Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres

Mario Curzio

Treillis des sous-groupes de composition

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 14, n° 1 (1960-1961), exp. n° 9, p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1960-1961__14_1_A8_0>

TREILLIS DES SOUS-GROUPES DE COMPOSITION

par Mario CURZIO

(d'après O. TAMASCHKE, G. ZACHER, G. ZAPPA et M. CURZIO)

1. Notations.

Tous les groupes G , H , K , ... qui interviennent dans cet exposé sont supposés finis, de plus :

$|G|$ est l'ordre du groupe G ;

$H \lhd G$ ou $G \rhd H$ signifie que H est un sous-groupe distingué du groupe G ;

$(H_i)_G$ est une suite de composition du groupe G ;

$(H_i)^!_G$ est une suite de Jordan-Hölder du groupe G ;

$\langle H_i \rangle_G$ est une suite (strictement décroissante) de sous-groupes $\lhd G$;

$\langle H_i \rangle^!_G$ est une suite $\langle H_i \rangle_G$ telle que

$$K \lhd G \ , \ H_i \supseteq K \supseteq H_{i+1} \implies K = H_i \ \text{ ou } \ K = H_{i+1} \qquad ;$$

$K \lhd\lhd G$ ou $G \rhd\rhd K$ signifie que K est un sous-groupe de composition, c'est-à-dire : K est dans une suite $(H_i)_G$;

$L(G)$ est le treillis des sous-groupes de G ;

$N(G)$ est le treillis des sous-groupes $\lhd G$.

L'ensemble $C(G)$ des sous-groupes $\lhd\lhd G$ est un treillis inférieurement-modulaire [9] (1).

En ce qui concerne les treillis on peut voir les traités [1] et [5].

2. Étude des groupes dont le treillis $C(G)$ est distributif au sens de la théorie des treillis.

Un premier résultat est dû à G. ZAPPA qui a donné le théorème suivant [12] :

THÉORÈME 1.2. - Soit G un groupe résoluble. Pour que le treillis $C(G)$ soit distributif, il faut et il suffit que les sous-groupes de Sylow de G soient cycliques.

---

(1) Les numéros entre les crochets renvoient à la bibliographie placée à la fin de l'exposé.

Démonstration.

Les sous-groupes de Sylow de G sont cycliques. On sait que [6] :

$$|H| = |K| \ , \quad H \lll G \implies H = K \qquad ,$$

alors

$$C(G) = N(G) \qquad .$$

Donc, si A , X , Y sont trois sous-groupes de composition, on aura

$$A \cup X = A \cup Y \ , \quad A \cap X = A \cap Y \implies \frac{A \cup X}{X} \cong \frac{A}{A \cap X} \cong \frac{A \cup X}{Y} \implies |X| = |Y| \implies X = Y .$$

D'après cela, le treillis $C(G)$ est distributif.

Le treillis $C(G)$ est distributif.

On voit aisément que dans chaque suite $\langle H_i \rangle_G^{!}$ les quotients $|H_i|/|H_{i+1}|$ sont premiers. Par conséquent si

$$|G| = p_1^{\alpha_1} \ldots p_t^{\alpha_t} \quad (p_1 > \ldots > p_t \ \text{ premiers }) \qquad ,$$

G possède un sous-groupe $K \lhd G$ d'ordre $p_1^{\alpha_1}$. Les treillis $C(G/K)$ et $C(K) = L(K)$ sont distributifs ; par récurrence sur t , on prouve que les sous-groupes de Sylow de G sont cycliques.

G. ZACHER a donné une condition nécessaire et suffisante pour que $C(G)$, dans le cas général, soit distributif. On a [11] :

THÉORÈME 2.2. - Si dans les suites $\langle H_i \rangle_G$ les quotients H_i/H_{i+1} , qui sont des p-groupes, sont aussi cycliques, $C(G)$ est distributif et vice versa.

La démonstration, très technique, n'est pas brève, et on préfère renvoyer au travail de ZACHER.

Dans l'ordre d'idée des théorèmes précédents on trouve que [3]

THÉORÈME 3.2. - Soient H_i les éléments résolubles (au sens de la théorie des groupes) du treillis $C(G)$. Si A est neutre dans $C(\bigcup_i H_i)$, A est un sous-groupe caractéristique de G . De plus, si $B \in C(\bigcup_i H_i)$, on a

$$A \cap B \lhd A \cup B \implies |A/A \cap B| \ \text{ et } \ |B/A \cap B| \ \text{ premiers entre eux} \qquad .$$

Démonstration. - L'énoncé 3.2 contient un certain nombre de propositions ; nous donnerons sa démonstration en trois parties :

(α) $A \cap B \lhd A \cup B \implies |A/A \cap B|$ et $|B/A \cap B|$ premiers entre eux.

Si $A \cap B \lhd A \cup B$ et $A \cap B \neq A$ ou B, on a

(1) $\frac{A \cup B}{A \cap B} = \frac{A}{A \cap B} \cup \frac{B}{A \cap B}$, $\frac{A \cap B}{A \cap B} = \frac{A}{A \cap B} \cap \frac{B}{A \cap B}$.

Le treillis $C((A \cup B)/(A \cap B))$ est isomorphe à l'intervalle $[A \cap B , A \cup B]$ de $C(\bigcup_i H_i)$, ce qui implique : $A/(A \cap B)$ neutre dans $C((A \cup B)/(A \cap B))$. Donc [1] :

$$(2) \qquad C\left(\frac{A \cup B}{A \cap B}\right) = C\left(\frac{A}{A \cap B}\right) \times C\left(\frac{B}{A \cap B}\right) .$$

Alors : $(A \cup B)/(A \cap B) = A/(A \cap B) \times B/(A \cap B)$, et $|A/(A \cap B)|$ et $|B/(A \cap B)|$ sont premiers entre eux (voir le théorème 1.4).

(β) A est un sous-groupe $\lhd \bigcup_i H_i$.

Si $|\bigcup_i H_i| = pq$ (p, q premiers), c'est-à-dire si : longueur de $C(\bigcup_i H_i) = 2$, il est évident que : $A \lhd \bigcup_i H_i$.

Supposons : longueur de $C(\bigcup_i H_i) \geqslant 3$, et, prouvons ($\beta$) par récurrence sur cette longueur.

Si A est un élément maximal de $C(\bigcup_i H_i)$, A est un sous-groupe invariant de $\bigcup_i H_i$; si A n'est pas maximal, il existe un sous-groupe $B \lhd \bigcup_i H_i$ tel que $A < B$. Le treillis $C(B)$ est un sous-treillis de $C(\bigcup_i H_i)$; d'où : A est un élément neutre de $C(B)$. La longueur de $C(B)$ est plus petite que la longueur de $C(\bigcup_i H_i)$, et, B est un groupe résoluble ; donc, d'après l'hypothèse de récurrence : $A \lhd G$.

D'après (α),

$$(*) \qquad |A| = |X| , \ X \lhd B \implies A = X$$

en effet, si $X \neq A$, les ordres $|A/(A \cap X)|$ et $|X/(A \cap X)|$ ne seraient pas premiers entre eux. D'après (*), A est un sous-groupe caractéristique de B, et $A \lhd \bigcup_i H_i$ parce que l'on sait que $B \lhd \bigcup_i H_i$.

(γ) A est un sous-groupe caractéristique de G . D'après (β), $A \lhd \bigcup_i H_i$; de cela et de (α), on déduit que

$$|A| = |X| , \ X \lhd \bigcup_i H_i \implies A = X .$$

Alors (γ) est vraie parce que $\bigcup_i H_i$ est un sous-groupe caractéristique de G .

Remarques. - Nous avons vu que si A est un élément résoluble et neutre du treillis $C(G)$, il est aussi un sous-groupe caractéristique ; pourtant, on peut avoir des éléments neutres de $C(G)$ qui ne sont pas des sous-groupes caractéristiques ; par exemple : soit G le groupe $A \times B$ où les sous-groupes A et B sont isomorphes et simples (non abéliens).

O. TAMASCHKE a donné une condition nécessaire et suffisante pour que A soit neutre en $C(G)$. Ce théorème paraîtra dans le "Matematische Zeitschrift"[8].

La condition du théorème 3.2, imposée aux éléments du treillis $N(G)$, est suffisante pour que A soit neutre en $N(G)$. On a [3].

THÉORÈME 4.2. - Si $A \lhd G$, et si, pour tous les sous-groupes $B \lhd G$, les ordres $|B/(A \cap B)|$ et $|A/(A \cap B)|$ sont premiers entre eux, A est un élément neutre du treillis $N(G)$.

Démonstration. - Soient X et Y, sous-groupes distingués de G, vérifiant :

$$A \cap X = A \cap Y \ , \quad A \cup X = A \cup Y \quad ;$$

on aura

$$\left|\frac{A}{A \cap X}\right| = \left|\frac{A}{A \cap Y}\right| \quad , \tag{3}$$

d'où

$$\frac{A \cup X}{A \cap X} = \frac{A}{A \cap X} \times \frac{X}{A \cap X} = \frac{A}{A \cap X} \times \frac{Y}{A \cap X} \quad , \tag{4}$$

$$\frac{A \cup X}{A \cap X} = \frac{A}{A \cap X} \cup \left[\frac{X}{A \cap X} \cup \frac{Y}{A \cap X}\right] \quad . \tag{5}$$

Un nombre premier p divise $|(X/(A \cap X)) \cup (Y/(A \cap X)|$ si, et seulement s'il divise $|X/(A \cap X)|$; en effet $|X/(A \cap X)| = |Y/(A \cap X)|$, et les sous-groupes $X/(A \cap X)$, $Y/(A \cap X)$ sont $\lhd$ $(A \cup X)/(A \cap X)$. Par hypothèse $|X/(A \cap X)|$ et $|A/(A \cap X)|$ sont premiers entre eux ; donc, à cause de (5) :

$$\frac{A \cup X}{A \cap X} = \frac{A}{A \cap X} \times \left[\frac{X}{A \cap X} \cup \frac{Y}{A \cap X}\right] \quad .$$

Enfin d'après [12] :

$$|(X/(A \cap X)) \cup (Y/(A \cap X))| = |X/(A \cap X)| = |Y/(A \cap X)| \quad ,$$

c'est-à-dire : $X = Y$. Nous avons démontré que A est un élément neutre

[2] du treillis $N(G)$. Si G est un groupe résoluble, le théorème 3.2 permet de déterminer le centre de $C(G)$. On a [3] :

THÉORÈME 5.2. - Soit G un groupe résoluble. Pour que A soit dans le centre du treillis $C(G)$, il faut et il suffit que l'on ait : $G = A \times B$ où $|A|$ et $|B|$ sont premiers entre eux.

3. Caractérisation des groupes dont le treillis $C(G)$ est modulaire.

On a [13]

THÉORÈME 1.3. - Le treillis $C(G)$ est modulaire si et seulement si dans chaque suite $(H_i)_G$ les quotients qui sont des p-groupes, sont quasi-hamiltoniens [3].

Démonstration. - Supposons que $C(G)$ soit modulaire. Dans une suite $(H_i)_G$, on considère un quotient H_i/H_{i+1}. Le treillis $C(H_i/H_{i+1})$ est isomorphe à l'intervalle $[H_{i+1}, H_i]$ de $C(G)$; d'où : $C(H_i/H_{i+1})$ est modulaire. Si H_i/H_{i+1} est un p-groupe, on a

$$L(H_i/H_{i+1}) = C(H_i/H_{i+1})$$

et le quotient H_i/H_{i+1} est un groupe quasi-hamiltonien [7].

Vice versa : supposons que dans les suites $(H_i)_G$, chaque p-groupe H_i/H_{i+1} soit quasi-hamiltonien.

Puisque $C(G)$ est un treillis modulaire inférieurement, il suffit de prouver que si les éléments A et B de $C(G)$ couvrent $A \cap B$ dans le treillis $C(G)$, la réunion $A \cup B$ couvre A et B dans le treillis $C(G)$. Puisque A et B couvrent $A \cap B$, l'intersection $A \cap B$ est un sous-groupe distingué de A et B ; donc, $A/(A \cap B)$ est simple (non abélien), ou a un ordre premier. Nous démontrerons que dans le treillis $C((A \cup B)/(A \cap B))$, l'élément $(A \cup B)/(A \cap B)$ couvre $A/(A \cap B)$ et $B/(A \cap B)$; par conséquent $A \cup B$ couvrira A et B dans le treillis $C(G)$.

On peut avoir :

(α) $|A/(A \cap B)| \neq |B/(A \cap B)|$ et ils sont premiers.

---

[2] Soit x un élément d'un treillis modulaire. Si :

$$x \cup y = x \cup z \quad , \quad x \cap y = x \cap z \implies y = z$$

x est élément neutre.

[3] On dit que G est un groupe quasi-hamiltonien si [7] :

$$M , N \in L(G) \implies M \cup N = MN = NM \quad .$$

On a ([9], théorème 19) :

$$\frac{A \cup B}{A \cap B} = \frac{A}{A \cap B} \times \frac{B}{A \cap B} \quad ,$$

et il est évident que $(A \cup B)/(A \cap B)$ couvre $A/(A \cap B)$ et $B/(A \cap B)$.

(β) $|A/(A \cap B)| = |B/(A \cap B)| = p$ (p premier) .

Le quotient $(A \cup B)/(A \cap B)$ est un p-groupe ([9], théorème 10), et puisque $(A \cup B) \in C(G)$ et $(A \cup B) \rhd (A \cap B)$, il existe une suite $(H_i)_G$ dont $(A \cup B)/(A \cap B)$ est un quotient. Comme par hypothèse, le p-groupe $(A \cup b)/(A \cap B)$ est quasi-hamiltonien, le treillis $C((A \cup B)/(A \cap B))$ est modulaire [7]. Puisque $A/(A \cap B)$ et $B/(A \cap B)$ couvrent $(A \cap B)/(A \cap B)$, la réunion $(A \cup B)/(A \cap B)$ couvrira $A/(A \cap B)$ et $B/(A \cap B)$.

(γ) $A/(A \cap B)$ est un groupe simple (non abélien).

Le groupe $A/(A \cap B)$ est un groupe parfait, et $(A \cap B)/(A \cap B)$ est résoluble car :

$$|(A \cap B)/(A \cap B)| = 1 \quad .$$

Donc, $A/(A \cap B)$ est un sous-groupe distingué de $(A \cup B)/(A \cap B)$ (théorème [9]). On a

$$\frac{(A \cup B)/(A \cap B)}{A/(A \cap B)} \cong \frac{B/(A \cap B)}{(A \cup B)/(A \cap B)}$$

et, dans le treillis $C((A \cup B)/(A \cap B))$, l'élément $B/(A \cap B)$ couvre $(A \cap B)/(A \cap B)$; alors, dans le treillis $C((A \cup B)/(A \cap B))$, l'élément $(A \cup B)/(A \cap B)$ doit couvrir $A/(A \cap B)$.

Maintenant, démontrons que $(A \cup B)/(A \cap B)$ couvre aussi $B/(A \cap B)$ (bien entendu, dans le treillis $C((A \cup B)/(A \cap B))$). Si l'élément

$$X/(A \cap B) \in C((A \cup B)/(A \cap B))$$

est tel que

$$\frac{A \cup B}{A \cap B} \supset \frac{X}{A \cap B} \supset \frac{B}{A \cap B} \quad ,$$

on a

$$(X \cap A)/(A \cap B) \in C(A/(A \cap B)) \quad .$$

Puisque :

$$\frac{A}{A \cap B} \cup \frac{B}{A \cap B} = \frac{A \cup B}{A \cap B} \neq \frac{X}{A \cap B} \quad ,$$

il en résulte

$$(X \cap A)/(A \cap B) \neq A/(A \cap B) \quad .$$

Puisque

$$\left|\frac{A}{A \cap B} \cap \frac{X}{A \cap B}\right| = \frac{|A/(A \cap B)| \times |X/(A \cap B)|}{|(A \cup B)/(A \cap B)|} > \frac{|A/(A \cap B)| \times |B/(A \cap B)|}{|(A \cup B)/(A \cap B)|} = 1$$

il en résulte

$$(X \cap A)/(A \cap B) \neq (A \cap B)/(A \cap B) \quad .$$

Cela est en contradiction avec l'hypothèse : $A/(A \cap B)$ couvre $(A \cap B)/(A \cap B)$ dans le treillis $C((A \cup B)/(A \cap B))$.

(δ) $B/(A \cap B)$ est un groupe simple (non abélien).

Voir (γ).

4. Étude des groupes dont le treillis $C(G)$ est ou complété ou réductible.

O. TAMASCHKE a prouvé que [8] :

THÉORÈME 1.4. - Pour que $C(G)$ soit réductible, il faut et il suffit que l'on ait :

$$G = G_1 \times G_2$$

où aucun quotient abélien A_1/B_1 $(A_1 \lhd\lhd G_1)$ n'est isomorphe à un quotient A_2/B_2 $(A_2 \lhd\lhd G_2)$.

La démonstration se trouve dans [8].

Remarque. - En 1957, j'ai démontré [3] le corollaire suivant du théorème 1.4 :

Soit G un groupe résoluble. Pour que $C(G)$ soit réductible, il faut et il suffit que l'on ait :

$$G = G_1 \times G_2$$

où $|G_1|$ et $|G_2|$ sont premiers entre eux.

Il est bien facile de déterminer les groupes dont $C(G)$ est un treillis complémenté, rappelons tout d'abord les lemmes ([3] et [10]) :

LEMME 1.4. - Si $C(G)$ est complémenté, un sous-groupe distingué-minimal [4] N est un groupe simple tel que

$$G = N \times M \quad .$$

LEMME 2.4. - Soient N un sous-groupe distingué du groupe G, M un complément du sous-groupe N. On a : $K \lhd G$, $K < M$,

$$M_1 \cup K = G \,,\quad M_1 \cap K = 1 \implies (M \cap M_1) \cup (N \cup K) = G \,,\quad (M \cap M_1) \cap (N \cup K) = 1 \,.$$

Et finalement [3] :

THÉORÈME 2.4. - Pour que $C(G)$ soit complémenté, il faut et il suffit que G soit un produit direct de groupes simples.

Démonstration. - Supposons que $C(G)$ soit complémenté. Si N est un sous-groupe distingué-minimal on a (Lemme 1.4) :

$$G = N \times M \quad , \tag{6}$$

où N est simple. Si M est un produit direct de groupes simples, le théorème est déjà démontré. Supposons que M ne soit pas le composé direct de groupes simples ; alors G possède un sous-groupe $K \neq 1$ qui est distingué-minimal pour M. D'après (6), K est distingué-minimal aussi pour G ; donc (Lemme 1.4) K est simple, et admet un complément M_1 qui est un sous-groupe invariant de G. On a (Lemme 2.4) :

$$(M \cap M_1) \cup (N \cup K) = G \,,\quad (M \cap M_1) \cap (N \cup K) = 1 \quad . \tag{7}$$

Il en résulte aussi :

$$N \cup K = N \times K \lhd G \quad ,$$

et, d'après (7) :

$$G = (M \cap M_1) \times S_1 \quad ,$$

où $S_1 = N \times K$.

Le groupe S_1 est le produit direct des groupes simples N et K ; donc, si $M \cap M_1$ est le composé direct de groupes simples, la même propriété est valable pour G. Si $M \cap M_1$ n'est pas un tel composé, on peut trouver des sous-groupes

---

[4] On dit que $A \lhd G$ est un sous-groupe distingué-minimal, si

$$A' \lhd G \,,\quad A \supseteq A' \implies A' = A \ \text{ou}\ A' = 1 \quad .$$

M_2 et K_1 tels que :

$$G = (M \cap M_1 \cap M_2) \times S_2$$

où K_1 est simple et $S_2 = S_1 \times K_1$.

Le groupe G est fini, et alors il existera un entier n tel que :

$$G = (M \cap M_1 \cap \dots \cap M_n) \times S_n \quad ,$$

où $M \cap M_1 \cap \dots \cap M_n$ est simple et S_n est un produit direct de groupes simples.

Soit G un produit direct de groupes simples.

Le treillis $N(G)$ est modulaire et G est la réunion des atomes de $N(G)$, alors $N(G)$ est un treillis complémenté [1]. Par conséquent, si A est un sous-groupe distingué de G, on peut trouver un sous-groupe B tel que $G = A \times B$, donc on voit aisément que

$$N(G) = C(G) \quad .$$

5. Problèmes ouverts. - En ce qui concerne le treillis $C(G)$, on peut se poser les problèmes suivants.

PROBLÈME 1. - *Si G est un groupe donné, construire les groupes G' tels que :*

$$C(G') \simeq C(G) \quad .$$

PROBLÈME 2. - *Si G est un groupe donné, construire les groupes G' tels que $C(G')$ soit le dual du treillis $C(G)$.*

PROBLÈME 3. - *Construire les groupes G tels que $C(G)$ soit autodual.*

Je crois qu'il ne serait pas facile de résoudre ces problèmes dans le cas général, et je voudrais signaler certains résultats particuliers ([2] et [4]) :

THÉORÈME 1.5. - *Soit G un groupe résoluble. Pour que $C(G)$ soit isomorphe au treillis $C(G')$ d'un groupe nilpotent G', il faut et il suffit que l'on ait :*

$$G = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_t \qquad (t \geqslant 1)$$

où $|G_i|$ et $|G_j|$ sont premiers entre eux et G_i est un p-groupe, ou un groupe d'ordre $r^\alpha q^\beta$ ($r \neq q$ premiers), dont les sous-groupes de Sylow sont cycliques et dont le groupe dérivé est son propre centralisateur.

Démonstration.

La condition est nécessaire. - On peut avoir :

(α) G' est un p-groupe cyclique.

Les sous-groupes de Sylow de G sont cycliques parce que le treillis $C(G)$ est distributif (Théorème 1.1). Le dérivé K de G est cyclique [14] et G/K est abélien, on aura :

$$|G| = r^{\alpha} q^{\beta} \qquad (r\ ,\ q \text{ premiers})$$

parce que $C(K)$ et $C(G/K)$ sont des chaînes. D'après cela, si $r \neq q$, il est évident que K est son propre centralisateur :

(β) G' est un p-groupe non cyclique.

Soit p^{α} l'ordre du groupe G' . Si $\alpha = 2$, on a

$$|G| = p^2 \qquad ;$$

si $\alpha \geqslant 3$, par récurrence sur α , nous démontrerons que

$$|G| = |G'| \qquad .$$

D'abord, supposons $p \neq 2$.

On sait [14] que G possède un sous-groupe maximal H' qui n'est pas cyclique. Soit W un isomorphisme : $C(G) \to C(G')$; le sous-groupe $H = W^{-1}(H')$ est un sous-groupe distingué-maximal ([5]) de G , et, puisque G est résoluble, on a

$$|G/H| = q \qquad (\ q \text{ premier}) \qquad .$$

Les treillis $C(H)$ et $C(H')$ sont **isomorphes** ; donc, d'après l'hypothèse de récurrence : $|H| = p^{\alpha-1}$. D'où $|G| = p^{\alpha-1} q$. Le groupe G' possède un sous-groupe maximal $K' \neq H'$; posons : $W^{-1}(K') = K$. On voit aisément que les treillis $C(G/(H \cap K))$ et $C(G'/(H' \cap K'))$ sont isomorphes ; de plus : $|G'/(H' \cap K')| = p^2$, et, par conséquent : $|G/(H \cap K)| = p^2$. D'après cela : $|H \cap K| = p^{\alpha-3} q$; mais on a $p = q$, car $|H \cap K|$ doit diviser $|H| = p^{\alpha-1}$. Nous avons démontré que

$$|G| = p^{\alpha} \qquad .$$

Si $p = 2$, de façon presque analogue, on peut voir que

$$|G| = 2^{\alpha} \qquad .$$

([5]) On dit que $A \lhd G'$ est un sous-groupe distingué-maximal, si :

$$A' \lhd G\ ,\ A' \supseteq A \implies A' = A \text{ ou } A' = G \qquad .$$

(γ) G' n'est pas un p-groupe.

Le treillis $C(G') = L(G')$ est réductible, par conséquent on aura (Théorème 1.4) :

$$G = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_t \qquad (t > 1)$$

où $|G_i|$ et $|G_j|$ sont premiers entre eux. A cause de (α) et de (β), chaque G_i a la structure donnée dans l'énoncé 1.5 ; en effet, $C(G_i)$ est isomorphe au treillis $C(G'_i) = L(G'_i)$ lié au sous-groupe de Sylow G'_i du groupe G' .

La condition est suffisante. - La démonstration est triviale.

En ce qui concerne les problèmes 2 et 3 on peut remarquer que [4] :

THÉORÈME 2.5. - Soit G un groupe résoluble tel que : $N(G) = C(G)$. Le treillis $N(G)$ n'est jamais le dual du treillis $L(G')$ lié au groupe hamiltonien (6) G' .

THÉORÈME 3.5. - Soit G un groupe hyper-résoluble. Si $C(G)$ est le dual du treillis $L(G')$ d'un p-groupe G' non cyclique, on a $|G| = |G'|$.

Remarque. - Soient G un groupe résoluble, et $C(G)$ le dual du treillis $L(G')$ lié au p-groupe G' supposé non cyclique. On peut avoir $|G| \neq |G'|$; par exemple : soient G' le groupe des quaternions et G le groupe alterné de degré 4. Donc, l'hypothèse : " G est un groupe hyper-résoluble" est une hypothèse nécessaire pour que 3.5 soit valable.

Pour les démonstrations des théorèmes 2.5 et 3.5, on préfère renvoyer au travail [4] ; à l'aide de ces théorèmes on peut aisément prouver que [4] :

THÉORÈME 4.5. - Soit G un groupe hyper-résoluble dont aucun sous-groupe de Sylow ne soit cyclique. Le treillis $C(G)$ est autodual si, et seulement si G est un groupe nilpotent, et il existe un groupe abélien G' tel que : $L(G) \simeq L(G')$.

THÉORÈME 5.5. - Soit G un groupe résoluble tel que : $N(G) = C(G)$, et dont aucun sous-groupe de Sylow ne soit cyclique. Le treillis $N(G)$ est autodual, si, et seulement si G est abélien.

Remarque. - L'hypothèse : "aucun sous-groupe de Sylow n'est cyclique" est une hypothèse nécessaire pour que 4.5 soit valable. Par exemple : soit G un groupe

(6) Soit G un groupe non abélien. On dit que G est hamiltonien, si :

$$H \in L(G) \implies H \lhd G \quad .$$

non abélien d'ordre pq ($p \neq q$ premiers). Alors, $C(G)$ est autodual et G n'est pas nilpotent.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BIRKHOFF (Garrett). - Lattice theory. - New-York, American mathematical Society, 1948 (Amer. math. Soc. Coll. Publ., 25).

[2] CURZIO (Mario). - Sui reticolo dei sottogruppi di composizione di alcuni gruppi finiti, Boll. Unione mat. ital., Série 8, t. 12, 1957, p. 284-289.

[3] CURZIO (Mario). - Sui sottogruppi di composizione di gruppi finiti, Richerche di Matematica, t. 7, 1958, p. 265-287.

[4] CURZIO (Mario). - Sui gruppi supersolubili per cui il reticolo del sottogruppi di composizione è autoduale, Le Matematiche, t. 12, 1957, p. 74-79.

[5] DUBREIL-JACOTIN (M.-L.), LESIEUR (L.) et CROISOT (R.). - Leçons sur la théorie des treillis, des structures algébriques ordonnées et des treillis géométriques. - Paris, Gauthier-Villars, 1953 (Cahiers scientifiques, 21).

[6] HONDA (Kin-ya). - On finite groups, whose Sylow-groups are all cyclic, Comment. math. Univ. Sancti Pauli, Tokyo, t. 1, 1952, p. 5-39.

[7] IWASAWA (Kenkiti). - Über die endlichen Gruppen und die Verbände ihrer Untergruppen, J. Fac. Sc. Univ. Tokyo, t. 4, 1941, p. 171-199.

[8] TAMASCHKE (O.). - Gruppen mit reduziblem Subnormalteilerverband, Math. Z., t. 75, 1961, p. 211-214.

[9] WIELANDT (Helmut). - Eine Verallgemeinerung den invarianten Untergruppen, Math. Z., t. 45, 1939, p. 209-244.

[10] ZACHER (Giovanni). - Costruzione dei gruppi finiti a sottogruppo di Frattini identico, Rend. Sem. mat. Univ. Padova, t. 21, 1952, p. 383-394.

[11] ZACHER (Giovanni). - Sui gruppi finiti per cui il reticolo dei sottogruppi di composizione è distributivo, Rend. Sem. mat. Univ. Padova, t. 27, 1957, p. 75-79.

[12] ZAPPA (Guido). - Sui gruppi finiti risolubili per cui il reticolo dei sottogruppi di composizione è distributivo, Boll. Unione mat. ital., Série 8, t. 11, 1956, p. 150-157.

[13] ZAPPA (Guido). - Sui gruppi finiti per cui il reticolo dei sottogruppi di composizione è modulare, Boll. Unione mat. ital., Série 8, t. 11, 1956, p. 315-318.

[14] ZASSENHAUS (H.). - Lehrbuch der Gruppentheorie, Band 1. - Leipzig, B. G. Teubner, 1937 (Hampburger mathematische Einzelschriften, 21).