{C}(\mathfrak{g})$ tel que $ac \in \alpha$, ce qui entraîne $c \in (\alpha : a)_e$, en définissant ce dernier comme l'ensemble des $x \in \mathcal{G}$ tels que $ax \in \alpha$. L'idéal $(\alpha : a)_e$ n'est contenu dans aucun \mathfrak{g} et de cette sorte il ne peut pas être en relation avec α . En prenant $x \in (\alpha : a)_e$, avec $(\alpha : x)_d = \alpha$, on a $ax \in \alpha$, $a \in (\alpha : x)_d = \alpha$. On arrive à $\Delta \subseteq \alpha$, donc au théorème.

7. Idéaux primaux.

Prenons un idéal réticulé $\alpha \neq \mathcal{G}$, et soit $c_1 \in \mathcal{G}$ un élément tel que $c_1 + b \in \mathfrak{M}'$, pour tout $b \in \mathfrak{M}'$. L'ensemble des éléments tels que c_1 constitue un idéal \mathfrak{v} , car $(c_1 + c_2) + b = c_1 + (c_2 + b) \in \mathfrak{M}'$, si c_2 est un élément c_1 ; et d'autre côté, par exemple, on a $c_1 t + b = c_1 t \vee b \cong c_1 + b \in \mathfrak{M}'$. Alors la propriété (ix), n° 3, montre que $c_1 t + b \in \mathfrak{M}'$. L'idéal \mathfrak{v} reçoit la désignation d'idéal adjoint de α . Il s'agit d'un idéal réticulé, puisque, si $x \leq c$ et $c + b \in \mathfrak{M}'$, on a aussi $x + b \in \mathfrak{M}'$ et $x \in \mathfrak{v}$.

Si \mathfrak{g} est un idéal maximal appartenant à α , l'idéal $(\mathfrak{g}, \mathfrak{v})$ est en relation avec α , donc $\mathfrak{v} \subseteq \mathfrak{g}$. Réciproquement, si $\mathfrak{v} \in \mathcal{G}$ est un élément qui appartient à tous les idéaux maximaux appartenant à α , en prenant $b \in \mathfrak{M}'$, comme $(b) \subseteq \mathfrak{M}'$, on aura $(b) \subseteq \mathfrak{g}'$, où \mathfrak{g}' est aussi un idéal maximal appartenant à α ; donc $\mathfrak{v} + b \in \mathfrak{M}'$, c'est-à-dire $\mathfrak{v} \in \mathfrak{v}$. Ainsi :

THÉORÈME 1. - L'idéal adjoint de l'idéal réticulé α est un idéal réticulé égal à l'intersection de tous les idéaux maximaux appartenant à α .

L'idéal réticulé α est dit primal, si $\mathfrak{v} = \mathfrak{M}'$. Alors on a

THÉORÈME 2. - Pour que l'idéal réticulé α soit primal, il faut et il suffit que $b_1, b_2 \in \mathfrak{M}'$ entraîne $b_1 + b_2 \in \mathfrak{M}'$. Ou encore : que \mathfrak{M}' soit un idéal. Si α est primal \mathfrak{M}' est un idéal et $b_1, b_2 \in \mathfrak{M}'$ entraîne $b_1 + b_2 \in \mathfrak{M}'$. Réciproquement, si $b_1, b_2 \in \mathfrak{M}'$ entraîne $b_1 + b_2 \in \mathfrak{M}'$, les éléments de \mathfrak{M}' ont la propriété des éléments de \mathfrak{v} . On aura $\mathfrak{M}' \subseteq \mathfrak{v}$. Comme d'autre part $\mathfrak{v} \subseteq \mathfrak{M}'$, il en résulte l'égalité.

REMARQUES.

1. On a toujours $\mathfrak{v} \subseteq \mathfrak{M}'$ parce que l'hypothèse $x \in \mathfrak{M}'$ entraîne $y \in \mathfrak{M}'$, si $y \cong x$.

2. L'idéal vide et l'idéal impropre \mathcal{G} , pour lesquels $\mathfrak{M}' = \Phi$, sont des idéaux primaux avec l'adjoint Φ .

8. Composantes isolées primales.

Il s'agit dans ce numéro de certaines composantes isolées, en étroite relation avec les idéaux premiers minimaux appartenant à un idéal réticulé α .

α étant donné, prenons un idéal premier minimal p_0 appartenant à α . Nous savons que $\alpha_{C(p_0)} = \Delta_0$ se compose de tous les éléments $x \in \mathcal{G}$ pour lesquels il existe $c \in C(p_0)$ tel que $xc \in \alpha$.

THÉOREME 1. - L'idéal réticulé Δ_0 est primal et a l'adjoint p_0 . Tout à l'heure on montrera que les éléments d'un m -système M ne sont pas en relation avec la composante isolée α_M . Alors, les éléments de $C(p_0)$ ne sont pas en relation avec Δ_0 . Si g est un idéal maximal appartenant à Δ_0 , on aura $g \subseteq p_0$. Il en résulte $\alpha \subseteq \alpha_{C(p_0)} \subseteq g \subseteq p_0$, donc $g = p_0$. On voit de cette façon, que p_0 est un idéal réticulé et le seul idéal premier maximal appartenant à Δ_0 . On retrouve un cas pour lequel l'ensemble \mathfrak{M}' correspondant se réduit à un idéal.

L'idéal $\alpha_{C(p_0)}$ prend le nom de composante isolée primale de l'idéal α .

REMARQUE. - Il s'agit de montrer que les éléments de M ne sont pas en relation avec α_M . On doit arriver à la relation $(\alpha_M : m)_d = \alpha_M$, pour tout $m \in M$. Si $x \in (\alpha_M : m)_d$, on a $xm \in \alpha_M$, donc il existe $m' \in M$ tel que $xmm' \in \alpha$. En supposant $y \in \mathcal{G}$ tel que $my m' \in M$, alors $xnym' \leq xmm'$, donc $xnym' \in \alpha$ et $x \in \alpha_M$.

9. Idéaux primaires.

La définition suivante est très commode. Un idéal réticulé s est dit primaire, si et seulement si, en supposant a et b deux idéaux, les relations $ab \subseteq s$, $a \not\subseteq s$ entraînent $b \subseteq B(s)$. On a :

THÉOREME 1. - Pour que l'idéal réticulé s soit primaire, il faut et il suffit que les relations $ab \in s$, $a \not\subseteq s$ entraînent $b \in B(s)$.

La condition est nécessaire : Prenons un idéal primaire s , de radical $B(s)$. Si $ab \in s$, nous savons que $(a)(b) \subseteq s$. Alors, l'hypothèse $a \not\subseteq s$ entraîne $(b) \subseteq B(s)$, donc $b \in B(s)$.

La condition est suffisante : En supposant que s jouit de la propriété de l'énoncé, prenons $ab \subseteq s$, avec $a \not\subseteq s$. Si $a \in \alpha$, $a \not\subseteq s$, on a, quel que soit b , $ab \in s$, donc $b \in B(s)$ et $b \subseteq B(s)$.

COROLLAIRE 1. - Pour que l'idéal réticulé $s \neq \emptyset$ soit primaire, il faut et il suffit que s soit primal et que son adjoint soit le radical $B(s)$.

La condition est nécessaire : Le théorème montre que $\mathbb{M}' \subseteq B(s)$, si \mathbb{M}' est l'ensemble des éléments en relation avec s . D'autre part, on a $B(s) \subseteq \mathbb{M}'$, donc $B(s) = \mathbb{M}'$. L'idéal s est primal et son adjoint est $B(s)$.

La condition est suffisante : Si s est primal et a l'adjoint $B(s)$, on a, par définition, $B(s) = \mathbb{M}'$. Alors, de $ab \in s$, avec $a \notin s$, on tire $a \in (s : b)_{\mathcal{d}} \supseteq s$, donc $b \in \mathbb{M}'$, c'est-à-dire $b \in B(s)$.

REMARQUES.

1. A l'égard de la définition, \emptyset et ϕ doivent être considérés comme des idéaux primaires.

2. Pour que $s \neq \emptyset$ soit primaire, il faut et il suffit qu'il y ait un seul idéal complètement premier maximal appartenant à s lequel doit être le seul idéal complètement premier minimal appartenant à s .

10. Le demi-anneau $\bar{\mathcal{C}}$.

L'ensemble des idéaux d'un demi-anneau quelconque \mathcal{C} , avec exclusion de l'idéal vide, constitue un semi-anneau $\bar{\mathcal{C}} = \{\alpha, b, \dots, \varkappa, \eta, \dots\}$. $\bar{\mathcal{C}}$ est trivialement un demi-anneau réticulé.

Si $\bar{\alpha}$ est un idéal de $\bar{\mathcal{C}}$, on obtient un idéal α , de \mathcal{C} , qu'on appelle idéal support de $\bar{\alpha}$, en considérant l'union de tous les éléments de \mathcal{C} qui sont contenus dans les idéaux qui composent $\bar{\alpha}$. Ainsi, tout idéal de $\bar{\mathcal{C}}$ est un ensemble de sous-idéaux d'un idéal de \mathcal{C} . Des exemples importants d'idéaux de $\bar{\mathcal{C}}$ sont donnés par les idéaux $\bar{\alpha}_0$, exactement formés par tous les sous-idéaux de son support α . L'idéal $\bar{\alpha}_0$ est réticulé et reçoit le nom d'idéal principal (ou complet).

On voit tout de suite qu'il y a une correspondance biunivoque entre les idéaux de \mathcal{C} et les idéaux principaux de $\bar{\mathcal{C}}$. A ce sujet, nous fixerons les deux théorèmes suivants :

THÉORÈME 1. - On a $ab \subseteq c$, si et seulement si $\bar{\alpha}_0 \bar{b}_0 \subseteq \bar{c}_0$.

La condition est nécessaire : En supposant $ab \subseteq c$, prenons $z \in \bar{\alpha}_0 \bar{b}_0$. On aura $z = \sum \varkappa' \eta'$, avec $\varkappa' \in \bar{\alpha}_0$, $\eta' \in \bar{b}_0$. Alors $\varkappa' \subseteq \alpha$, $\eta' \subseteq b$, donc $\varkappa' \eta' \subseteq ab$, ce qui entraîne $z \subseteq ab$; par conséquent $z \subseteq c$, $z \in \bar{c}_0$.

La condition est suffisante : Si $\bar{a}_0 \bar{b}_0 \subseteq \bar{c}_0$, alors, comme $a \in \bar{a}_0$, $b \in \bar{b}_0$, on aura $ab \in \bar{a}_0 \bar{b}_0$, donc $ab \in \bar{c}_0$, $ab \subseteq c$.

THÉORÈME 2. - Pour que p soit premier dans \mathfrak{G} , il faut et il suffit que \bar{p}_0 soit premier dans $\bar{\mathfrak{G}}$.

La condition est nécessaire : Si on suppose p premier, prenons $\bar{ab} \subseteq \bar{p}_0$. Un élément $z \in \bar{ab}$ peut s'écrire $z = \sum x^i y^i$, avec $x^i \in \bar{a}$, $y^i \in \bar{b}$. On voit que $z \in \sum x^i \eta^i \in \bar{ab}$, c'est-à-dire $z \in \sum x^i \eta^i \in \bar{p}_0$. On arrive à $z \in p$, donc à $ab \subseteq p$. Comme p est premier, on en tire $a \subseteq p$ ou $b \subseteq p$, par conséquent ou $\bar{a} \subseteq \bar{p}_0$ ou $\bar{b} \subseteq \bar{p}_0$.

La condition est suffisante : En supposant \bar{p}_0 premier, il s'agit de montrer que p est premier. Soit $ab \subseteq p$ et considérons deux idéaux \bar{a} et \bar{b} , de supports a et b , respectivement. Nous commençons par montrer que $\bar{ab} \subseteq \bar{p}_0$. Prenons $z \in \bar{ab}$, c'est-à-dire $z = \sum x^i \eta^i$, avec $x^i \in \bar{a}$, $\eta^i \in \bar{b}$, ce qui entraîne $x^i \subseteq a$, $\eta^i \subseteq b$, $\sum x^i \eta^i = z \subseteq ab$. On voit que $z \subseteq p$, donc $z \in \bar{p}_0$, d'où $\bar{ab} \subseteq \bar{p}_0$. De cette sorte on a $\bar{a} \subseteq \bar{p}_0$ et $a \subseteq p$; ou $\bar{b} \subseteq \bar{p}_0$ et $b \subseteq p$.

11. Les m -systèmes et les p -systèmes dans le demi-anneau $\bar{\mathfrak{G}}$.

On dit qu'un système \mathfrak{M} d'idéaux dans \mathfrak{G} forme un μ -système [1], si, en prenant $a, b \in \mathfrak{M}$, il existe \mathfrak{x} (idéal dans \mathfrak{G}) tel que $\mathfrak{x}ab \in \mathfrak{M}$. Un μ -système est, par rapport à $\bar{\mathfrak{G}}$, un m -système d'éléments. Réciproquement, un m -système d'éléments de $\bar{\mathfrak{G}}$ constitue un μ -système d'idéaux de \mathfrak{G} .

On définit aussi les π -systèmes d'idéaux de \mathfrak{G} . Un π -système est un ensemble \mathfrak{P} d'idéaux tel que, en supposant $a \in \mathfrak{P}$, il existe idéal g , dans \mathfrak{G} , tel que $aga \in \mathfrak{P}$. Un π -système est, par rapport à $\bar{\mathfrak{G}}$, un p -système d'éléments. On peut dire :

THÉORÈME 1. - Pour que \mathfrak{x} soit un idéal premier, il faut et il suffit que l'ensemble complémentaire des idéaux contenus dans p soit un μ -système.

En fait, cette affirmation est exactement la même que celle-ci : Pour que \bar{p}_0 soit un idéal premier, il faut et il suffit que $C(\bar{p}_0)$ soit un m -système. De façon analogue :

THÉORÈME 2. - Pour que \bar{x} soit un idéal semi-premier, il faut et il suffit que l'ensemble complémentaire des idéaux contenus dans \bar{x} soit un π -système.

12. μ -Demi-anneaux.

On dit qu'un demi-anneau vérifie la μ -condition, s'il a la propriété suivante ([2] et [6]) : En prenant un μ -système d'idéaux, et en considérant une famille $\{\alpha_\lambda\}_{\lambda \in L}$ d'idéaux, l'hypothèse que la famille est totalement ordonnée par la relation d'inclusion et que chaque α_λ n'a aucun sous-idéal dans le μ -système entraîne pour l'idéal $\alpha = \bigcup \alpha_\lambda$ la propriété de n'avoir aucun sous-idéal appartenant au μ -système.

Un demi-anneau vérifiant la μ -condition est appelé μ -demi-anneau. On exprime par rapport à $\bar{\mathcal{G}}$ la μ -condition, en disant : Si $\{(\bar{\alpha}_\lambda)_0\}_{\lambda \in L}$ est une famille totalement ordonnée d'idéaux principaux et si aucun des $(\bar{\alpha}_\lambda)_0$ n'a d'éléments dans un m -système de $\bar{\mathcal{G}}$, il en est de même pour l'idéal $(\bigcup \bar{\alpha}_\lambda)_0$.

On introduit de façon analogue une π -condition et un π -demi-anneau. Les deux théorèmes qui vont suivre sont valables [6] :

THÉORÈME 1. - Tout π -demi-anneau est un μ -demi-anneau et réciproquement. En fait, la π -condition entraîne la μ -condition, car tout μ -système est un π -système. Réciproquement, si la μ -condition a lieu, prenons un p -système d'éléments de $\bar{\mathcal{G}}$ et une famille $\{(\bar{\alpha}_\lambda)_0\}$, totalement ordonnée par inclusion, de telle façon qu'aucun $(\bar{\alpha}_\lambda)_0$ n'ait d'élément dans le p -système ; alors $(\bigcup \bar{\alpha}_\lambda)_0$ n'a aucun élément dans le même p -système, car cela a lieu pour chaque m -système dont il est la réunion.

THÉORÈME 2 (Mlle Galvão). - Pour qu'un demi-anneau \mathcal{G} soit un μ -demi-anneau, il faut et il suffit que tout idéal réticulé semi-premier de $\bar{\mathcal{G}}$ soit principal.

La condition est nécessaire : Soit \mathcal{G} un μ -demi-anneau, et supposons que \bar{x} soit un idéal réticulé et demi-premier de $\bar{\mathcal{G}}$. Son complémentaire $C(\bar{x})$ est un p -système (ou un π -système d'idéaux de \mathcal{G}). Nous allons montrer que, parmi les idéaux de \mathcal{G} appartenant à \bar{x} , il y a un idéal maximal. Si on prend un ensemble ordonné $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ d'idéaux appartenant à \bar{x} , aucun des x_α n'a de sous-idéal appartenant à $C(\bar{x})$, car \bar{x} est un idéal réticulé. Si \mathcal{G} est un μ -semi-anneau, l'idéal $\bigcup x_\alpha$ n'a aucun sous-idéal appartenant à $C(\bar{x})$. Le principe de Zorn entraîne l'existence d'un idéal maximal $\eta \in \bar{x}$. On a d'ailleurs $\eta = \bar{x}$, car

$\mathfrak{h} \subset \mathfrak{x}$ entraînerait l'existence de $x \in \mathfrak{x}$, $x \notin \mathfrak{h}$, avec $(x) \in \overline{\mathfrak{x}}$. L'idéal $(\mathfrak{h}, (x))$, qui serait contenu dans \mathfrak{x} , appartiendrait également à $\overline{\mathfrak{x}}$ et \mathfrak{h} ne serait pas maximal. Les relations $\mathfrak{h} = \mathfrak{x}$, $\mathfrak{h} \in \overline{\mathfrak{x}}$ donnent $\overline{\mathfrak{x}} = \overline{\mathfrak{x}_0}$ et la première partie du théorème reste démontrée.

La condition est suffisante : Nous devons démontrer que, si $\{(\overline{\mathfrak{g}_\lambda})_0\}_{\lambda \in L}$ est une famille ordonnée d'idéaux complets chacun d'eux ayant une intersection vide avec un ensemble \mathfrak{M} d'idéaux de \mathfrak{G} qui constitue un m -système de $\overline{\mathfrak{G}}$, on a aussi $\mathfrak{M} \cap (\overline{\mathfrak{Ug}_\lambda})_0 = \Phi$. Soit $\overline{\mathfrak{r}_\lambda}$ le radical de $(\overline{\mathfrak{g}_\lambda})_0$. On peut faire les remarques suivantes :

1° Comme le passage $\alpha \rightarrow B(\alpha)$ d'un idéal à son radical est isotone, $\{\overline{\mathfrak{r}_\lambda}\}_{\lambda \in L}$ est une famille totalement ordonnée d'idéaux et $\bigcup \overline{\mathfrak{r}_\lambda}$ est un idéal ;

2° Comme l'union d'une famille d'idéaux réticulés est un idéal réticulé, l'idéal $\bigcup \overline{\mathfrak{r}_\lambda}$ est un idéal réticulé ;

3° Comme l'idéal $\bigcup \overline{\mathfrak{r}_\lambda}$ est union d'une famille d'idéaux complètement semi-premiers, il est aussi un idéal complètement semi-premier. Alors l'idéal réticulé et semi-premier $\bigcup \overline{\mathfrak{r}_\lambda}$ est, par hypothèse, un idéal principal. D'après la définition de radical, aucun des $\overline{\mathfrak{r}_\lambda}$ n'a d'élément dans \mathfrak{M} , donc il en est de même pour $\bigcup \overline{\mathfrak{r}_\lambda}$, c'est-à-dire : $\mathfrak{M} \cap (\bigcup \overline{\mathfrak{r}_\lambda}) = \Phi$. Mais l'idéal support de l'idéal $\bigcup \overline{\mathfrak{r}_\lambda}$ est évidemment $\bigcup \mathfrak{r}_\lambda$. On en tire

$$\bigcup \overline{\mathfrak{r}_\lambda} = (\overline{\bigcup \mathfrak{r}_\lambda})_0 = \bigcup (\overline{\mathfrak{r}_\lambda})_0 .$$

De cette façon, compte tenu de l'inclusion $(\overline{\mathfrak{Ug}_\lambda})_0 \subseteq (\overline{\bigcup \mathfrak{r}_\lambda})_0$ et de la relation

$$\mathfrak{M} \cap (\overline{\bigcup \mathfrak{r}_\lambda})_0 = \mathfrak{M} \cap (\bigcup \overline{\mathfrak{r}_\lambda}) = \Phi ,$$

la seconde partie du théorème en résulte.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ALMEIDA COSTA (Antonio). - μ -systèmes et π -systèmes d'idéaux, Rev. Fac. C., Lisboa, Série 2, A : Mat., t. 7, 1959, p. 235-243.
- [2] ALMEIDA COSTA (Antonio). - Sur les μ -anneaux et les μ_0 -anneaux, Rev. Fac. C., Lisboa, Série 2, A : Mat., t. 8, 1960, p. 131-144.
- [3] DUBREIL-JACOTIN (M. L.), LESIEUR (L.) et GROISOT (R.). - Leçons sur la théorie des treillis, des structures algébriques ordonnées et des treillis géométriques. - Paris, Gauthier-Villars, 1953 (Cahiers scientifiques, 21).

- [4] KRULL (Wolfgang). - Idealtheorie in Ringen ohne Endlichkeitsbedingung, Math. Annalen, t. 101, 1929, p. 729-744.
 - [5] NOETHER (Emmy). - Idealtheorie in Ringbereichen, Math. Annalen, t. 83, 1921, p. 24-66.
 - [6] NORONHA GALVÃO (M. L.). - Sur la théorie de Noether-Krull dans les semi-anneaux, Rev. Fac. C., Lisboa, Série 2, A : Mat., t. 8, 1960, fascicule 2.
-